

日本機械学会論文集(A編)  
52巻473号(昭61-1)

## 界面き裂を有する二層長方形板の定常熱応力\*

須見 尚文\*\*  
Naobumi SUMI

**Key Words:** Elasticity, Thermal Stress, Composite Material, Interface Crack Stress Intensity Factor, Complex Variable Method

### 1. 緒言

き裂を有する弾性体の熱応力解析は、材料の破壊強度の問題に関連して重要であり、これまでに多くの研究が発表されている。しかしこれらの多くは均質材料に関するものであり、機械や構造物の設計上有利な不均質材料に関するものは少ない。さて不均質材料のき裂問題において重要であり興味ある問題の一つは界面き裂の問題である。界面き裂問題での応力の特異性は幾何学的不連続性と材料の不連続性から生じ、この種の問題に対し Erdogan ら<sup>(1)(2)</sup>により二次元問題が、Bregman ら<sup>(3)</sup>により円形き裂の問題が、高久田ら<sup>(4)</sup>により環状端き裂の問題が解析されている。しかしながら、これらの問題はいずれも半無限体の接合界面にき裂が存在する場合であり、有限体の問題は解析されていない。

そこで、本論文では異なる熱弾性定数をもつ2個の有限板の接合界面にき裂が存在する場合の定常熱応力問題の複素解析関数を用いた解析法を示し、数値解析例として一様熱流が界面き裂により乱される場合の二層長方形板の熱応力を求めた。

### 2. 基礎式

図1に示すように、長さ $2a$ のき裂を有する二層有限板の定常熱応力問題を考える。き裂の中心を原点とし、き裂に沿った方向を $x$ 軸とする直角座標 $(x, y)$ を採用する。 $y > 0$ の上層領域を $S^+$ 、 $y < 0$ の下層領域を $S^-$ で表し、上下層での横弾性係数 $\mu$ 、ポアソン比 $\nu$ 、熱膨張係数 $\alpha$ 、熱伝導率 $\kappa$ にそれぞれ下添字 $i=1, 2$ をつけて示すものとする。

平面熱弾性問題における温度、応力、変位は複素解析関数 $F_j(z)$ 、 $\varphi_j(z)$ および $\psi_j(z)$ により、それぞれ次式で与えられる<sup>(5)(6)</sup>。

$$\tau_j = Re\{F_j(z)\} \dots\dots\dots (1)$$

$$\sigma_{jyy} - i\sigma_{jxy} = \varphi_j'(z) + \overline{\varphi_j'(z)} + z\overline{\varphi_j''(z)} + \overline{\psi_j''(z)} \dots (2)$$

$$\sigma_{jxx} + i\sigma_{jxy} = \varphi_j'(z) + \overline{\varphi_j'(z)} - z\overline{\varphi_j''(z)} - \overline{\psi_j''(z)} \dots (3)$$

$$2\mu_j(u_{jx} + iu_{jy}) = \kappa_j\varphi_j(z) - z\overline{\varphi_j'(z)} - \overline{\psi_j'(z)} + \alpha_j \int F_j(z) dz \dots\dots\dots (4)$$

ただし、添字 $j=1, 2$ はそれぞれ上下層の諸量を表し、平面ひずみに対し $\kappa_j=3-4\nu_j$ 、平面応力に対し $\kappa_j=(3-\nu_j)/(1+\nu_j)$ である。

### 3. 解析

**3・1 温度分布** 図1に示す二層有限板の接合界面での熱的境界条件として次式を考える。

$$\lambda_1 \frac{\partial \tau_1}{\partial y_1} = \lambda_2 \frac{\partial \tau_2}{\partial y_2} = l(x), \quad |x| \leq a \dots\dots\dots (5)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial \tau_1}{\partial y_1} = \lambda_2 \frac{\partial \tau_2}{\partial y_2}, \quad |x| > a \dots\dots\dots (6)$$

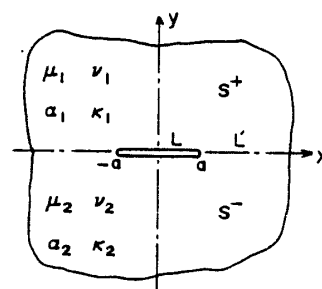


図1 界面き裂を有する二層有限板

\* 昭和59年3月31日 第61期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和59年7月24日。  
\*\* 正員、静岡大学教育学部 (〒422 静岡市大谷836)。

$z_1 = z_2, |x| > a$  .....(7)  
 ただし、 $l(x)$  はき裂面を横切って流れる熱量である。  
 式(1)を用いて境界条件(6)を表せば

$$\lambda_1 F_1^+(x) + \lambda_2 \bar{F}_2^+(x) = \lambda_1 \bar{F}_1^-(x) + \lambda_2 F_2^-(x) \quad |x| > a \quad \text{.....(8)}$$

を得る。ここで添字+, -は変数  $z$  が  $y > 0, y < 0$  の側から接合面 ( $y = 0$ ) に近づいた極限としての関数値を表している。この時、次式の解析接続を定義する。

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 F_1^+(z) + \lambda_2 \bar{F}_2^+(z) &= f'(z), & z \in S^+ \\ \lambda_1 \bar{F}_1^-(z) + \lambda_2 F_2^-(z) &= f'(z), & z \in S^- \end{aligned} \right\} \text{.....(9)}$$

$f'(z)$  が  $(-a, a)$  で切断された全領域で正則とすれば、式(8)は  $f'(z)$  により恒等的に満足される。

同様に境界条件(7)は

$$\left. \begin{aligned} F_1^-(z) - \bar{F}_2^+(z) &= g'(z), & z \in S^+ \\ -\bar{F}_1^-(z) + F_2^-(z) &= g'(z), & z \in S^- \end{aligned} \right\} \text{.....(10)}$$

で定義される関数  $g'(z)$  を導入し、 $g'(z)$  が  $(-a, a)$  で切断された全領域で正則とすれば恒等的に満足される。

次に境界条件(5)を考える。式(1), (9), (10)を用いて式(5)を書けば次式が得られる。

$$f'^+(x) - f'^-(x) = 0, \quad |x| \leq a \quad \text{.....(11)}$$

$$g'^+(x) + g'^-(x) = -2i \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} l(x), \quad |x| \leq a \quad \text{.....(12)}$$

したがって、以上の結果を総合すれば、関数  $f'(z)$  は全実軸を含む全領域で正則であり、関数  $g'(z)$  は式(12)で与えられるヒルベルト問題の解であることがわかる。したがって、その一般解はそれぞれ次式で与えることができる<sup>(5)</sup>。

$$f'(z) = \sum_{m=0}^{\infty} m B_m z^{m-1} \quad \text{.....(13)}$$

$$g'(z) = -2i \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} \frac{X_0(z)}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{l(x) dx}{(x-z) X_0(z)} + X_0(z) \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n \quad \text{.....(14)}$$

$$X_0(z) = (z+a)^{-1/2} (z-a)^{-1/2} \quad \text{.....(15)}$$

ただし、 $A_n, B_m$  は後述の温度一価条件および有限領域での温度境界条件より決定される未定係数である。

同様に境界条件(21)は

$$\mu_2 \kappa_1 \phi_1'(z) + \mu_1 \phi_2'(z) + \mu_1 z \bar{\phi}_2''(z) + \mu_1 \bar{\phi}_2''(z) + 2\mu_1 \mu_2 \alpha_1 F_1(z) = \phi'(z), \quad z \in S^+ \quad \text{.....(25)}$$

$$\mu_1 \kappa_2 \phi_2'(z) + \mu_2 \bar{\phi}_1'(z) + \mu_2 z \bar{\phi}_1''(z) + \mu_2 \bar{\phi}_1''(z) + 2\mu_1 \mu_2 \alpha_2 F_2(z) = \phi'(z), \quad z \in S^- \quad \text{.....(26)}$$

で定義される関数  $\phi'(z)$  を導入し、 $\phi'(z)$  が  $(-a, a)$  で切断された全領域で正則とすれば、恒等的に満足される。

次に境界条件(19)を考える。式(2), (23)~(26)を用いて式(19)を書けば次式が得られる。

$$\theta'^+(x) - \theta'^-(x) = 0, \quad |x| \leq a \quad \text{.....(27)}$$

$$\phi'^+(x) + \alpha \phi'^-(x) = 2\mu_1 \mu_2 \{ \alpha_1 F_1^+(x) + \alpha \alpha_2 \bar{F}_2^-(x) \} - \mu_1 (1 - \alpha \kappa_2) \theta'^+(x), \quad |x| \leq a \quad \text{.....(28)}$$

式(13), (14)の解を得るにあたり境界条件(7)は温度そのものでなく温度の導関数が等しいとして解が導かれているので、温度が一価であるためには次式の温度一価条件が保障されなければならない。

$$\int_{-a}^a \left[ g'^+(x) - \bar{g}'^+(x) + 2i \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} l(x) \right] dx = 0 \quad \text{.....(16)}$$

したがって、上述の条件を満足する2個の解析関数  $f'(z), g'(z)$  を求めれば、二層有限板の複素温度関数  $F_j(z)$  は次式で与えられることになる。

$$F_1(z) = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} [\lambda_2 g(z) + f(z)] \quad \text{.....(17)}$$

$$F_2(z) = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} [\lambda_1 g(z) + f(z)] \quad \text{.....(18)}$$

3・2 応力分布 き裂面で応力自由とすれば、二層有限板の接合界面での力学的境界条件は次式で与えられる。

$$(\sigma_{1yy} - i\sigma_{1xy})^+ = (\sigma_{2yy} - i\sigma_{2xy})^- = 0, \quad |x| \leq a \quad \text{.....(19)}$$

$$(\sigma_{1yy} - i\sigma_{1xy})^+ = (\sigma_{2yy} - i\sigma_{2xy})^-, \quad |x| > a \quad \text{.....(20)}$$

$$(u_{1x} + iu_{1y})^+ = (u_{2x} + iu_{2y})^-, \quad |x| > a \quad \text{.....(21)}$$

式(2)を用いて境界条件(20)を表せば

$$\begin{aligned} \phi_1'^+(x) - \bar{\phi}_2'^+(x) - x \bar{\phi}_2''^+(x) - \bar{\phi}_2''^+(x) \\ = \phi_2'^-(x) - \bar{\phi}_1'^-(x) - x \bar{\phi}_1''^-(x) - \bar{\phi}_1''^-(x) \end{aligned} \quad |x| > a \quad \text{.....(22)}$$

を得る。ここで次式の解析接続を定義する。

$$\phi_1'(z) - \bar{\phi}_2'(z) - z \bar{\phi}_2''(z) - \bar{\phi}_2''(z) = \theta'(z) \quad z \in S^+ \quad \text{.....(23)}$$

$$\phi_2'(z) - \bar{\phi}_1'(z) - z \bar{\phi}_1''(z) - \bar{\phi}_1''(z) = \theta'(z) \quad z \in S^- \quad \text{.....(24)}$$

$\theta'(z)$  が  $(-a, a)$  で切断された全領域で正則とすれば、式(22)は  $\theta'(z)$  により恒等的に満足される。

ただし

$$\alpha = (\mu_1 + \mu_2 \kappa_1) / (\mu_2 + \mu_1 \kappa_2) \dots \dots \dots (29)$$

したがって、以上の結果を総合すれば、関数  $\theta'(z)$  は全実軸を含む全領域で正則であり、関数  $\phi'(z)$  は式(28)で与えられるヒルベルト問題の解であることがわかる。したがって、 $\theta'(z)$  の一般解は次式で与えることができる。

$$\theta'(z) = \sum_{l=0}^{\infty} D_l z^l \dots \dots \dots (30)$$

式(28)の解を得るために次式の変換を行う。

$$\phi'(z) = K\theta'(z) + \omega'(z), \quad (1 + \alpha)K = -\mu_1(1 - \alpha\kappa_2) \dots \dots \dots (31)$$

この時、式(28)は解析関数  $\omega'(z)$  に関する次式のヒルベルト問題に変換できる。

$$\omega'^+(x) + \alpha\omega'^-(x) = 2\mu_1\mu_2\{\alpha_1 F_1^+(x) + \alpha\alpha_2 F_2^-(x)\}, \quad |x| \leq a \dots \dots \dots (32)$$

式(32)の解は<sup>(5)</sup>

$$\omega'(z) = \frac{R_0(z)}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{h(x) dx}{(x-z)R_0(x)} + R_0(z) \sum_{s=0}^{\infty} C_s z^s \dots \dots \dots (33)$$

で与えられる。ただし

$$h(x) = 2\mu_1\mu_2\{\alpha_1 F_1^+(x) + \alpha\alpha_2 F_2^-(x)\} \dots \dots \dots (34)$$

$$R_0(z) = \left(\frac{z+a}{z-a}\right)^{\gamma} \frac{1}{(z^2-a^2)^{1/2}}, \quad \gamma = \frac{1}{2\pi} \log \alpha \dots \dots \dots (35)$$

また、式(30)、(33)に含まれる  $D_l$ 、 $C_s$  は後述の変位一価条件および有限領域での力学的境界条件より決定される未定係数である。

式(30)、(33)の解を得るにあたり境界条件(21)は、変位そのものでなく変位の導関数が等しいとして解が導かれているので、変位が一価であるためには次式の変位一価条件が保障されなければならない。

$$\int_{-a}^a \left[ \omega'^+(x) - \frac{1}{1+\alpha} h(x) \right] dx = 0 \dots \dots \dots (36)$$

したがって、上述の条件を満足する二個の解析関数  $\theta'(z)$ 、 $\omega'(z)$  を求めれば、二層有限板の応力、変位は次式で与えられることになる。

$$\sigma_{1yy} - i\sigma_{1xy} = \frac{1}{\mu_1 + \mu_2 \kappa_1} [(\mu_1 + K)\{\theta'(z) - \theta'(\bar{z}) + (z - \bar{z})\bar{\theta}''(\bar{z})\} + \{\omega'(z) + \alpha\omega'(\bar{z}) + (z - \bar{z})\bar{\omega}''(\bar{z})\} - 2\mu_1\mu_2\{\alpha_1 F_1(z) + \alpha\alpha_2 F_2(\bar{z}) + (z - \bar{z})\alpha_1 \bar{F}_1(\bar{z})\}] \dots \dots \dots (37)$$

$$\sigma_{1xx} + i\sigma_{1xy} = \frac{1}{\mu_1 + \mu_2 \kappa_1} [(\mu_1 + K)\{\theta'(z) + \theta'(\bar{z}) + 2\bar{\theta}'(\bar{z}) - (z - \bar{z})\bar{\theta}''(\bar{z})\} + \{\omega'(z) - \alpha\omega'(\bar{z}) + 2\bar{\omega}'(\bar{z}) - (z - \bar{z})\bar{\omega}''(\bar{z})\} - 2\mu_1\mu_2\{\alpha_1 F_1(z) - \alpha\alpha_2 F_2(\bar{z}) + 2\alpha_1 \bar{F}_1(\bar{z}) - (z - \bar{z})\alpha_1 \bar{F}_1(\bar{z})\}] \dots \dots \dots (38)$$

$$u_{1x} + iu_{1y} = \frac{1}{2\mu_1(\mu_1 + \mu_2 \kappa_1)} [(\mu_1 + K)\{\kappa_1\theta(z) + \theta(\bar{z}) - (z - \bar{z})\bar{\theta}'(\bar{z})\} + \{\kappa_1\omega(z) - \alpha\omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\bar{\omega}'(\bar{z})\} + 2\mu_1\{\mu_1\alpha_1 \int F_1(z) dz + \alpha\mu_2\alpha_2 \int F_2(\bar{z}) d\bar{z} + (z - \bar{z})\mu_2\alpha_1 \bar{F}_1(\bar{z})\}] \dots \dots \dots (39)$$

ここで、 $\sigma_{2yy}$ 、 $\sigma_{2xy}$ 、 $\sigma_{2xx}$ 、 $u_{2x}$ 、 $u_{2y}$  に対する表示式は、上式中の添字 1 を 2 に、添字 2 を 1 に置き換え、定数  $\alpha$  を  $1/\alpha$  に置き換えることにより得られる。

**3.3 応力拡大係数** 実用上重要な接合界面上の応力は、き裂延長上で  $\theta'^+(x) = \theta'^-(x)$ 、 $\omega'^+(x) = \omega'^-(x)$  を考慮すれば、式(37)より次式として得られる。

$$(\sigma_{1yy} - i\sigma_{1xy})^+ = \frac{1}{\mu_1 + \mu_2 \kappa_1} [(1 + \alpha)\omega'^+(x) - h(x)], \quad |x| > a \dots \dots \dots (40)$$

界面き裂の問題に対して、応力拡大係数は次式で定義される<sup>(7)</sup>。

$$k_1 - ik_2 = \lim_{x \rightarrow a} (\sigma_{1yy} - i\sigma_{1xy})^+ / R_0^+(x) \dots \dots \dots (41)$$

#### 4. 界面き裂を有する二層長方形板の定常熱応力

以上の解析で、接合界面での熱的および力学的境界条件を満足する温度、応力および変位の表示式を誘導したが、ここではこの解析の具体的な応用例として、図 2 に示すような界面き裂を有する二層長方形板の  $y$

軸方向の一様熱流がき裂によって乱される場合に生じる熱応力問題を考える。き裂面は断熱されているものとし、ここでは上下両層の温度差による熱流により生じる熱応力を対象とすれば、以上の解析で  $l(x)=0$ ,  $f'(z)=0$  と置くことができる。

この問題の長方形境界での熱的境界条件は次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tau_1}{\partial x} = 0, \quad |x| = b, \quad 0 \leq y \leq c \\ \frac{\partial \tau_2}{\partial x} = 0, \quad |x| = b, \quad -c \leq y \leq 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(42)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 = \tau_a, \quad |x| < b, \quad y = c \\ \tau_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} T_a, \quad |x| < b, \quad y = -c \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(43)$$

ただし、 $T_a$  は境界  $y=c$  上での一定温度である。

温度分布の虚軸に関する対称性を考慮すれば、本問題に適する複素温度関数は式(14), (17), (18)より得られ、例えば  $F_1(z)$  は次式となる。

$$\begin{aligned} F_1(z) &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} g(z) \\ &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1} G_{2n+1}(z) \dots\dots\dots(44) \end{aligned}$$

ここで  $A_{2n+1}$  は純虚数であり、 $G_{2n+1}(z)$  は次式となる。

$$\begin{aligned} G_{2n+1}(z) &= \sum_{r=0}^n \left[ \frac{2n \cdots (2n-2r+2)}{(2n+1) \cdots (2n-2r+1)} \right. \\ &\quad \left. \times a^{2r} z^{2n-2r} \right] \times \sqrt{z^2 - a^2} \dots\dots\dots(45) \end{aligned}$$

式(44)に含まれる無限級数を有限項の  $n=N$  で近似し、 $(N+1)$  個の未定係数  $A_{2n+1}$  を境界条件式(42), (43)より境界点最小自乗法を用いて決定すれば、温度分布が求まることになる。なお、本問題に対しては温度の一価条件式(16)は満足されている。

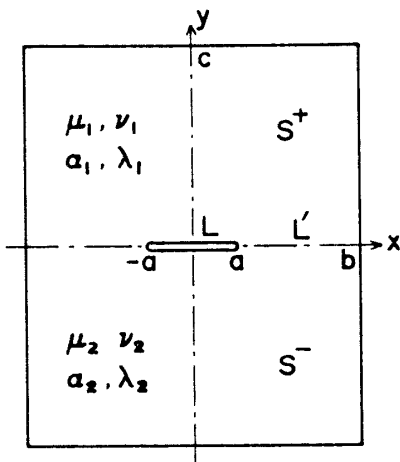


図 2 界面き裂を有する二層長方形板

長方形境界での力学的境界条件として応力自由な場合を考えれば、境界条件は次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{1xx} + i\sigma_{1xy} = 0 \\ |x| = b, \quad 0 \leq y \leq c \\ \sigma_{2xx} + i\sigma_{2xy} = 0 \\ |x| = b, \quad -c \leq y \leq 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(46)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{1yy} - i\sigma_{1xy} = 0 \\ |x| < b, \quad y = c \\ \sigma_{2yy} - i\sigma_{2xy} = 0 \\ |x| < b, \quad y = -c \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(47)$$

本問題に対し、式(34)で定義される関数  $h(x)$  は

$$h(x) = \frac{2\mu_1\mu_2}{\lambda_1 + \lambda_2} (\alpha_1\lambda_2 - \alpha\alpha_2\lambda_1) g^+(x) \dots\dots\dots(48)$$

として与えられるが、この関数は複雑で式(33)の積分は容易でない。そこで  $(-a \leq x \leq a)$  の範囲で  $h(x)$  を次式の多項式で近似する。

$$h(x) \approx \frac{2\mu_1\mu_2}{\lambda_1 + \lambda_2} (\alpha_1\lambda_2 - \alpha\alpha_2\lambda_1) \sum_{m=0}^M G_{2m} x^{2m}, \quad |x| \leq a \dots\dots\dots(49)$$

ただし、 $G_{2m}$  は実定数である。この時、 $|z| \rightarrow \infty$  に対して初等計算により次式の展開式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{h(z)}{R_0(z)} &= \frac{2\mu_1\mu_2}{\lambda_1 + \lambda_2} (\alpha_1\lambda_2 - \alpha\alpha_2\lambda_1) \sum_{i=0}^q \delta_{q-i} z^{q-i} \\ q &= 2M + 1 \end{aligned} \dots\dots\dots(50)$$

式(50)を式(33)に適用し Muskhelishvili<sup>(9)</sup>の方法で計算すれば、 $w'(z)$  が求められる。なお、式(33)の計算には  $z$  の負べき項は不要となるので、式(50)の展開においては  $z$  の負べき項を除外している。

温度および応力分布の虚軸に関する対称性を考慮すれば、本問題に適する複素解析関数  $\theta'(z)$  と  $w'(z)$  は次式で与えることができる。

$$\theta'(z) = \sum_{t=0}^{\infty} (\dot{D}_{2t} z^{2t} + D'_{2t+1} z^{2t+1}) \dots\dots\dots(51)$$

$$\begin{aligned} w'(z) &= \frac{2\mu_1\mu_2}{1+\alpha} \frac{\alpha_1\lambda_2 - \alpha\alpha_2\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left\{ \sum_{m=0}^M G_{2m} z^{2m} \right. \\ &\quad \left. - R_0(z) \sum_{i=0}^q \delta_{q-i} z^{q-i} \right\} + R_0(z) \sum_{s=0}^{\infty} (\dot{C}_{2s+1} z^{2s+1} \\ &\quad + C'_{2s} z^{2s}) \dots\dots\dots(52) \end{aligned}$$

ただし、 $\dot{D}_{2t}$ ,  $\dot{C}_{2s+1}$  は実定数であり、 $D'_{2t+1}$ ,  $C'_{2s}$  は純虚数である。式(51), (52)に含まれる無限級数をそれぞれ有限項の  $t=N_t$  および  $s=N_s$  で近似し、 $2(N_s + N_t + 2)$  個の未定係数  $\dot{D}_{2t}$ ,  $D'_{2t+1}$ ,  $\dot{C}_{2s+1}$ ,  $C'_{2s}$  を変位一価条件式(36)および境界条件式(46), (47)を満足するように境界点最小二乗法を用いて決定すれば、 $\theta'(z)$  と  $w'(z)$  が求まり応力分布が求められることになる。

この時、応力拡大係数は式(41)より計算されて次式となる。

$$k_1 - ik_2 = \frac{1 + \alpha}{\mu_1 + \mu_2 \kappa_1} \sum_{s=0}^{N_2} (C_{2s+1} a^{2s+1} + C_{2s} a^{2s}) - \frac{2\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2 \kappa_1} \frac{\alpha_1 \lambda_2 - \alpha \alpha_2 \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \sum_{i=0}^q \delta_{q-i} a^{q-i} \dots (53)$$

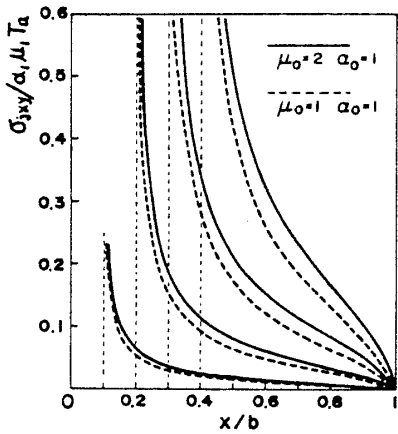


図3 接合界面上の  $(\sigma_{yy})_{y=0}$  の分布

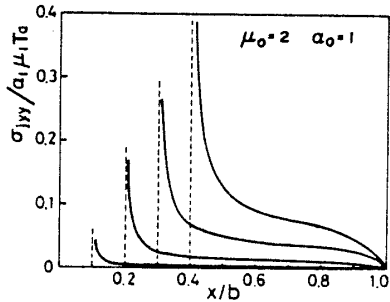


図4 接合界面上の  $(\sigma_{yy})_{y=0}$  の分布

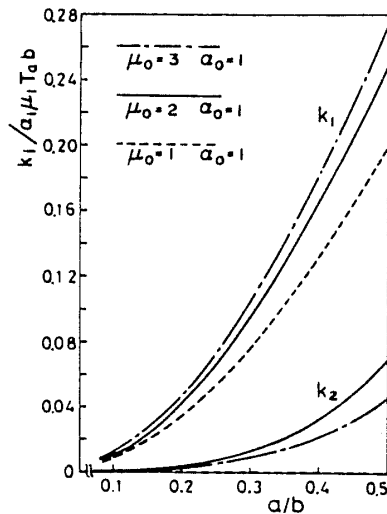


図5 応力拡大係数の変化

5. 数値計算および考察

数値計算は  $b=c$  の二層長方形板について、き裂寸法  $a/b$  をパラメータに平面ひずみ状態のもとで実行した。実用材料におけるポアソン比の変動は小さいので上下層のポアソン比は  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$  で、また熱伝導率は  $\lambda_1 = \lambda_2$  の場合について、横弾性係数の比

$$\mu_0 = \mu_2 / \mu_1 \dots \dots \dots (54)$$

および熱膨張係数の比

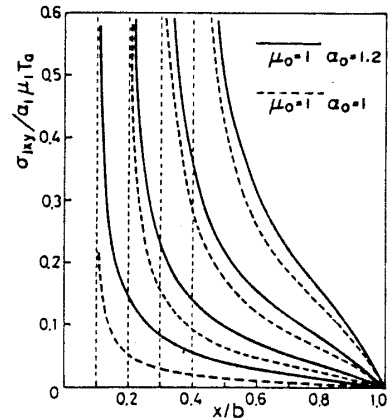


図6 接合界面上の  $(\sigma_{yy})_{y=0}$  の分布

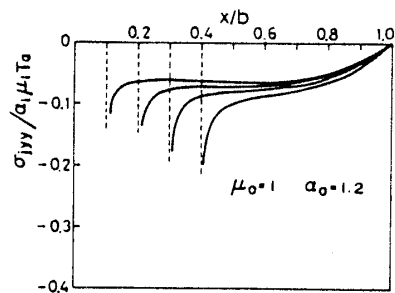


図7 接合界面上の  $(\sigma_{yy})_{y=0}$  の分布

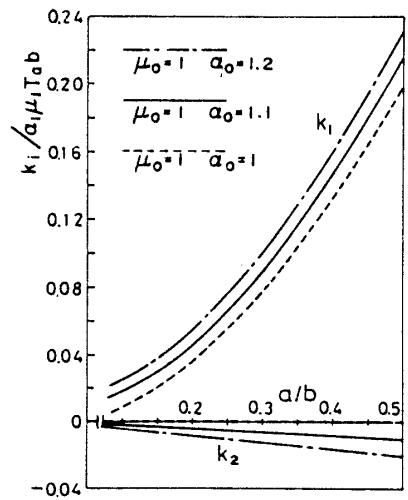


図8 応力拡大係数の変化

$$\alpha_0 = \alpha_2 / \alpha_1 \dots\dots\dots (55)$$

の値を変えて熱応力分布を得た。

$\mu_0$ の値を変化させた場合の代表的結果を図3~5に、 $\alpha_0$ の値を変化させた場合の結果を図6~8に示す。これらの図中の破線は $\mu_0=1$ ,  $\alpha_0=1$ の場合、すなわちき裂を有する均質材料の場合に対応し、この結果は著者らの等角写像を用いた結果<sup>(9)</sup>と一致する。これらの図より、接合界面での熱応力分布は、せん断応力 $\sigma_{xy}$ が支配的であり、また、 $\mu_0$ および $\alpha_0$ 、さらにき裂寸法 $a/b$ の増加とともに応力は大きくなることわかる。

本報での数値計算は上下層の熱弾性定数の差が大きいほど、またき裂寸法比が大きくなるほど解の精度低下が見られるが、本報での数値計算の範囲内では、式(44)における項数 $N$ は5項、式(49)における項数 $M$ は5項、式(51), (52)における項数 $N_e$ および $N_s$ はそれぞれ15項とり、結果として得られる未知数の数の2倍程度の方程式を作り、これを最小二乗法で解けば安定した解が得られた。

本報では、接合界面にき裂を有する二層有限板の定常熱応力問題の複素解析関数を用いた解析法を示し、数値計算例として熱流を受ける二層長方形板の熱応力解析を行った。この界面き裂の熱応力問題は、その数

学的処理の関係上、均質材料のき裂解析では見られない特別な解析が存在し、界面き裂のごく先端近傍で応力が振動しながら発散していく漸近特性を有する。しかしながら、この解の振動する領域の大きさはき裂寸法に比べて十分小さく、したがって本報で示したような有限板のように応力場を系全体として大局的に把握する上では、この解で問題はない<sup>(9)</sup>と考える。

本研究の一部は昭和59年度文部省科学研究費の助成によるものであることを記して感謝の意に代える。

## 文 献

- (1) Erdogan, F., *Trans ASME, Ser. E*, 32-2 (1965), 403.
- (2) Brown, E. J. and Erdogan, F., *Int. J. Eng. Sci.*, 6-9 (1968), 517.
- (3) Bregman, A. H. and Kassir, M. K., *Int. J. Fract.*, 10-1 (1974), 87.
- (4) 高久田・ほか3名, 機論, 50-452, A (昭59), 610.
- (5) Muskhelishvili, N. I., *Some Basic Problems in the Mathematical Theory of Elasticity*, (1953), 455, Noordhoff.
- (6) Takeuti, Y. and Sumi, N., *Mech. Res. Comn.*, 3-2 (1976), 133.
- (7) Erdogan, F. and Gupta, G., *Int. J. Solids Struct.* 7-1 (1971), 39.
- (8) Sumi, N. and Katayama, T., *Nucl. Eng. Des.*, 60-3 (1980), 389.
- (9) Comninou, M., *Trans. ASME, Ser. E*, 44-4 (1977), 631.