育児と児童手当および人的資本の定常均衡に関する一考察

メタデータ	言語: ja 出版者: 静岡大学人文社会科学部 公開日: 2022-03-23 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 村田, 慶, 丁, 嘉祺 メールアドレス: 所属:
URL	https://doi.org/10.14945/00028794

論　説

育児と児童手当および人的資本の定常均衡に関する一考察

村田　慶・丁　嘉祺

Ⅰ．はじめに

内閣府「平成30年版少子化社会対策白書」によれば，日本における夫婦の理想的な子どもの数（平均理想子ども数）は1987年から減少傾向にあり，2015年には2.32人と過去最低となっている．また，実際に持つつもりの子どもの数（平均予定子ども数）も2.01人と過去最低となっている．実際に持つつもりの子供の数（平均予定子ども数）が理想的な子どもの数（平均理想子ども数）を下回る理由としては，「子育てや教育にお金がかかりすぎるから」が56.3％と最も多く，30～34歳では８割を超えている．すなわち，日本では少子化が深刻化しており，その主な要因は育児・教育費の負担であることが分かる．日本では，育児・教育費の負担軽減を目的として，児童手当が実施されている．児童手当とは，各家計に対して，子どもの数に応じて助成金を支給する制度である．現役世代から税金などを徴収し，それを財源として次世代に支給するケースが想定されることから，経済学においては，世代重複モデルによる分析がしばしば行われている．

世代重複モデルによる児童手当と出生率に関する先行研究としては，Groezen, Leers and Mejidam (2003) が代表的である．Groezen, Leers and Mejidam (2003) では，小国開放経済を設定することによって賃金率を一定とし，それが各個人の所得水準と等しくなるとした上で，政府が税金を徴収し，それを財源とする児童手当および賦課方式年金をモデル化している[1]．また，Groezen, Leers and Mejidam (2003) では，各個人の生涯効用は，若年期における消費と子どもの数，および老年期における消費によって決まるとしている．しかしながら，Groezen, Leers and Mejidam (2003) では，児童手当と出生率の関係についてはモデル化されているものの，教育支出については考慮されておらず，教育支出による影響を受ける子どもの人的資本蓄積についても分析されていない．

世代重複モデルによる教育支出と人的資本蓄積に関する先行研究としては，教育支出を公教育と私教育に分類したものが数多く見られ，分析手法としては，以下のようなアプローチが存在する．１つ目は，Glomm and Ravikumar (1992)，Gradstein and Justman (1997)，およびSaint Paul

[1] 子育て支援の出生率への影響，あるいは出生率の変化を通じた年金財政への影響については，Nishimura and Zhang (1992)，Peters (1995)，およびKato (1999) においてもモデル化がなされている．

and Verdier (1993) で見られるように，両教育を別々に捉えるというものである．２つ目は，Benabou (1996)，Eckstein and Zilcha (1994)，およびKaganovich and Zilcha (1999) で見られるように，両教育が補完関係にあるというものである．３つ目は，Cardak (2004a, b) および村田 (2011, 2013)[2] で見られるように，両教育の効用比較による選択を分析するというものである．これらの先行研究では，公教育支出を政府による所得比例課税，私教育支出を親世代からの所得移転によって行うという点は共通しているものの，人口規模を一定，もしくは人口成長率を一定としており，出生率の内生化は考慮されていない．

出生率の内生化を組み込んでの教育支出と人的資本蓄積に関しては，村田 (2017b) において一つの考察がなされている．村田 (2017b) では，Groezen, Leers and Mejidam (2003) における生涯効用の決定要素として，次世代が獲得する人的資本水準を新たに組み入れている[3]．また，村田 (2017b) では，教育支出が次世代に均等配分されるという設定を行うことによって，人的資本蓄積において人口動態を組み入れた設定となっている．ただし，Groezen, Leers and Mejidam (2003) とは異なり，児童手当の財源について，教育支出と人的資本蓄積に関する先行研究における公教育支出と同様，所得比例課税を財源としている．また，教育支出は私教育のみを想定しており，さらに，老年期における経済活動を考慮しないため，貯蓄および公的年金に関する議論は捨象されている．しかしながら，村田 (2017b) では，人的資本蓄積に人口動態を組み入れているものの，教育支出を子ども全員に均等配分するというのは，モデル設定としてはやや窮屈と言える．また，村田 (2017b) では，各個人が生涯効用を最大化するにあたり，児童手当が政府による所得比例課税を財源とする点についても制約条件として組み込んでいるが，児童手当の支給額はともかく，その財源確保という政府の予算制約までを考慮して各個人が行動するというのは稀であると言える．それに対し，村田 (2019, 2020) では，労働所得の決定式において，育児時間による影響を新たに組み込むことによって，教育支出を均等配分するという設定をすることなく，児童手当が人的資本蓄積に及ぼす影響について分析可能なモデルを構築している．また，各個人は生涯効用を最大化するにあたり，児童手当の財源確保（政府の予算制約）を制約条件に組み込まないケースについて検討することによって，現実的な拡張・修正を行っている．

本稿では，村田 (2019, 2020) における児童手当と人的資本蓄積に関する世代重複モデルについ

[2] 村田 (2011, 2013) では，Cardak (2004a) において，Glomm and Ravikumar (1992) に倣い，生涯効用関数に余暇時間，人的資本関数に学習時間を新たに組み入れ，分析範囲の拡張・修正を行っている．

[3] Glomm and Ravikumar (1992) およびCardak (2004a, b) では，人的資本蓄積に関わる効用の決定要素として，次世代への教育支出を組み込んでいる．村田 (2017b) でも，出生率を内生化しているとはいえ，次世代の一人当たりが受け取る教育支出を導入しており，同じ類の設定がなされている．しかしながら，村田 (2017a) で述べているように，人的資本蓄積が教育支出と親世代の人的資本水準のみで決まるというシンプルなタイプの人的資本関数であっても，次世代への教育支出そのものから効用を得ることと，次世代が獲得する人的資本水準から効用を得ることとでは，意味合いが異なってくる点には注意が必要である．

て，さらなる拡張・修正を行う．村田（2019, 2020）では，児童手当と出生率に関する先行研究のモデルにおいて，教育支出を新たに組み込むことによって，人的資本蓄積に関する議論を行っているものの，育児に関する議論がやや限定的なものとなっている．具体的には，労働所得の決定式において，育児時間を組み込んでいるものの，Groezen, Leers and Mejidam（2003）と異なり，育児費用[4]を組み込んでいない．それに対し，本稿では，村田（2019, 2020）に育児費用を組み込んだモデルを構築することによって，育児に関する議論を拡張させる．その上で，村田（2020）と同様，特に人的資本の定常均衡に関する詳細な検討を行う．

本稿における構成として，まずⅡ節において，村田（2019, 2020）に育児費用を組み込んだ基本モデルを概観する．その上で，Ⅲ節において，人的資本関数を導出し，人的資本の定常均衡について，村田（2020）と同様，１つのみ存在するケース，複数存在するケース，および存在しないケースについて，その安定性も含めた詳細な検討を行う．

Ⅱ．モデル設定

各個人の経済活動は，２期間にわたって行われるとする．本稿では，２期について，$t-1$期とt期を基準とし，各期に生まれた個人をそれぞれ，$t-1$世代，t世代の個人と呼ぶこととする．また，各世代の子供は，第２期に誕生するものとする．また，各期における総時間を１で基準化する．

Ⅱ．1．人的資本形成

各世代の個人は，第２期において自身の人的資本を形成するものとする．本稿では，人的資本は，親世代による教育支出と親世代の人的資本水準によって形成されるとする．すなわち，t世代の各個人の$t+1$期における人的資本形成は，(1)のように決定付けられる[5]．

$$h_{t+1} = e_t^{\varepsilon} h_t^{\delta} \;;\; \varepsilon, \delta \in (0,1), \varepsilon + \delta > 1 \tag{1}$$

(1)において，h_{t+1}はt世代の各個人が$t+1$期において獲得する人的資本水準，e_tは$t-1$世代の各個人のt期におけるt世代への教育支出，h_tは$t-1$世代の各個人がt期において獲得する人的資本

[4] 本稿モデルにおける育児費用とは，就学前の子育て費用を意味する．

[5] 村田（2019, 2020）では，人的資本関数における影響力パラメータについて，$0<\varepsilon+\delta<1$と設定している．これは，人的資本の定常均衡の安定性条件と関連していたものであるが，本稿モデルでは，育児費用を加えた影響から，村田（2019, 2020）とは異なる設定を行わなければならない．

水準である．本稿では，$t+1$期における一国全体の効率労働H_{t+1}を(2)のように定義する．

$$H_{t+1}=\prod_{j=0}^{t}n_jL_0h_{t+1}=(n_0\times n_1\times\cdots n_t)L_0h_{t+1} \tag{2}$$

(2)において，L_0は初期における人口規模，n_jはj期における各個人の子どもの数である．

Ⅱ．2．効用最大化

各世代の個人は，第2期において，人的資本の供給を行うことによって労働所得を得るものの，子ども一人につき，ϕの育児時間が必要であるとする．村田(2019, 2020)と同様，生産者の存在を考慮しないため，賃金率が存在しないことから，$t-1$世代の各個人のt期における労働所得y_tは，(3)のように決定付けられる．

$$y_t=(1-\phi n_t)h_t\;;\;0<\phi<1 \tag{3}$$

(3)において，n_tは$t-1$世代の各個人のt期における子どもの数である．各世代の個人は，第2期において，政府から所得税を徴収され，それを財源とする児童手当を子どもの数に応じて支給される．その上で，各個人は労働の可処分所得と児童手当を自身の消費と子どもの育児費用および教育支出に配分するものとする．したがって，$t-1$世代の各個人がt期において直面する予算制約は，(4)のようになる．

$$(1-\tau_t)y_t+\varphi n_t=c_t+(p+e_t)n_t\;;\;0<\tau_t<1,p>0,\varphi>0 \tag{4}$$

(4)において，τ_tはt期における所得税率，pは各期における子ども一人当たりの育児費用，φは各期において支給される子ども一人当たりに対する助成金[6]，c_tは$t-1$世代の各個人のt期における消費である．単純化のため，遺産贈与は考慮しないものとする．本稿では，村田(2017b)および村田(2019, 2020)と同様，児童手当は所得比例課税を財源として実施されると仮定する[7]．政府

[6] 村田(2020, 2021)では，児童手当をηと表記しているが，本稿では，Groezen, Leers and Mejidam(2003)と同様，φと表記する．

[7] Groezen, Leers and Mejidam(2003)では，助成金の財源を定額税としているが，本稿モデルでは，Glomm and Ravikumar(1992)やCardak(2004a, b)における公教育支出と同様，所得比例課税を財源とする．日本における

の予算制約式は，(5)のように定義される．

$$\varphi = \frac{\tau_t \prod_{j=0}^{t-1} n_j L_0 y_t}{\prod_{j=0}^{t} n_j L_0} = \frac{\tau_t y_t}{n_t} \tag{5}$$

政府は子どもの数（出生率）と労働所得を所与として，児童手当による助成金 φ が維持されるように所得税率を調整するものとする．したがって，t 期における所得税率 τ_t は，(6)のように定義される[8]．

$$\tau_t = \frac{\varphi n_t}{y_t} \tag{6}$$

以上を前提として，各個人は生涯効用を最大化するように行動するものとする．本稿における生涯効用とは，２期間全体において得られる効用水準を意味し，それは第２期における消費水準と子どもの数，および次世代が獲得する人的資本水準によって決定付けられるものとする．$t-1$ 世代の各個人の２期間全体における効用水準を V^{t-1} とおくと，それは以下のように表される[9]．

$$\underset{c_t, n_t, e_t}{Maximize} \quad V^{t-1} = \log c_t + \gamma \log n_t + \beta \log h_{t+1} \, ; \; \gamma > 0, \beta \in (0,1)$$

$$subject\ to \quad (1-\tau_t)y_t + \varphi n_t = c_t + (p+e_t)n_t , \; y_t = (1-\phi n_t)h_t , \; h_{t+1} = e_t^{\varepsilon} h_t^{\delta}$$

ここで，γ は消費を基準とした子どもの数に対する選好を表わすパラメータ，β は次世代が獲得する人的資本水準から得られる効用の主観的割引率である．一階条件より，$t-1$ 世代の各個人の t 期における最適な子どもの数，最適教育支出，および最適消費はそれぞれ，(7)，(8)，および(9)のように導出される[10]．

所得税は累進課税であり，それを踏まえると，定額税よりも所得比例課税を想定する方が望ましいと言える．累進課税のケースについては，所得水準によって税率が変わるため，分析が複雑化することから，本稿では議論しない．

[8] 村田(2019, 2020)も同様であるが，本稿モデルでは，政府活動は所得比例課税による助成金の支給額の維持のみであり，他の活動は一切考慮していない．

[9] 村田(2019, 2020)では，生涯効用関数を $V^{t-1} = (1-\alpha)\log c_t + \alpha \log n_t + \beta \log h_{t+1}$；$\alpha, \beta \in (0,1)$ と設定している．それに対し，本稿モデルにおける生涯効用関数の設定は，選好パラメータおよび主観的割引率について，Groezen, Leers and Mejidam (2003) と似ている．

[10] (7)，(8)，および(9)の導出過程については，付録１を参照せよ．

$$n_t = \frac{(\gamma - \beta\varepsilon)(1-\tau_t)h_t}{(1+\gamma)\{(1-\tau_t)\phi h_t + p - \varphi\}} \tag{7}$$

$$e_t = \frac{\beta\varepsilon\{(1-\tau_t)\phi h_t + p - \varphi\}}{\gamma - \beta\varepsilon} \tag{8}$$

$$c_t = \frac{(1-\tau_t)h_t}{1+\gamma} \tag{9}$$

(7)について，本稿では，$\gamma > \beta\varepsilon$ を仮定する[11]．また，育児費用と児童手当による助成金の大小関係について，$p > \varphi$ を仮定する[12]．

Ⅲ．人的資本蓄積と定常状態

Ⅱ節を踏まえ，本節では，人的資本の定常均衡の存在性および安定性について検討する．(8)を(1)に代入すると，人的資本関数は(10)のように求められる．

$$h_{t+1} = \left[\frac{\beta\varepsilon\{(1-\tau_t)\phi h_t + p - \varphi\}}{\gamma - \beta\varepsilon}\right]^{\varepsilon} h_t^{\delta} \tag{10}$$

(10)において，村田（2019, 2020）と同様，定常均衡の人的資本水準を $h_{t+1} = h_t = h_s$ とおくと，(11)の関係式が成り立つ．

$$(h_s)^{\frac{1-\delta}{\varepsilon}} = \frac{\beta\varepsilon}{\gamma - \beta\varepsilon}\{(1-\tau_t)\phi h_s + p - \varphi\} \tag{11}$$

(11)について，本稿では，左辺を LHS，右辺を RHS と定義する．(10)と(11)より，定常状態の近傍における dh_{t+1}/dh_t は，(12)のように導出される[13]．

[11] この仮定を置かなければ，最適な子どもの数がゼロもしくはマイナスとなるケースが生じてしまい，これは現実的に有り得ないためである．

[12] 児童手当による助成金が育児費用と同額もしくはそれを上回ることは，現実的に考えにくいためである．

[13] (12)の導出過程については，付録2を参照せよ．

$$\frac{\varepsilon(1-\tau_t)\phi h_s}{(1-\tau_t)\phi h_s + p - \varphi} + \delta \tag{12}$$

人的資本の定常均衡について，安定性条件は$0 < dh_{t+1}/dh_t < 1$である[14]．したがって，⒀が満たされれば，h_sは安定的な定常均衡である．

$$(\varepsilon+\delta-1)(1-\tau_t)\phi h_s < (1-\delta)(p-\varphi) \Rightarrow h_s < \frac{(1-\delta)(p-\varphi)}{(\varepsilon+\delta-1)(1-\tau_t)\phi} \tag{13}$$

一方，人的資本の定常均衡について，不安定性条件は$dh_{t+1}/dh_t > 1$である．したがって，⒁が満たされれば，h_sは不安定的な定常均衡である．

$$(\varepsilon+\delta-1)(1-\tau_t)\phi h_s > (1-\delta)(p-\varphi) \Rightarrow h_s > \frac{(1-\delta)(p-\varphi)}{(\varepsilon+\delta-1)(1-\tau_t)\phi} \tag{14}$$

以上を踏まえると，人的資本の定常均衡の存在性および安定性について，本稿モデルでは，以下の３つのケースに分類されることが分かる．

Ⅲ．1．定常状態が１つのみ存在するケース

本稿モデルでは，$\varepsilon+\delta>1$であるため，⑾より，このケースにおけるLHSとRHSは，図１のように描かれる．

---

14 ⑿より，人的資本関数が$dh_{t+1}/dh_t > 0$を満たしていることは明らかである．

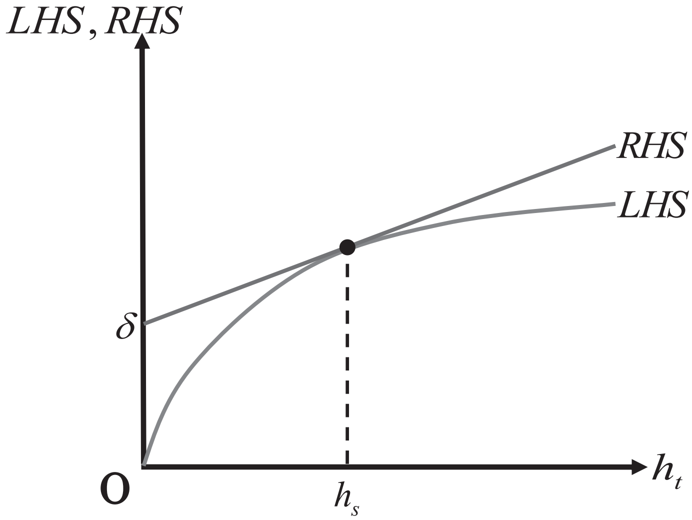

図１：人的資本の定常均衡（１つのみ存在するケース）

図１から分かるように，人的資本の定常均衡h_sにおいては，⑾におけるLHSとRHSの傾きが等しくなることから，h_sは⒂のように導出される[15].

$$h_s = \left\{ \frac{\beta\varepsilon^2 (1 - \tau_t)\phi}{(1-\delta)(\gamma - \beta\varepsilon)} \right\}^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon-\delta}} \tag{15}$$

⑴と⑽より，本稿モデルでは，人的資本関数は原点を通ることが明らかである．したがって，人的資本の定常均衡が１つのみ存在し，かつ安定的である場合，人的資本関数は図２のように描かれる[16].

[15] ⒂の導出過程については，付録３を参照せよ．
[16] 厳密に言えば，図２のケースでは，人的資本の定常均衡h_sは大域安定的である．

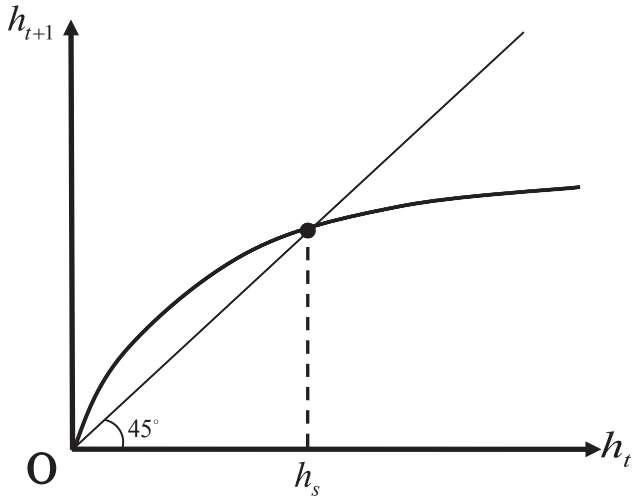

図２：人的資本関数（安定的な定常均衡が１つのみ存在するケース）

一方，人的資本の定常状態が１つのみ存在し，かつ不安定的である場合，人的資本関数は図３のように描かれる[17].

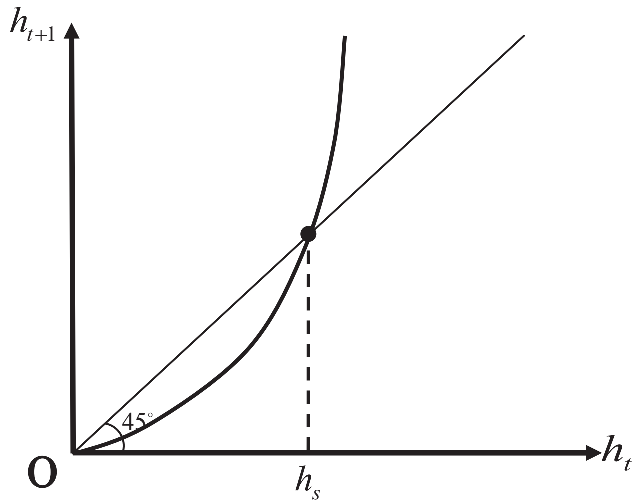

図３：人的資本関数（不安定的な定常均衡が１つのみ存在するケース）

[17] 厳密に言えば，図３のケースでは，人的資本の定常均衡 h_s は大域不安定的である．

人的資本の定常均衡は，図2のケースでは⒀，図3のケースでは⒁の条件をそれぞれ満たすことになる.

Ⅲ.２．定常状態が２つ存在するケース

このケースにおけるLHSとRHSは，図4のように描かれる.

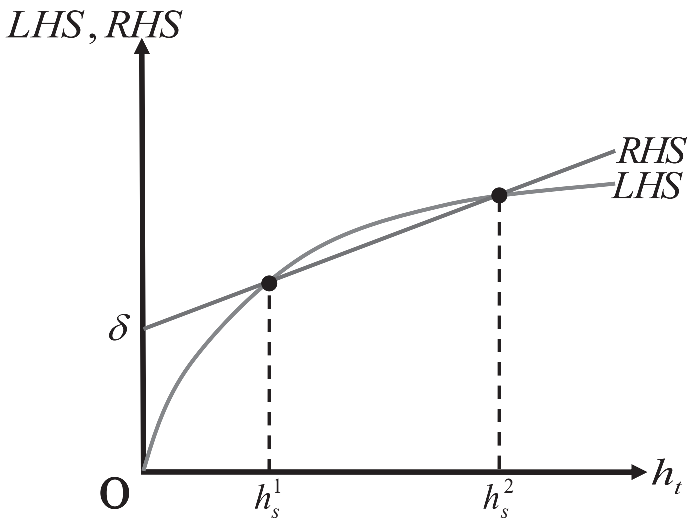

図４：人的資本の定常均衡（２つ存在するケース）

人的資本の定常状態が2つ存在するケースについて，本稿モデルでは，低い方の人的資本水準をh_s^1，高い方の人的資本水準をh_s^2とおく．Ⅲ．1でも述べたように，人的資本関数は原点を通ることが明らかであり，尚且つ⒀と⒁の条件と矛盾しないためには，このケースにおける人的資本関数は，図5のように描かれなければならない.

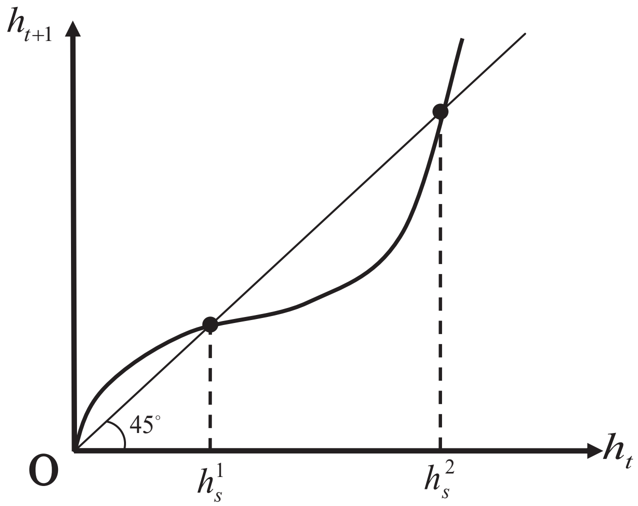

図５：人的資本関数（定常均衡が２つ存在するケース）

図５において，h_s^1は安定的な定常均衡であり，⒀の条件を満たすものである．一方，h_s^2は不安定的な定常均衡であり，⒁の条件を満たすものである．すなわち，村田(2020)と同様，本稿モデルにおいても，人的資本の定常均衡が２つ存在するケースでは，安定的な定常均衡と不安定的な定常均衡の組み合わせとなることが確認できる．ただし，人的資本の定常均衡の大小関係について，村田(2020)では，低い方が不安定的，高い方が安定的であるのに対し，本稿モデルでは，逆になることが分かる．

Ⅲ．３．定常状態が存在しないケース

このケースにおける LHS と RHS は，図６のように描かれる．

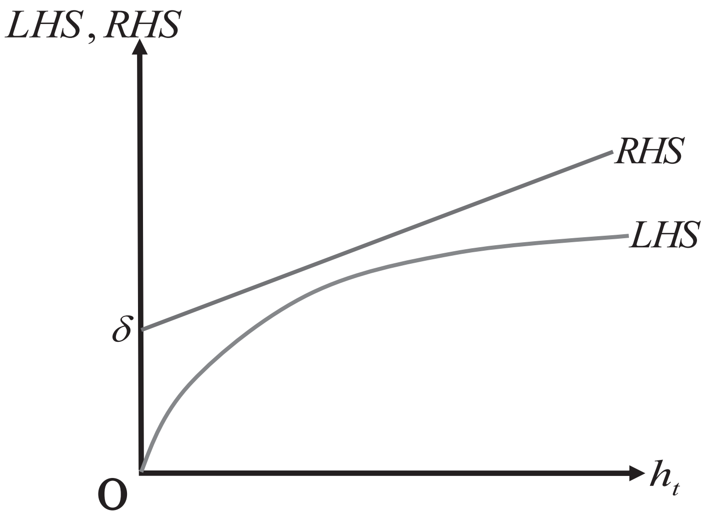

図６：人的資本の定常均衡（存在しないケース）

このケースにおける人的資本関数は，図７のように描かれなければならない．

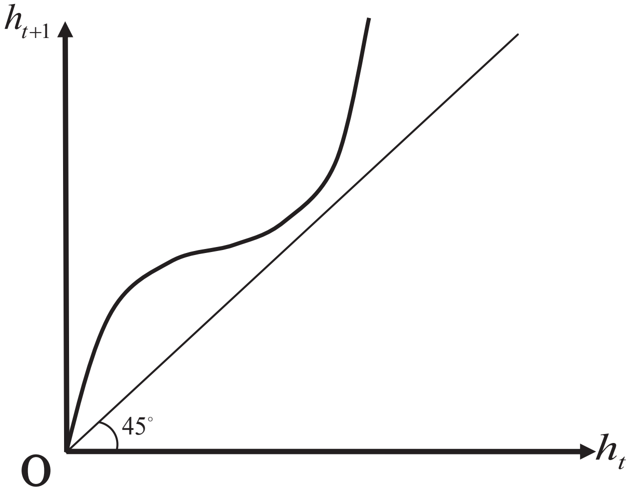

図７：人的資本関数（定常均衡が存在しないケース）

図７より，このケースでは，人的資本水準は発散していくことが確認できる．

V．結語

本稿では，村田（2019, 2020）における児童手当と人的資本蓄積に関する世代重複モデルにおいて，Groezen, Leers and Mejidam（2003）と同様，育児費用を新たに組み込んだ上で，村田（2019, 2020）と同様，人的資本の定常均衡が１つのみ存在するケース，２つ存在するケース，および人的資本の定常均衡が存在しないケースについて検討した．特に，人的資本の定常均衡が２つ存在するケースにおいて，安定的な定常均衡と不安定的な定常均衡の組み合わせになることは，村田（2020）と同様であるものの，人的資本の定常均衡の大小関係について，村田（2020）モデルでは，低い方が不安定的，高い方が安定的であるのに対し，本稿モデルでは逆になることを確認した．

本稿における分析について，今後の展望を述べる．本稿モデルでは，村田（2020）モデルに育児費用を新たに導入したものの，人的資本関数における影響力パラメータの条件が異なることから，分析結果について，村田（2020）との単純な比較は難しい．上述のように，人的資本の定常均衡が２つ存在するケースについて，定常均衡の大小関係の違いは興味深いが，人的資本関数における影響力パラメータの条件を揃えることができれば，両モデルの比較検討が可能となるであろう．また，本稿および村田（2019, 2020）モデルにおける人的資本関数は，育児費用が人的資本蓄積に影響を及ぼさない設定となっているが，近年の教育経済学において，幼児教育の重要性が取り上げられることから，教育支出に加えて，育児費用も影響を及ぼすような人的資本関数も検討する必要がある．これらの点については，稿を改めて論じたい．

参考文献

［１］Benabou, R. (1996) “Heterogeneity, Stratification, and Growth: Macroeconomics Implications of Community Structure and School Finance,” *The American Economic Review*, Vol.86, pp.584-609.

［２］Cardak, B.A. (2004a) “Education Choice, Endogenous Growth and Income Distribution,” *Economica*, Vol.71, pp.57-81.

［３］Cardak, B.A. (2004b) “Education Choice, Neoclassical Growth, and Class Structure,” *Oxford Economic Papers*, Vol.56, pp.643-666.

［４］Eckstein, Z. and I. Zilcha (1994) “The Effects of Compulsory Schooling on Growth, Income Distribution and Welfare,” *Journal of Public Economics*, Vol.54, pp.339-359.

［５］Glomm, G. and B. Ravikumar (1992) “Public versus Private Investment in Human Capital: Endogenous Growth and Income Inequality,” *Journal of Political Economy*, Vol.100, pp.818-834.

［６］Gradstein, M. and M. Justman (1997) “Democratic Choice of an Education System: Implications for Growth and Income Distribution," *Journal of Economic Growth*, Vol.2, pp.169-183.

[7] Groezen, B. van T. Leers and L. Mejidam (2003) "Social Security and Endogenous Fertility: Pension and Child Allowance as Siamese Twins," *Journal of Public Economics*, Vol.87, pp.233-251.

[8] Kaganovich, M. and I. Zilcha (1999) "Education, Social Security, and Growth," *Journal of Public Economics*, Vol.71, pp.289-309.

[9] Kato, H. (1999) "Overlapping Generations Model with Endogenous Population Growth," *Journal of Population Problems*, Vol.25, pp.15-24.

[10] Nishimura, K. and J. Zhang (1992) "Pay-As-You-Go Public Pensions with Endogenous Fertility," *Journal of Public Economics*, Vol.48, pp.239-258.

[11] Peter, W. (1995) "Public Pensions, Family Allowances and Endogenous Demographic Change," *Journal of Population Economics*, Vol.8, pp.161-181.

[12] Saint, Paul, G. and T. Verdier (1993) "Education, Democracy and Growth," *Journal of Development Economics*, Vol.42, pp.399-407.

[13] 内閣府「平成30年版少子化社会対策白書」
https://www8.cao.go.jp/shoushi/shoushika/whitepaper/measures/w-2018/30pdfgaiyoh/pdf/s1-1.pdf

[14] 村田 慶(2011)「教育選択と経済成長」『九州経済学会年報』第49集，pp.75-82.

[15] 村田 慶(2013)「教育選択と内生的経済成長―ゆとり教育による弊害と教育政策の有効性に関する考察―」,『経済政策ジャーナル』第10巻第2号，pp.3-15.

[16] 村田 慶(2017a)「効用関数と人的資本蓄積に関する一考察」『経済研究』(静岡大学) 21巻3号，pp.1-9.

[17] 村田 慶(2017b)「児童手当と人的資本蓄積に関する一考察」『経済研究』(静岡大学) 21巻4号，pp.31-38.

[18] 村田 慶(2019)「育児時間を組み込んだモデルにおける児童手当と人的資本の安定的な定常状態に関する一考察」『経済研究』(静岡大学) 24巻2号，pp.1-15.

[19] 村田 慶(2020)「育児時間を組み込んだモデルにおける児童手当と人的資本の定常状態の安定性に関する一考察」『経済研究』(静岡大学) 24巻3号，pp.1-13.

付録1

制約条件式を効用関数V^{t-1}におけるc_tに代入すると，次式のようになる．

$$V^{t-1}=\log\{(1-\tau_t)(1-\phi n_t)h_t-(p-\varphi)n_t-e_t n_t\}+\gamma\log n_t+\beta\log h_{t+1}$$
$$=\log\{(1-\tau_t)(1-\phi n_t)h_t-(p-\varphi)n_t-e_t n_t\}+\gamma\log n_t+\beta\varepsilon\log e_t+\beta\delta\log h_t$$

一階条件である $\partial V^{t-1}/\partial e_t=0$ より，

$$\frac{\partial V^{t-1}}{\partial e_t}=\frac{-n_t}{(1-\tau_t)(1-\phi n_t)h_t-(p-\varphi)n_t-e_t n_t}+\frac{\beta\varepsilon}{e_t}=0$$

上の式を変形して整理すると，$t-1$ 世代の各個人の t 期における最適教育支出は，（A1－1）のように求められる．

$$e_t n_t=\beta\varepsilon\{(1-\tau_t)(1-\phi n_t)h_t-(p-\varphi)n_t\}-\beta\varepsilon e_t n_t$$
$$(1+\beta\varepsilon)n_t e_t=\beta\varepsilon\{(1-\tau_t)(1-\phi n_t)h_t-(p-\phi)n_t\}$$
$$e_t=\frac{\beta\varepsilon\{(1-\tau_t)(1-\phi n_t)h_t-(p-\varphi)n_t\}}{(1+\beta\varepsilon)n_t} \qquad \text{（A1－1）}$$

また，$c_t=(1-\tau_t)(1-\phi n_t)h_t+(p-\varphi)n_t-e_t n_t$ より，$t-1$ 世代の各個人の t 期における最適消費は，次式のように求められる．

$$c_t=(1-\tau_t)(1-\phi n_t)h_t+(p-\varphi)n_t-\frac{\beta\varepsilon\{(1-\tau_t)(1-\phi n_t)h_t-(p-\varphi)n_t\}}{1+\beta\varepsilon}$$
$$=\frac{(1-\tau_t)(1-\phi n_t)h_t-(p-\varphi)n_t}{1+\beta\varepsilon} \qquad \text{（A1－2）}$$

（A1－1）および（A1－2）を効用関数に代入すると，次式のようになる．

$$
\begin{aligned}
V^{t-1} &= \log \frac{(1-\tau_t)(1-\phi n_t)h_t-(p-\varphi)n_t}{1+\beta\varepsilon}+\gamma\log n_t \\
&\quad +\beta\varepsilon\log\frac{\beta\varepsilon\{(1-\tau_t)(1-\phi n_t)h_t-(p-\varphi)n_t\}}{(1+\beta\varepsilon)n_t}+\beta\delta\log h_t \\
&= \log \frac{(1-\tau_t)(1-\phi n_t)h_t-(p-\varphi)n_t}{1+\beta\varepsilon}+\gamma\log n_t \\
&\quad +\beta\varepsilon\log\frac{\beta\varepsilon\{(1-\tau_t)(1-\phi n_t)h_t-(p-\varphi)n_t\}}{1+\beta\varepsilon}-\beta\varepsilon\log n_t+\beta\delta\log h_t
\end{aligned}
$$

一階条件である $\partial V^{t-1}/\partial n_t=0$ より，

$$
\frac{\partial V^{t-1}}{\partial n_t}=-\frac{(1-\tau_t)\phi h_t+p-\varphi}{(1-\tau_t)(1-\phi n_t)h_t-(p-\varphi)n_t}+\frac{\gamma}{n_t}-\frac{\beta\varepsilon\{(1-\tau_t)\phi h_t+p-\varphi\}}{(1-\tau_t)(1-\phi n_t)h_t-(p-\varphi)n_t}-\frac{\beta\varepsilon}{n_t}=0
$$

上の式を変形して整理すると，$t-1$世代の各個人のt期における最適な子どもの数は，次のように求められる．

$$
\begin{aligned}
-\frac{(1+\beta\varepsilon)\{(1-\tau_t)\phi h_t+p-\varphi\}}{(1-\tau_t)(1-\phi n_t)h_t-(p-\varphi)n_t}+\frac{\gamma-\beta\varepsilon}{n_t}&=0 \\
(1+\beta\varepsilon)\{(1-\tau_t)\phi h_t+p-\varphi\}n_t&=(\gamma-\beta\varepsilon)(1-\tau_t)h_t-(\gamma-\beta\varepsilon)\{(1-\tau_t)\phi h_t+p-\varphi\}n_t \\
(1+\gamma)\{(1-\tau_t)\phi h_t+p-\varphi\}n_t&=(\gamma-\beta\varepsilon)(1-\tau_t)h_t \\
n_t&=\frac{(\gamma-\beta\varepsilon)(1-\tau_t)h_t}{(1+\gamma)\{(1-\tau_t)\phi h_t+p-\varphi\}} \qquad \text{(A1−3)}
\end{aligned}
$$

（A1－3）を（A1－1）に代入することによって，$t-1$世代の各個人のt期における最適教育支出は，次のように求められる．

$$
\begin{aligned}
e_t &= \beta\varepsilon\left\{\frac{(1-\tau_t)h_t}{(1+\beta\varepsilon)n_t}-\frac{(1-\tau_t)\phi h_t}{1+\beta\varepsilon}-\frac{p-\varphi}{1+\beta\varepsilon}\right\}\\
&= \beta\varepsilon\left[\frac{(1-\tau_t)h_t}{1+\beta\varepsilon}\times\frac{(1+\gamma)\{(1-\tau_t)\phi h_t+p-\varphi\}}{(\gamma-\beta\varepsilon)(1-\tau_t)h_t}-\frac{(1-\tau_t)\phi h_t+p-\varphi}{1+\beta\varepsilon}\right]\\
&= \beta\varepsilon\left[\frac{(1+\gamma)\{(1-\tau_t)\phi h_t+p-\varphi\}}{(1+\beta\varepsilon)(\gamma-\beta\varepsilon)}-\frac{(1-\tau_t)\phi h_t+p-\varphi}{1+\beta\varepsilon}\right]\\
&= \frac{\beta\varepsilon\{(1-\tau_t)\phi h_t+p-\varphi\}}{\gamma-\beta\varepsilon}
\end{aligned}
$$

（A1－3）を（A1－2）に代入することによって，$t-1$世代の各個人のt期における最適消費は，次のように求められる．

$$
\begin{aligned}
c_t &= \frac{(1-\tau_t)h_t}{1+\beta\varepsilon}-\frac{(1-\tau_t)\phi n_t h_t}{1+\beta\varepsilon}-\frac{(p-\varphi)n_t}{1+\beta\varepsilon}\\
&= \frac{(1-\tau_t)h_t}{1+\beta\varepsilon}-\frac{(1-\tau_t)\phi h_t+p-\varphi}{1+\beta\varepsilon}\times\frac{(\gamma-\beta\varepsilon)(1-\tau_t)h_t}{(1+\gamma)\{(1-\tau_t)\phi h_t+p-\varphi\}}\\
&= \frac{(1-\tau_t)h_t}{1+\beta\varepsilon}-\frac{(\gamma-\beta\varepsilon)(1-\tau_t)h_t}{(1+\gamma)(1+\beta\varepsilon)}\\
&= \frac{(1-\tau_t)h_t}{1+\gamma}
\end{aligned}
$$

付録２

⑽より，dh_{t+1}/dh_tは次のように求められる．

$$
\frac{dh_{t+1}}{dh_t}=\varepsilon\left[\frac{\beta\varepsilon\{(1-\tau_t)\phi h_t+p-\varphi\}}{\gamma-\beta\varepsilon}\right]^{\varepsilon-1}\frac{\beta\varepsilon(1-\tau_t)\phi h_t^{\delta}}{\gamma-\beta\varepsilon}+\delta\left[\frac{\beta\varepsilon\{(1-\tau_t)\phi h_t+p-\varphi\}}{\gamma-\beta\varepsilon}\right]^{\varepsilon}(h_t)^{\delta-1} \qquad \text{(A2－1)}
$$

さらに，⑾より，次式が得られる．

$$\left(h_s\right)^{\delta-1}=\left[\frac{\gamma-\beta\varepsilon}{\beta\varepsilon\left\{\left(1-\tau_t\right)\phi h_t+p-\varphi\right\}}\right]^{\varepsilon} \tag{A2−2}$$

（A2－2）を（A2－1）に代入することによって，定常均衡の近傍におけるdh_{t+1}/dh_tは，次のように導出される．

$$\begin{aligned}\left.\frac{dh_{t+1}}{dh_t}\right|_{h_t=h_s}&=\varepsilon\left[\frac{\beta\varepsilon\left\{\left(1-\tau_t\right)\phi h_s+p-\varphi\right\}}{\gamma-\beta\varepsilon}\right]^{\varepsilon-1}\frac{\beta\varepsilon\left(1-\tau_t\right)\phi}{\gamma-\beta\varepsilon}\times\left[\frac{\gamma-\beta\varepsilon}{\beta\varepsilon\left\{\left(1-\tau_t\right)\phi h_s+p-\varphi\right\}}\right]^{\varepsilon}h_s\\&\quad+\delta\left[\frac{\beta\varepsilon\left\{\left(1-\tau_t\right)\phi h_s+p-\varphi\right\}}{\gamma-\beta\varepsilon}\right]^{\varepsilon}\times\left[\frac{\gamma-\beta\varepsilon}{\beta\varepsilon\left\{\left(1-\tau_t\right)\phi h_s+p-\varphi\right\}}\right]^{\varepsilon}\\&=\frac{\varepsilon\left(\gamma-\beta\varepsilon\right)}{\beta\varepsilon\left\{\left(1-\tau_t\right)\phi h_s+p-\varphi\right\}}\times\frac{\beta\varepsilon\left(1-\tau_t\right)\phi h_s}{\gamma-\beta\varepsilon}+\delta\\&=\frac{\varepsilon\left(1-\tau_t\right)\phi h_s}{\left(1-\tau_t\right)\phi h_s+p-\varphi}+\delta\end{aligned}$$

付録３

定常均衡の人的資本水準を$h_{t+1}=h_t=h_s$としており，図１において，横軸にh_tをとっていることから，⑾は次式のように書き換えられる．

$$\left(h_t\right)^{\frac{1-\delta}{\varepsilon}}=\frac{\beta\varepsilon}{\gamma-\beta\varepsilon}\left\{\left(1-\tau_t\right)\phi h_t+p-\varphi\right\} \tag{A3−1}$$

（A3－1）において，LHSとRHSの傾きはそれぞれ，（A3－2）と（A3－3）のように導出される．

$$\frac{dLHS}{dh_t} = \frac{(1-\delta)(h_t)^{\frac{1-\varepsilon-\delta}{\varepsilon}}}{\varepsilon} \qquad \text{(A3－2)}$$

$$\frac{dRHS}{dh_t} = \frac{\beta\varepsilon(1-\tau_t)\phi}{\gamma-\beta\varepsilon} \qquad \text{(A3－3)}$$

（A3－2）と（A3－3）より，定常均衡の人的資本水準は，次のように導出される．

$$\frac{(1-\delta)(h_t)^{\frac{1-\varepsilon-\delta}{\varepsilon}}}{\varepsilon} = \frac{\beta\varepsilon(1-\tau_t)\phi}{\gamma-\beta\varepsilon}$$

$$(h_t)^{\frac{1-\varepsilon-\delta}{\varepsilon}} = \frac{\beta\varepsilon^2(1-\tau_t)\phi}{(1-\delta)(\gamma-\beta\varepsilon)}$$

$$h_s = \left\{\frac{\beta\varepsilon^2(1-\tau_t)\phi}{(1-\delta)(\gamma-\beta\varepsilon)}\right\}^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon-\delta}}$$