

定常温度場における偏心および傾斜き裂を 有する直交異方性長方形板*

中西 博**, 谷 周一***
Hiroshi NAKANISHI, Shuichi TANI
鈴木 恵**, 須見 尚文****
Megumu SUZUKI, Naobumi SUMI

Key Words: Elasticity Thermal Stress, Stress Intensity Factor, Orthotropic, Rectangular Plate, Eccentric Crack, Inclined Crack

1. 緒 言

異方性板における応力拡大係数は、き裂長さ以外に関係する寸法を持たない無限板においては、等方性板の場合と同じ値になるが、有限板においては両者は異なった値を取る。著者ら⁽¹⁾は、以前に、縁き裂および内部き裂（偏心および傾斜）を有する直交異方性長方形板に力学的荷荷が作用する場合の応力拡大係数を求め、その形状および材料定数依存性を調べた。また、著者の一人⁽²⁾は、中央き裂を有する直交異方性長方形板に熱荷荷が作用する場合の応力拡大係数を求めた。

本論文では、偏心き裂および中央傾斜き裂を有する直交異方性長方形板に熱荷荷が作用する場合の応力拡大係数を求め、その形状および材料定数依存性を明らかにする。温度境界条件としては、(i)き裂上と外周長方形境界上で一定温度差を与えた場合と、(ii)き裂および側面で断熱とし、上、下端に温度差を与えた場合の定常問題を取扱う。

解析は、等角写像を用いた複素応力関数により行い、き裂上の境界条件は解析接続法により恒等的に満足させる。また長方形外周の境界条件は、選点法により最小二乗法で満足させる。

2. 基礎方程式と解法

座標軸が異方性の軸と一致する場合、二次元定常熱伝導方程式は

$$k_{11} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_{22} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

* 昭和58年3月19日 関西支部第58期定時総会講演会において講演。原稿受付 昭和59年3月15日。
** 正員、京都工芸繊維大学工学部 (〒606 京都市左京区松ヶ崎御所海道町)。
*** 学生員、三菱電機(株)中央研究所 (〒661 尼崎市塚口本町8-1-1)。
**** 正員、静岡大学教育学部 (〒422 静岡市大谷836)。

であり、また、Airy の応力関数 U に関する適合条件式は

$$a_{11} \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} + (2a_{12} + a_{66}) \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + a_{22} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + b_{11} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + b_{22} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

となる⁽³⁾。ただし、 k_{ii} は熱伝導率、 b_{ii} は線熱膨張係数であり、 a_{ij} は $\sigma_x = \sigma_1, \sigma_y = \sigma_2, \sigma_{xy} = \sigma_6$ などとしたときの弾性コンプライアンスである。式(1)の一般解は

$$T(x, y) = 2R_e [t(z_3)] \quad \dots\dots\dots (3)$$

と表される。ただし、

$$z_3 = x + \mu_3 y, \quad \mu_3 = i \sqrt{k_{11}/k_{22}} \quad \dots\dots\dots (4)$$

式(3)、(4)と基本的には同じ式が Chen⁽⁴⁾、須見⁽²⁾により、異なった形で用いられている。また、式(2)の解は、一般解⁽⁵⁾に特解を加えて

$$U(x, y) = 2R_e \left[U_1(z_1) + U_2(z_2) - \frac{S}{R} \iint t(z_3) dz_3 dz_3 \right] \quad \dots\dots\dots (5)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} z_j &= x + \mu_j y \quad (j=1, 2) \\ R &= a_{11} \mu_3^4 + (2a_{12} + a_{66}) \mu_3^2 + a_{22} \\ S &= b_{11} \mu_3^2 + b_{22} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

であり、 μ_j は実根を持たない特性方程式⁽⁵⁾

$$a_{11} \mu^4 + (2a_{12} + a_{66}) \mu^2 + a_{22} = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

の互いに共役でない複素根である。 μ_j が純虚数 $i\beta_j$ のとき、平面応力状態では、工学的材料定数と次のような関係になる。

$$\beta_1^2 \beta_2^2 = E_1/E_2, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 = E_1/G_{12} - 2\nu_{12} \quad \dots\dots\dots (8)$$

さて、写像

$$z_j = \omega(\zeta_j) = (\zeta_j + \zeta_j^{-1})L/2, \quad (j=1, 2, 3) \quad \dots\dots\dots (9)$$

により、 ζ_j 面における原点を中心とする単位円とその外側の領域が、 z_j 面における $z_j = -L$ から L までのき裂とその外側の領域に写像される。ここで、 ζ_j 面の単位円の外で定義される式(5)の右辺の関数形を次のように表す。

$$\phi_j(\zeta_j) = \frac{dU_j(z_j)}{dz_j}, \quad \tau(\zeta_3) = t(z_3), \quad \Theta(\zeta_3) = -\frac{S}{R} \int t(z_3) dz_3 \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここで、 ϕ_1, Θ の定義域を単位円の内側まで広げ、 $\phi_2(\zeta_2)$ を単位円の内側で

$$\phi_2(\zeta_2) = \frac{\mu_1 - \bar{\mu}_2}{\bar{\mu}_2 - \mu_2} \phi_1(\zeta_2) + \frac{\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2}{\bar{\mu}_2 - \mu_2} \bar{\phi}_1\left(\frac{1}{\zeta_2}\right) + \frac{\mu_3 - \bar{\mu}_2}{\bar{\mu}_2 - \mu_2} \Theta(\zeta_2) + \frac{\bar{\mu}_3 - \bar{\mu}_2}{\bar{\mu}_2 - \mu_2} \bar{\Theta}\left(\frac{1}{\zeta_2}\right) \quad \dots\dots\dots (11)$$

のように表すとする。そのとき、き裂面上の無負荷の条件が恒等的に満足される。

式(10)の $\tau(\zeta_3)$ は、式(3)よりその実部が一価関数であることから、次の一般形で表される。

$$\tau(\zeta_3) = Q \log \zeta_3 + \tau^*(\zeta_3) \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここで Q は実数であり、 $\tau^*(\zeta_3)$ は単位円の外の有限領域で正則な関数である。 $\tau^*(\zeta_3)$ をローラン級数に展開すると、

$$\tau(\zeta_3) = Q \log \zeta_3 + \sum_{n=2}^{\infty} d_n \zeta_3^n \quad \dots\dots\dots (13)$$

き裂面上での条件は、一定温度 T_1 である場合

$$d_0 + \bar{d}_0 = T_1, \quad d_n = -\bar{d}_{-n} \quad \dots\dots\dots (14)$$

また断熱されている場合

$$Q = 0, \quad d_n = \bar{d}_{-n} \quad \dots\dots\dots (15)$$

と置くことにより満足される。式(13), (10), (9)より

$$\Theta(\zeta_3) = -\frac{SL}{2R} \left[Q \{ (\zeta_3 + \zeta_3^{-1}) \log \zeta_3 - (\zeta_3 - \zeta_3^{-1}) \} + (d_{-1} - d_1) \log \zeta_3 + d_0 (\zeta_3 + \zeta_3^{-1}) + \frac{d_1}{2} \zeta_3^2 + \frac{d_{-1}}{2} \zeta_3^{-2} + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ d_n \left(\frac{\zeta_3^{n+1}}{n+1} - \frac{\zeta_3^{n-1}}{n-1} \right) + d_{-n} \left(\frac{\zeta_3^{-n-1}}{n+1} - \frac{\zeta_3^{-n+1}}{n-1} \right) \right\} \right] \quad \dots\dots\dots (16)$$

次に、 $\phi_1(\zeta_1)$ は式(5), (10), (11), (16)と応力、変位の一価の条件より、次の形で表される。

$$\phi_1(\zeta_1) = \frac{SL}{R} \left[V (\zeta_1 + \zeta_1^{-1}) \log \zeta_1 + W \log \zeta_1 + \sum_{n=2}^{\infty} c_n \zeta_1^n \right] \quad \dots\dots\dots (17)$$

ただし、

$$V = \mu_3 Q \{ [\mu_3^2 + \mu_2 \bar{\mu}_2 + \bar{\mu}_1 (\mu_2 + \bar{\mu}_2)] b_{22}/b_{11} + \mu_1 (\mu_2 \mu_3^2 - \bar{\mu}_1 \mu_2 \bar{\mu}_2) \} / \{ (\mu_1 - \bar{\mu}_1) (\mu_1 - \mu_2) (\mu_1 - \bar{\mu}_2) (\mu_3^2 + b_{22}/b_{11}) \}$$

$$W = \{ (d_{-1} - d_1) (\mu_3 - \bar{\mu}_1) (\mu_3 - \mu_2) (\mu_3 - \bar{\mu}_2) (b_{22}/b_{11} + \mu_1 \mu_3) + (\bar{d}_{-1} - \bar{d}_1) (\mu_3 + \bar{\mu}_1) (\mu_3 + \mu_2) (\mu_3 + \bar{\mu}_2) \times (b_{22}/b_{11} - \mu_1 \mu_3) \} / \{ 2(\mu_1 - \bar{\mu}_1) (\mu_1 - \mu_2) (\mu_1 - \bar{\mu}_2) (\mu_3^2 + b_{22}/b_{11}) \} \quad \dots\dots\dots (18)$$

式(13), (17), (11)は、式(14)または(15)のもとで、き裂面上の熱的および力学的条件を恒等的に満足するものである。未知係数 c_n, d_n は外側境界の条件に従って決定されるが、ここで扱っているような境界形状に対してその条件を恒等的に満足する解を見出すのは困難であり、なんらかの数値計算が必要である。ここでは境界選点法を採用し、境界条件を最小二乗法で満足

させて c_n, d_n を決定することにする。

前述の方法で応力関数が決定されると、 $z = \pm L$ における応力拡大係数は次式により求められる。

$$K_I = 2\sqrt{\pi/L} R_e [\phi_1'(\pm 1) + \phi_2'(\pm 1) + \Theta'(\pm 1)]$$

$$K_{II} = -2\sqrt{\pi/L} R_e [\mu_1 \phi_1'(\pm 1) + \mu_2 \phi_2'(\pm 1) + \mu_3 \Theta'(\pm 1)] \quad \dots\dots\dots (19)$$

3. 計算結果

前章で述べた方法により、偏心き裂および傾斜き裂を持つ長方形板の応力拡大係数を求め、その形状ならびに材料定数依在性を検討する。形状依存性は、材料定数を表1のように与え、偏心量、傾斜角、き裂長さ、板の長さとの比を変化させて調べる。この表1は著者の一人⁽²⁾が用いたものと同じであり、材料Iは、平

表1 材料定数

Material	Elastic coefficients			Thermal expansion coefficient	Thermal conductivity
	a_{12}/a_{11}	a_{22}/a_{11}	a_{44}/a_{11}	b_{22}/b_{11}	k_{32}/k_{11}
I	-0.3	1	2.6	1	1
II	-0.3	1	5.2	1	1
III	-0.3	0.5	2.6	1	1
IV	-0.3	1	2.6	0.5	1
V	-0.3	1	2.6	1	0.5

面応力状態でのポアソン比0.3の等方性材料に対応しているが、数値計算の都合上、 a_{33}/a_{11} および k_{22}/k_{11} の値は0.1%大きく取って計算している。また、応力拡大係数の材料定数依存性は、 k_{22}/k_{11} , b_{22}/b_{11} , $\mu_2 = i\beta_2$ のそれぞれを変化させて調べる。その際、 μ_1 は等方性の場合の $\sqrt{-1}$ とし、他の二つのパラメータも等方性の場合の1ないし $\sqrt{-1}$ を与える。

3・1 偏心き裂を有する長方形板 (図1)

3・1・1 き裂一定温度問題 温度が、き裂上で T_1 、外周境界上で T_2 の一定温度に保たれる場合を考える。式(13)と(14)および x 軸に関する対称性より

$$\tau(\zeta_3) = \frac{T_1}{2} + Q \log \zeta_3 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n (\zeta_3^n - \zeta_3^{-n}) \dots\dots\dots (20)$$

ただし d_n は実数である。また、式(17)の係数 c_n は実数となる。応力拡大係数は、無次元化した形

$$K_I^* = K_I / \{(T_2 - T_1)\sqrt{W} b_{11}/a_{11}\} \dots\dots\dots (21)$$

で示す。 $H/W=1$, $L/W=0.3$ の場合の K_I^* と偏心量 e/W の関係を図2に示す。側面に近いき裂端 A での応力拡大係数 K_{IA}^* は偏心量が増すにつれて減少する。

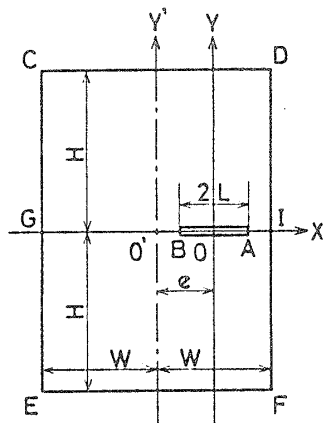


図1 偏心き裂を有する長方形板

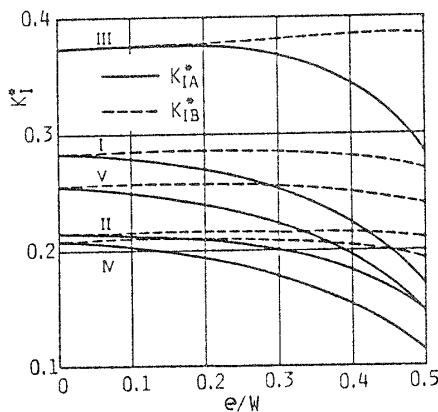


図2 偏心量と応力拡大係数

一方、 K_{IB}^* は一度わずかに増加し、その後減少するが、その変化は K_{IA}^* に比して小さい。図示していないが、 $H/W=2$ の場合、 K_{IA}^* , K_{IB}^* の傾向は図2と同様であるがより極端に現れ、 $H/W=0.5$ の場合は K_{IA}^* , K_{IB}^* ともに e/W が大になるにつれ増加する。材料I~Vの間で傾向にそれほどの差異は認められないが、材料IIの K_I^* の減少が他の材料に比して小さくでている。 $H/W=1$, $e/W=0.3$ の場合の、き裂長さの変化に伴う K_I^* の変化を図3に示す。 K_{IA}^* は一度増加し、その後減少するのに対し、 K_{IB}^* はこの図の範囲内では単調に増

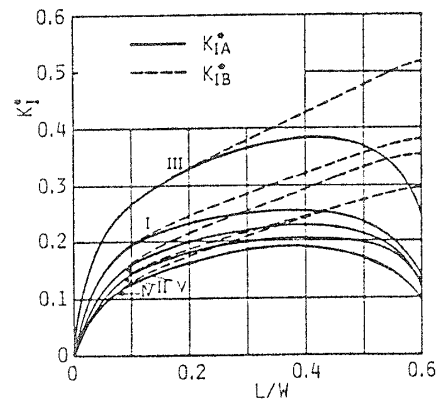


図3 き裂長さと応力拡大係数

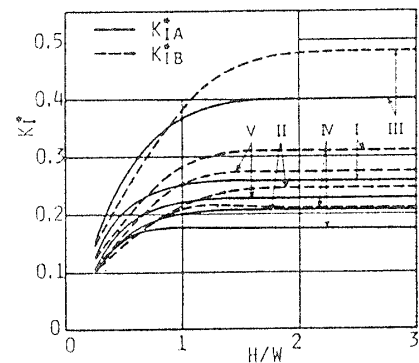


図4 板の長さと応力拡大係数

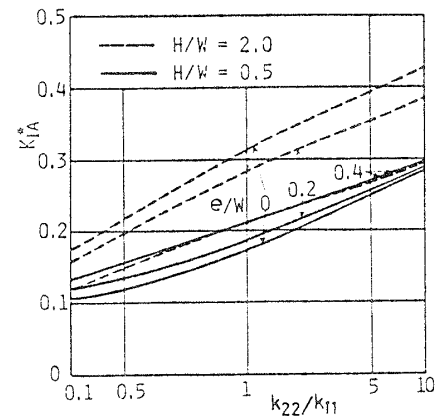


図5 熱伝導率の異方性と応力拡大係数

加する。この図においても、材料IIは他と少し異なった傾向を示している。図4に、 $e/W=0.3, L/W=0.3$ の場合における長方形板の細長比 H/W と K_{II}^* の関係を示す。 K_{II}^A, K_{II}^B ともに、 H/W が大きなるにつれて増加し、 H/W が1.5~2.0以上で一定値になる。 K_{II}^A と K_{II}^B の大小関係が、 H/W が1より小さい所で逆転している。図5は $L/W=0.3$ の場合において、二つの方向の熱伝導率の比と K_{II}^* の関係を、横軸を対数目盛に取り示したものである。図示した偏心量、板長さのいずれのパラメータにおいても $k_{22}/k_{11}=0.1, 10$ では等方性に対して約50%の減少ないし増加を示している。なお、異方性とは無関係であるが、偏心によりき裂端が板の自由側面に近づくとき、 K_{II}^* は、 H/W が2では小さくなるのに対して、0.5では大きくなっている。同様に、線膨張係数の異方性と K_{II}^* の関係を図6に示す。この場合、 b_{22}/b_{11} が小さい所では異方性は K_{II}^* にあまり影響を及ぼさないが、大きい所では非常に大きく影響し、 $b_{22}/b_{11}=10$ では、 K_{II}^* は等方性の場合の4~7倍になる。また、 K_{II}^* と β_2^2 の関係を図7に示す。ここでは $\beta_1=1$ としてあり、式(8)の第1式から

わかるように、平面応力状態において、 β_2^2 は縦弾性係数の比 E_1/E_2 を与える。 K_{II}^* は β_2^2 が小さい所で著しく増加し、 $\beta_2^2=0.1$ では等方性の場合の2.5~4倍になる。

3.1.2 き裂断熱問題 図1において、き裂面および側面 DF, CE が断熱されており、上下端 CD, EF がそれぞれ $T=T_0, -T_0$ の一定温度に保たれているとする。式(13)と(15)および x 軸に関する対称性より

$$r(\xi_3) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n (\xi_3^n - \xi_3^{-n}) \dots\dots\dots (22)$$

ただし d_n は純虚数である。また、式(17)において、 $W=0$ となり、 c_n は純虚数となる。この場合の応力拡大係数の無次元化は次の形を取ることにする。

$$K_{II}^* = K_{II} / \{ (T_0/H) W^{3/2} (b_{11}/a_{11}) \} \dots\dots\dots (23)$$

$H/W=1, L/W=0.3$ の場合の偏心量と K_{II}^* の関係を図8に示す。側面に近いき裂端での応力拡大係数 K_{II}^A は偏心量とともに増加し、他のき裂端の K_{II}^B は減少する。前項の図2と比較すると、この傾向は逆であり、また材料IVとVの K_{II}^* の大ききの順序が逆転している。 $H/W=1, e/W=0.3$ の場合のき裂長さ L/W と K_{II}^* の関係を図9に示す。 K_{II}^A, K_{II}^B は L/W とともに増加し、特に K_{II}^A の増加が著しい。 $e/W=0.3, L/W=0.3$ の場合の板の細長比と K_{II}^* の関係を図10に示す。 K_{II}^A, K_{II}^B ともに、 H/W が大きくなると増加し、 $H/W=1$

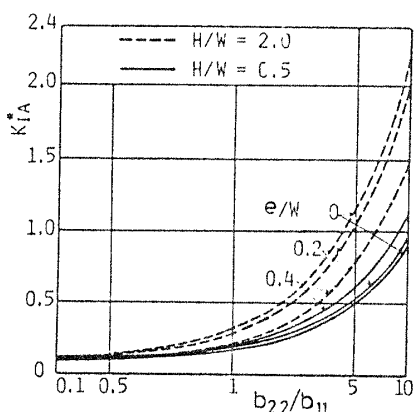


図6 線膨張係数の異方性と応力拡大係数

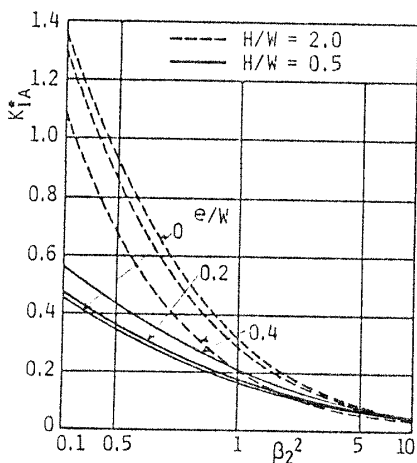


図7 弾性係数の異方性と応力拡大係数

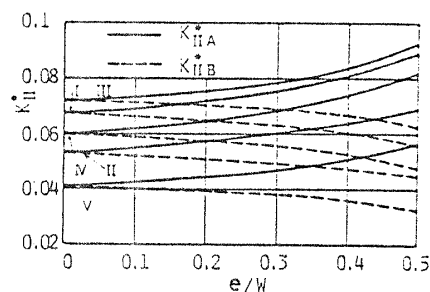


図8 偏心量と応力拡大係数

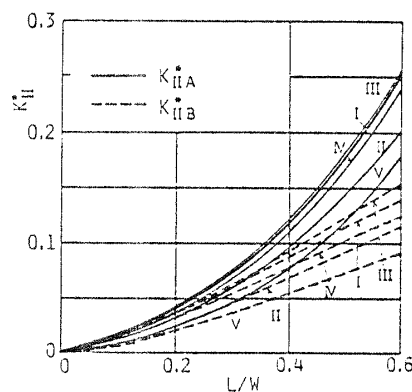


図9 き裂長さ L/W と応力拡大係数

~2で一定値に達する。H/W が小さい所では K_{IIA}^* と K_{IIB}^* の差および材料間の差異は小さく、H/W が大になるとそれらが大きくなる。図 11 は、 $L/W=0.3$ の場合において、 k_{22}/k_{11} の K_{IIA}^* への影響を示したものである。 k_{22}/k_{11} が大きい所で、また H/W が大なる場合にその影響が大であり、H/W=2 で $k_{22}/k_{11}=10$ の場合、等方性の場合の 4 倍ほどになる。図 12 は線膨張係数比と K_{IIA}^* の関係を示す。 b_{22}/b_{11} が大きい所で K_{IIA}^* は大きく変化するが、偏心の影響は b_{22}/b_{11} が小さい所で顕著である。また、図 13 に示すように、 K_{IIA}^* は β_2^2 の減少に伴い増加するが、き裂一定温度の図 7 ほど急

激ではない。

3・2 中央傾斜き裂を有する長方形板 (図 14)

き裂線は異方性の一つの軸、x 軸と一致しているとす。境界条件は、き裂一定温度問題、き裂断熱問題のそれぞれについて偏心き裂の場合と同じであり、応力拡大係数の無次元化は、各問題に対して式(21)、式(23)に従う。

3・2・1 き裂一定温度問題 式(13)は、式(14)と原点に関する対称性より次式となる。

$$\tau(\zeta_3) = \frac{T_1}{2} + Q \log \zeta_3 + \sum_{n=1}^{\infty} (d_{2n} \zeta_3^{2n} - \bar{d}_{2n} \zeta_3^{-2n}) \dots\dots\dots(24)$$

また、式(17)において $c_{2n}=0$ である。この場合、き裂端 A と B で応力拡大係数は等しくなる。き裂傾斜角と式(21)の形で無次元化した応力拡大係数の関係を $L/W=0.3$ の場合について図 15 に示す。H/W=1 の場合、境界条件の対称性より、 K_I^* は $\alpha=45^\circ$ に関して対称になり、その角度で材料 III は極大、ほかは極小となる。H/W=2 の場合は、 α の増加とともに K_I^* は減少する。H/W=1 における K_{II}^* は K_I^* より 2 オードグ小

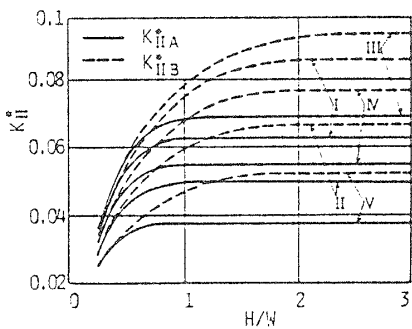


図 10 板の長さ と 応力拡大係数

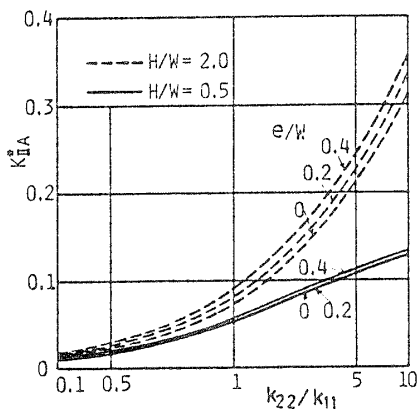


図 11 熱伝導率の異方性と 応力拡大係数

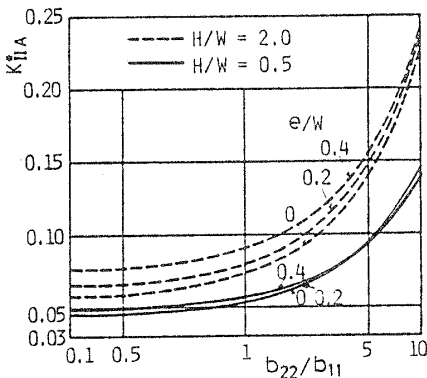


図 12 線膨張係数の異方性と 応力拡大係数

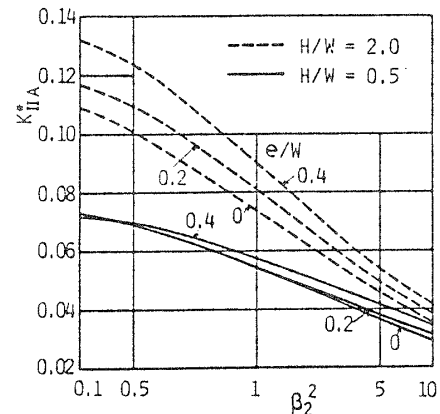


図 13 弾性係数の異方性と 応力拡大係数

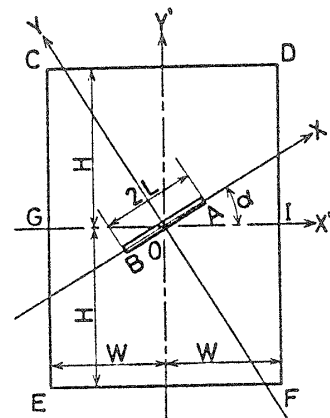


図 14 傾斜き裂を有する長方形板

さく、 $\alpha=45^\circ$ に関して反対称になるが材料IIIのみ他のものと符号が異なる。なお、図示していないが、 $H/W=0.5$ の場合、 K_I^* は α とともに増加し、 K_{II}^* は $H/W=2$ の場合と符号が異なる。 $H/W=2, \alpha=30^\circ$ の場合のき裂長さ L と K_I^*, K_{II}^* の関係を図 16 に示す。 K_I^*, K_{II}^* はき裂長さとともに単調に増加する。図 17 は $\alpha=30^\circ, L/W=0.3$ の場合の板の細長比と K_I^*, K_{II}^* の関係を示す。 K_I^*, K_{II}^* ともに H/W が大きくなるにつれ増

加し、 $H/W=1.5\sim 2.0$ で一定値となる。 K_{II}^* は、 $H/W=1$ の付近で材料間での大きさの順序が変化する。 K_I^*, K_{II}^* の熱伝導率異方性への依存性を、 $L/W=0.3$

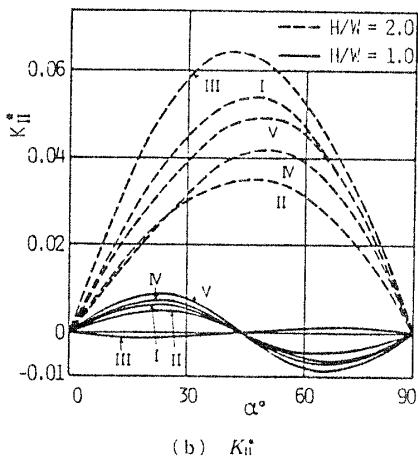
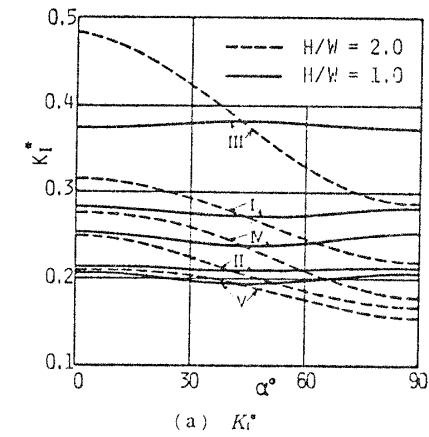


図 15 き裂傾斜角と応力拡大係数

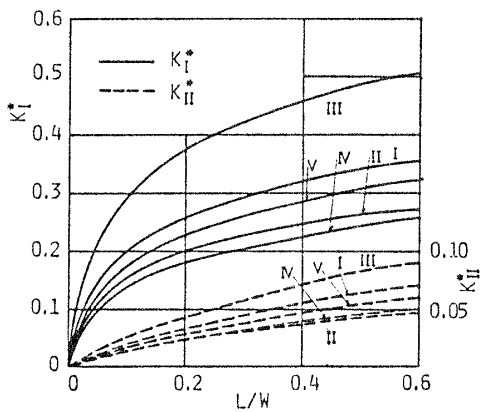


図 16 き裂長さ L と応力拡大係数

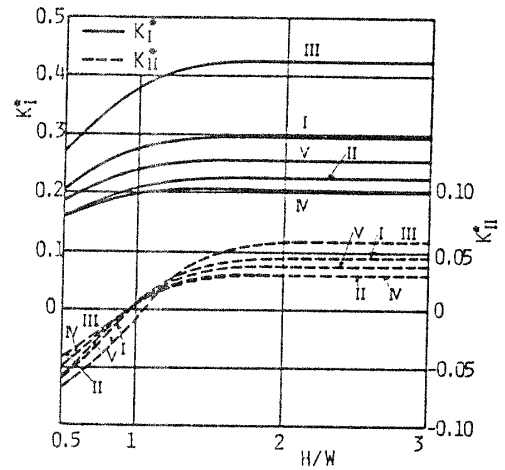


図 17 板の長さ H と応力拡大係数

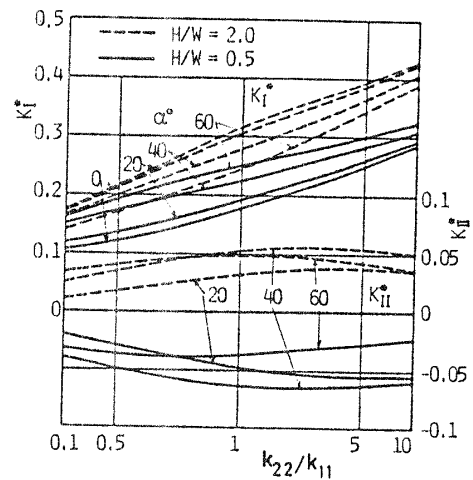


図 18 熱伝導率の異方性と応力拡大係数

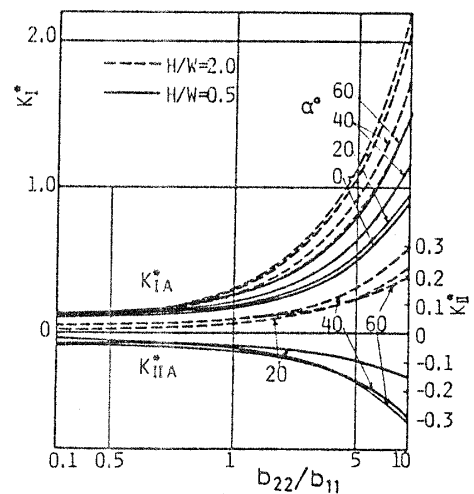


図 19 線膨張係数の異方性と応力拡大係数

の場合について図 18 に示す。\$K_{II}^*\$ の変化は \$K_I^*\$ の変化に比して小さい。\$K_I^*\$ は \$k_{22}/k_{11}\$ の増加とともに大きくなるが、き裂傾斜の影響は小さくなる。図 19 は \$K_I^*\$, \$K_{II}^*\$ の線膨張係数異方性による変化を、\$L/W=0.3\$ の場合について示したものである。\$b_{22}/b_{11}\$ が小さい所ではその影響は比較的小さく、またき裂傾斜の影響も小さい。\$b_{22}/b_{11}\$ が大きくなると、\$K_I^*\$ が急激に増大し、傾斜角度による \$K_I^*\$ の差異も大きくなる。また図 20 に示すように、\$K_I^*\$ は \$\beta_2^2\$ の小さい所で急激に増大する。

3・2・2 き裂断熱問題 式(15)と温度場の原点に関する反対称性より、式(13)は次式となる。

$$\tau(\zeta_3) = \sum_{n=1}^{\infty} (d_{2n-1} \zeta_3^{2n-1} + \bar{d}_{2n-1} \zeta_3^{-2n-1}) \dots \dots (25)$$

また式(17)において、\$V=0, c_{2n+1}=0\$ となる。応力の原点に関する反対称性より、き裂端 A と B で応力拡大係数は大きさが同じで符号が逆になる。計算結果はき裂端 A について示す。\$K_{IA}^*\$, \$K_{IIA}^*\$ のき裂傾斜角度依存性を図 21 に示す。き裂の傾斜により \$K_I^*\$ が現れ、その

絶対値は \$\alpha\$ の増加とともに一度増加し、その後減少する。一方、\$K_{IIA}^*\$ は \$\alpha\$ とともに単調に減少する。ところで、この問題の場合、上述のようにき裂端 A, B のいずれかの \$K_{II}\$ が負になり、き裂面のオーバラップが生じると考えられるが、本解析ではそれに対応する物理的条件を与えていない。\$H/W=2\$ において、材料 I の \$K_{IIA}^*\$ が最小となる付近 \$\alpha=35^\circ\$ の場合のき裂面の変形の計算結果を図 22 に示す。ただし、変形の大きさは、図が見やすいように与えている。図 22 を見ると、中央部ではき裂の下面が上面より上に出ているが、×印を付したき裂先端の近傍では、\$K_{II}\$ の存在により、そのようなことは生じていない。したがって、き裂を線と考える数学上はこの解析は無効であるが、現実的には意味があると考えられる。\$\alpha=30^\circ\$ の場合について、\$K_{IIA}^*\$, \$K_{IIA}^*\$ のき裂長さ依存性を図 23 に示す。いずれの場合も \$K_{IIA}^*\$ および \$K_{IIA}^*\$ の絶対値は \$L/W\$ とともに増加し、また材料間における傾向の相違は認められない。\$\alpha=30^\circ, L/W=0.3\$ として、\$K_{IA}^*\$, \$K_{IIA}^*\$ の板長さ依存性を

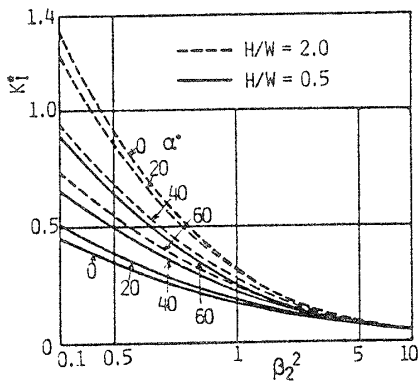


図 20 弾性係数の異方性と応力拡大係数

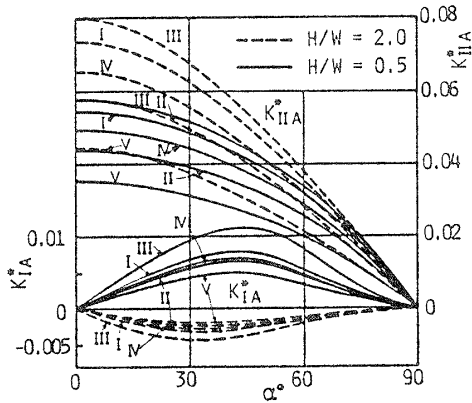


図 21 き裂傾斜角と応力拡大係数



図 22 き裂面の変形

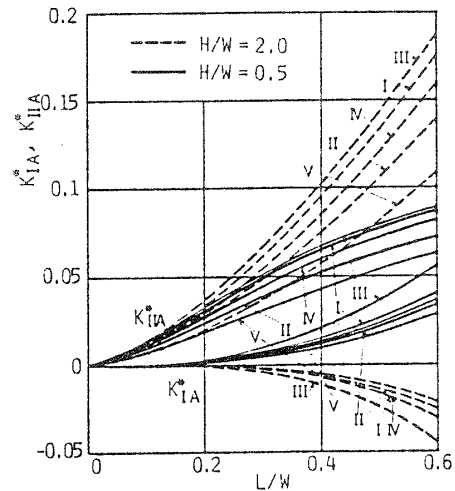


図 23 き裂長さとの応力拡大係数

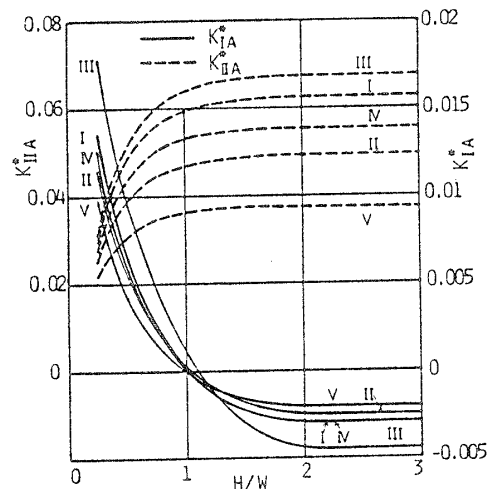


図 24 板の長さとの応力拡大係数

図 24 に示す、 H/W の増加とともに、 K_{IIA} は減少し、 K_{IA} は増加するが H/W が 2 以上では一定値となる。 K_{IIA} は $H/W=1$ の付近で符号が変わり、正の K_I を取るき裂先端の位置が変わる。図 25 は、 $L/W=0.3$ の場合について、 K_{IIA} 、 K_{IA} に対する熱伝導率の異方性の影響を示す。 k_{22}/k_{11} の増加に伴う K_{IIA} の上昇が著しい。 $H/W=2$ 、 $\alpha=60^\circ$ の場合、 $k_{22}/k_{11}=5$ の付近で K_{IIA} の符号の逆転が見られる。同様に、図 26 は応力拡大係数の線膨張係数異方性への依存性を示す。 K_{IIA} は b_{22}/b_{11} が 1 より小さい所であまり変化しないが、それが大きくなると非常に大きな変化を示す。 K_{IA} は、とくに H/W が大きいとき、 b_{22}/b_{11} にほとんど依存しない。図 27 は K_{IIA} 、 K_{IA} の β_2^2 依存性を示す。 K_{IIA} は β_2^2 が大きくなるにつれ減少するが、 β_2^2 が小さい所および大きい所で変化が鈍る。 K_{IA} は全体的に小さいが、 β_2^2 が小さい所で比較的大きい値を取る。

4. 結 言

偏心き裂および傾斜き裂を有する直交異方性長方形板における応力拡大係数を、き裂一定温度問題とき裂断熱問題に関して求め、応力拡大係数の形状依存性と材料定数依存性を調べた。その結果、次のような知見を得た。

(1) き裂が傾斜していないとき、き裂一定温度問題では開口形、き裂断熱問題では面内せん断形となる。き裂が傾斜すると混合モードとなるが、いずれの傾斜角においても、それぞれ傾斜していない場合に現れるモードが支配的である。

(2) 偏心き裂の場合において、 H/W が小さくないとき、き裂一定温度問題では板の側面に近いき裂端での K_I^* が小さく、き裂断熱問題ではそこでの K_{II}^* が大である。そのことと関連して、き裂が長くなるとき応力拡大係数は、一定温度問題ではある長さで最大となり以後減少するが、断熱問題では単調に増加する。また、いずれの場合においても、 H/W が 2 程度より大きい所では K_I^* 、 K_{II}^* は H/W に依存しない。

(3) き裂傾斜角が大きくなるとき、一定温度問題の K_I^* は $H/W=2$ の場合小さくなるが、 $H/W=1$ の場合ほぼ一定である。また、断熱問題の K_{II}^* は減少する。き裂傾斜により現れる K_I^* 、 K_{II}^* は $H/W=1$ の付近で符号が変わる。

(4) 熱伝導率の比 k_{22}/k_{11} が大になると K_I^* 、 K_{II}^* は大きくなる。断熱問題においては k_{22}/k_{11} が大きい所でそれが小さい所に比較してその影響の程度が著しく大であるが、一定温度問題ではあまり差がない。

(5) 線膨張係数の比 b_{22}/b_{11} が小さいとき K_I^* 、

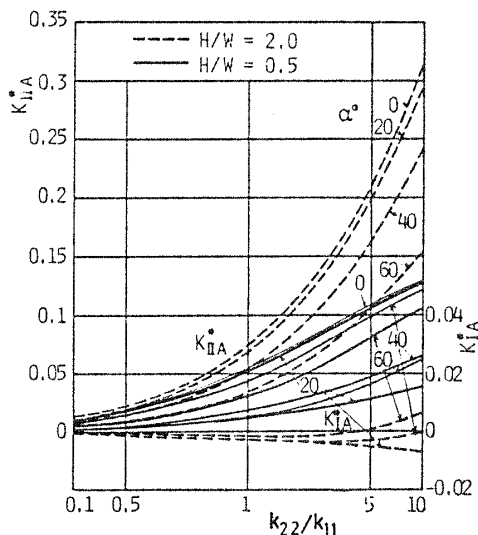


図 25 熱伝導率の異方性と応力拡大係数

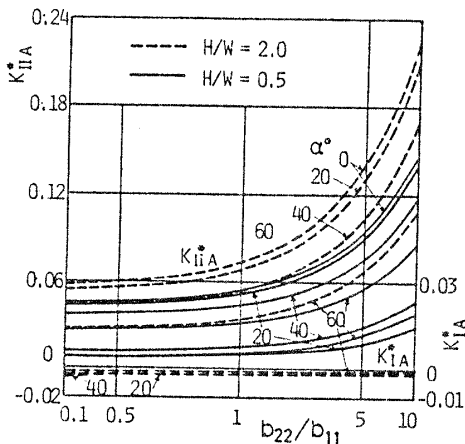


図 26 線膨張係数の異方性と応力拡大係数

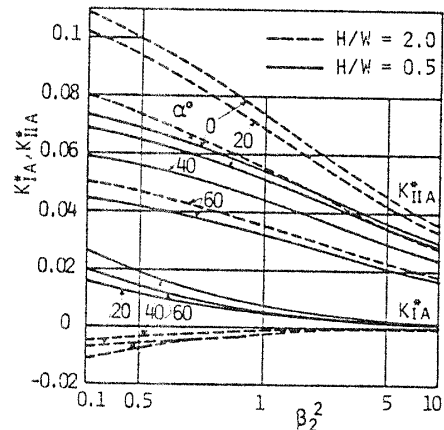


図 27 弾性係数の異方性と応力拡大係数

K_{II}^* はそれによりあまり影響されず, $b_{22}/b_{11} < 0.5$ ではほぼ一定値となり, 一定温度問題では b_{22}/b_{11} が 0.1 程度になると偏心, 傾斜の影響もほとんどなくなる。一方, b_{22}/b_{11} が大になると K_I^* , K_{II}^* は非常に大きくなる。

(6) 弾性係数の異方性の影響として, β_2^* (平面応力下で E_1/E_2) が小さくなると K_I^* , K_{II}^* は大きくなる。一定温度問題においては, β_2^* が小さいとき K_I^* は著しく変化するが, β_2^* が大きいときその変化は小さく, また偏心, 傾斜の影響も小さくなる。断熱問題に

おいては K_{II}^* の変化の程度にあまり差が現れない。

なお, 有益なご指摘をいただいた秋田大学鉱山学部の大好直氏に感謝の意を表す。

文 献

- (1) 中西・ほか3名, 機論, 47-420, A (昭56), 790.
- (2) 須見, 機論, 48-431, A (昭57), 904.
- (3) 例えば, 竹内, 熱応力, (昭46), 322, 日新出版など.
- (4) Chen, W. T., *Trans. ASME, Ser. E*, 34-1 (1967), 133.
- (5) Sih, G. C. and Liebowitz, H. (Liebowitz, H 編), *Fracture*, 2 (1968), 69, Academic Press.

討 論

〔質問〕 大好直〔秋田大学鉱山学部〕

幾何学および異方性パラメータをいろいろにとつて熱的負荷に対する貴重な応力拡大係数の変化を検討しており興味深く拝見した。さてき裂配置と計算精度との関係の議論はよくされるところであるが, 材料あるいは熱的異方性パラメータの変化はあまり算出精度に影響しなかったか。採用未定係数の数およびそれに対する選点数の割合と周囲境界上の選点配置など, あわせてお教え願いたい。

〔回答〕 未定係数 c_n は 40~60, d_n は 15~20 項程度取っている。選点数は, 境界条件の数が未知数の 2 倍程度になるように選び, また選点の配置は等間隔にしている。そのような条件のもとで, 本論文で扱っている範囲内では, 異方性のパラメータは計算精度にそれほど影響せず, 境界条件に採用した点およびその中間で境界条件も十分満足されていた。

一般的に, 板の長さとの比 H/W が極端に大きいか小さいとき, 計算精度は悪くなる。ところで, 式(4), (6)を参照すると, μ_j は実質的に H/W を変える役目をする。したがって, 異方性のパラメータが非常に大きい場合および非常に小さい場合には, 計算精度が悪くなることがあると考えられる。

〔質問〕 木須博行〔長崎大学工学部〕

系統的な傾向が示されており, 有益な結果が得られたものと思う。

(1) 本解法の一般性について, 例えば下記のような境界条件の解析の難易度, 拡張の可能性などについて御教示願いたい。

(a) 物体境界が直線でない場合

(b) 負荷が曲げ荷重の場合

(c) 物体内部に高温部がある場合 (溶接などを想定)

(2) 細かいことで恐縮であるが, c_n, d_n の項数は何項くらい必要か, また精度はどの程度か。熱負荷のない等方性対称中央き裂帯板の石田の解^(付1)と比較していただけると有難い。

〔回答〕 (1)(a) 物体形状が直線でない場合にも, 本解法はそのまま適用できる。

(b) 本論文の式の温度に関する項を除くことにより, 力学的負荷のみが作用する場合の式になり, 既報〔本文の文献(1)〕の内部き裂を扱った式に一致する。そこにおいて, 一様引張りの問題しか計算していないが, 面内曲げの問題に対しても容易に解を求めることができる。

(c) 物体内部に熱の供給がある場合には, 本論文の式はそのまま使用できず, 例えば式(12)などを別の形に与える必要がある。一般的に, それは容易に行うことができると考えられる。

(2) c_n の項数は 40~60, また d_n は 15~20 項程度である。その程度取ると, 境界条件がそれを与えている点以外でも十分満足され, 項数を変えても応力拡大係数の値は変わらない。ご指摘の, 熱負荷のない場合については, 文献(1)で石田の解および他のいくつかの解と比較検討しており, 解の精度は十分であることを確認している。

(付1) Isida, M., *Eng. Fract. Mech.*, 5 (1973), 647.