

界面端き裂を有する二層有限板の定常熱応力*

須見 尚文*¹, 上田 整*¹

Thermal Stresses in Bonded Dissimilar Finite Materials
with External Interface Cracks

Naobumi SUMI and Sei UEDA

The steady-state thermoelastic problem of two bonded dissimilar finite materials containing external interface cracks is considered. The analysis is based on the complex variable method, and the general solution which satisfies the thermal and mechanical boundary conditions on the interface is obtained. Numerical calculations are carried out for the strength of thermal stress singularities of two bonded finite rectangular plates subjected to a heat flow disturbed by the insulated external cracks, and the results are shown in graphs.

Key Words: Elasticity, Thermal Stress, Interface Crack, Stress Intensity Factor, Complex Variable Method

1. 緒 言

複合材料は材料定数の異なる物質から構成され、接合界面が存在する。そのため、異質材料間の界面き裂の問題は古くから注目され、界面き裂を有する弾性体が熱負荷を受ける熱応力問題に関してもすでに多くの解析結果が得られている^{(1)~(5)}。しかしながら、これらの問題はいずれも半無限体の接合界面にき裂が存在する場合であり、有限体の問題は著者の一人の中心き裂を有する二層長方形板の解析例⁽⁶⁾以外は見受けられないようである。本論文は、前報の拡張として、異なる熱弾性定数を持つ二層有限板の接合界面にき裂が存在する場合の定常熱応力問題を複素解析関数を用いて解析し、数値解析例として熱流が断熱された界面端き裂により乱される二層長方形板の定常熱応力を求めた。

2. 解 析

2.1 基礎式 図1に示すように、熱膨張係数、熱伝導率、横弾性係数、ポアソン比がそれぞれ $\alpha_j, \lambda_j, \mu_j, \nu_j$, ($j=1, 2$) である上下層から成る二層板の定常熱応

力問題を考える。二層板は実軸上の有限区間 $L_k(a_k \leq x \leq b_k)$, $k=1 \sim K$ で完全に接合され、残りの区間 $L'_k(b_k \leq x \leq a_{k+1})$ はき裂とする。

平面熱弾性問題における温度、応力、変位は複素解析関数 $F_j(z)$, $\varphi_j(z)$ および $\psi_j(z)$ により次式で与えられる⁽⁶⁾⁽⁷⁾。

$$\tau_j = \text{Re}\{F_j(z)\} \dots\dots\dots (1)$$

$$\sigma_{jyy} - i\sigma_{jxy} = \varphi'_j(z) + \overline{\varphi'_j(z)} + z\overline{\varphi''_j(z)} + \overline{\psi''_j(z)} \dots\dots\dots (2)$$

$$\sigma_{jxx} + i\sigma_{jxy} = \varphi'_j(z) + \overline{\varphi'_j(z)} - z\overline{\varphi''_j(z)} - \overline{\psi''_j(z)} \dots\dots\dots (3)$$

$$2\mu_j(u'_{jx} + iu'_{jy})$$

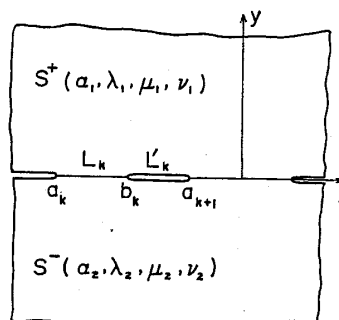


図1 界面き裂を有する二層板

* 平成元年8月25日 東北支部盛岡地方講演会において講演、原稿受付 平成元年1月23日。
*¹ 正員、静岡大学教育学部 (〒422 静岡市大谷 836)。

$$=x_j \varphi_j'(z) - \overline{\varphi_j'(z)} - z \overline{\varphi_j''(z)} - \overline{\varphi_j''(z)} + \alpha_j F_j(z) \dots\dots\dots (4)$$

ただし、平面ひずみに対し $x_j=3-4\nu_j$ 、平面応力に対し $x_j=(3-\nu_j)/(1+\nu_j)$ である。

2.2 温度分布 二層板の接合面上の熱的境界条件として次式を考える。

$$\lambda_1 \frac{\partial \tau_1}{\partial y} = \lambda_2 \frac{\partial \tau_2}{\partial y}, \quad x \in L_k \dots\dots\dots (5)$$

$$\frac{\partial \tau_1}{\partial x} = \frac{\partial \tau_2}{\partial x}, \quad x \in L_k \dots\dots\dots (6)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial \tau_1}{\partial y} = \lambda_2 \frac{\partial \tau_2}{\partial y} = l(x), \quad x \in L_k \dots\dots\dots (7)$$

ただし、 $l(x)$ はき裂 L_k を横切って流れる熱量である。

$y > 0$ の上層領域を S^+ 、 $y < 0$ の下層領域を S^- として、複素解析関数 $F_1'(z)$ の S^+ より S^- へ、および $F_2'(z)$ の S^- より S^+ への解析接続を次式で定義する。

$$\left. \begin{aligned} F_1'(z) &= \overline{F_1'(z)}, \quad z \in S^- \\ F_2'(z) &= \overline{F_2'(z)}, \quad z \in S^+ \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

この時、式(1)、(8)を用いて境界条件式(5)を表せば

$$\lambda_1 F_1'^+(x) + \lambda_2 F_2'^+(x) = \lambda_1 F_1'^-(x) + \lambda_2 F_2'^-(x), \quad x \in L_k \dots\dots\dots (9)$$

ここで、添字+、-はそれぞれ変数 z が $y > 0$ 、 $y < 0$ の側から接合面 ($y=0$) に近づいた極限としての関数値を表す。この時、関数 $f'(z)$ を実軸上で連続で全平面で正則として

$$\lambda_1 F_1'(z) + \lambda_2 F_2'(z) = (\lambda_1 + \lambda_2) f'(z) \dots\dots\dots (10)$$

と置けば、式(9)すなわち条件(5)は関数 $f'(z)$ により恒等的に満足される。この時、境界条件式(6)は

$$F_1'^+(x) + F_1'^-(x) = 2f'(x), \quad x \in L_k \dots\dots\dots (11)$$

また、境界条件式(7)は

$$F_1'^+(x) - F_1'^-(x) = -\frac{2i}{\lambda_1} l(x), \quad x \in L_k \dots\dots\dots (12)$$

式(11)、(12)を満足する $F_1'(z)$ を求めるために

$$F_1'(z) = f'(z) + g'(z) \dots\dots\dots (13)$$

と置けば、式(11)、(12)は次式で定義されるヒルベルト問題に変換できる。

$$g^+(x) + g^-(x) = 0, \quad x \in L_k \dots\dots\dots (14)$$

$$g^+(x) - g^-(x) = -\frac{2i}{\lambda_1} l(x), \quad x \in L_k \dots\dots\dots (15)$$

このヒルベルト問題の一般解は⁽⁷⁾

$$\frac{g'(z)}{X_0(z)} = -\frac{1}{\pi \lambda_1} \int_{L_k} \frac{l(x) dx}{(x-z) X_0^+(z)} + M(z) \quad (16)$$

ただし、 $M(z)$ は後述の温度一価条件および二層板の有限領域での温度境界条件より決定される z の多項式である。また、 $X_0(z)$ は

$$X_0(z) = \prod_{k=1}^K (z-a_k)^{-1/2} (z-b_k)^{-1/2} \dots\dots\dots (17)$$

さて、領域内で温度が一価であるためには次式の温度一価条件が満足されなければならない。

$$\int_{L_k} \left[g'^+(x) + \overline{g'^+(x)} + \frac{2i}{\lambda_1} l(x) \right] dx = 0 \dots\dots\dots (18)$$

したがって、二層板の温度分布は2個の解析関数 $f(z)$ 、 $g(z)$ により次式で与えられることになる。

$$\tau_1 = Re\{f(z) + g(z)\} \dots\dots\dots (19)$$

$$\tau_2 = Re\{\overline{f(z)} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \overline{g(z)}\} \dots\dots\dots (20)$$

2.3 応力分布 き裂面で応力自由とすれば、接合面上での力学的境界条件は

$$\sigma_{1yy}^+ - i\sigma_{1xy}^+ = \sigma_{2yy}^- - i\sigma_{2xy}^-, \quad x \in L_k \dots\dots\dots (21)$$

$$u_{1x}^+ + iu_{1y}^+ = u_{2x}^- + iu_{2y}^-, \quad x \in L_k \dots\dots\dots (22)$$

$$\sigma_{1yy}^+ - i\sigma_{1xy}^+ = \sigma_{2yy}^- - i\sigma_{2xy}^- = 0, \quad x \in L_k \dots\dots\dots (23)$$

ここで、複素解析関数 $\varphi_1'(z)$ の S^+ より S^- へ、および $\varphi_2'(z)$ の S^- より S^+ への解析接続を

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1'(z) &= -\overline{\varphi_1'(z)} - z\overline{\varphi_1''(z)} - \overline{\varphi_1''(z)}, \quad z \in S^- \\ \varphi_2'(z) &= -\overline{\varphi_2'(z)} - z\overline{\varphi_2''(z)} - \overline{\varphi_2''(z)}, \quad z \in S^+ \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

で定義する。この時、 $\varphi_j'(z)$ が線分 L_k を除く全平面で正則ならば境界条件式(23)は恒等的に満足される。また、境界条件式(21)より

$$\varphi_1'^+(x) + \varphi_2'^+(x) = \varphi_1'^-(x) + \varphi_2'^-(x), \quad x \in L_k \quad (25)$$

したがって、関数の和 $\varphi_1'(z) + \varphi_2'(z)$ は実軸を含む全平面で正則となり、次式と置く。

$$\varphi_1'(z) + \varphi_2'(z) = \theta'(z) \dots\dots\dots (26)$$

さて、式(26)を用いて境界条件式(22)を表せば

$$\begin{aligned} \varphi_1'^+(x) + \beta \varphi_1'^-(x) &= \frac{\mu_1(1+x_2)}{\mu_1 + \mu_2 x_1} \theta'(x) \\ &\quad - \frac{2\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2 x_1} h(x), \quad x \in L_k \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

ただし

$$\beta = (\mu_2 + \mu_1 x_2) / (\mu_1 + \mu_2 x_1) \dots\dots\dots (28)$$

$$h(x) = \alpha_1 F_1^+(x) - \alpha_2 F_2^-(x) \dots\dots\dots (29)$$

ここで、次の変換を行う。

$$\varphi_1'(z) = K_1 \theta'(z) + H_1 w'(z) \dots\dots\dots (30)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \mu_1(1+x_2) / (\mu_1 + \mu_2 + \mu_1 x_2 + \mu_2 x_1) \\ H_1 &= 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

この時、式(27)は線分 L_k 上で連続で、線分 L_k 上で次式を満足する解析関数 $w'(z)$ に関するヒルベルト問題に帰着される。

$$\begin{aligned} w'^+(x) + \beta w'^-(x) &= -\frac{2\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2 x_1} h(x), \quad x \in L_k \\ &\dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

式(32)の解は⁽⁷⁾

$$\frac{w'(z)}{R_0(z)} = -\frac{2\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2\kappa_1} \int_{L_k} \frac{h(x)dx}{(x-z)R_0^*(x)} + P(z) \quad \dots\dots\dots(33)$$

ただし、 $P(z)$ は後述の変位一価条件および二層板の有限領域での力学的境界条件より決定される z の多項式である。また、 $R_0(z)$ は

$$R_0(z) = \prod_{k=1}^K (z - a_k)^{-1/2+ir} (z - b_k)^{-1/2-ir} \quad \dots\dots\dots(34)$$

$$\gamma = (\log \beta) / 2\pi$$

さて、領域内で変位が一価であるためには、次式の変位一価条件が満足されなければならない。

$$\int_{L_k} \left[\left(\frac{1+\kappa_1}{2\mu_1} + \frac{1+\kappa_2}{2\mu_2} \right) w'^+(x) + h(x) \right] dx = 0 \quad \dots\dots\dots(35)$$

したがって、二層板の応力、変位は2個の解析関数 $\theta(z)$ 、 $w(z)$ により次式で与えられることになる。

$$\sigma_{jyy} - i\sigma_{jxy} = K_j \{ \theta'(z) - \theta'(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \bar{\theta}''(\bar{z}) \} + H_j \{ w'(z) - w'(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \bar{w}''(\bar{z}) \} \quad \dots\dots\dots(36)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{jxx} + i\sigma_{jxy} &= K_j \{ \theta'(z) + \theta'(\bar{z}) \\ &\quad - (z - \bar{z}) \bar{\theta}''(\bar{z}) + 2\bar{\theta}'(\bar{z}) \} \\ &\quad + H_j \{ w'(z) + w'(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \bar{w}''(\bar{z}) + 2\bar{w}'(\bar{z}) \} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(37)$$

$$\begin{aligned} 2\mu_j(u'_{jx} + iu'_{jy}) &= K_j \{ \kappa_j \theta'(z) + \theta'(\bar{z}) \\ &\quad - (z - \bar{z}) \bar{\theta}''(\bar{z}) \} + H_j \{ w'(z) + w'(\bar{z}) \\ &\quad - (z - \bar{z}) \bar{w}''(\bar{z}) \} + \alpha_j F_j(z) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(38)$$

ただし

$$K_2 = 1 - K_1, H_2 = -H_1 \quad \dots\dots\dots(39)$$

3. 数値計算および考察

以上の解析で、接合界面での熱的および力学的境界条件を満足する温度、応力および変位の表示式を誘導したが、解析の応用例として図2に示す端き裂を有する二層長方形板の、 y 軸方向の一様熱流が断熱された端き裂により乱される場合について考える。上下層の熱流により生じる熱応力を対象とすれば、一般性を失なうことなしに、 $v_2 = -(\lambda_1/\lambda_2)v_1$ であり、以上の解析で $l(x) = 0, f(z) = 0$ と置くことができる。

この問題での長方形境界での境界条件は

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0, x = \pm b \quad \dots\dots\dots(40)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= T_c, y = c \\ \tau_2 &= -(\lambda_1/\lambda_2)T_c, y = -c \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(41)$$

ただし、 T_c は境界 $y=c$ 上の一定温度である。

温度分布の虚軸に関する対称性を考慮すれば、本問題での温度分布は、式(16)、(19)より

$$\tau_1 = Re\{g(x)\}, g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} G_{2n}(z) \quad \dots\dots\dots(42)$$

ただし、 A_{2n} は実係数であり、 $G_{2n}(z)$ は

$$\begin{aligned} G_{2n}(z) &= \sum_{r=0}^{n-1} \left[\frac{(2n-1)\cdots(2n-2r+1)}{2n\cdots(2n-2r)} a^{2r} z^{2n-2r-1} \right] \\ &\quad \times \sqrt{z^2 - a^2} + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left\{ -i \sin\left(\frac{z}{a}\right) \right\} \quad \dots\dots\dots(43) \end{aligned}$$

式(42)に含まれる無限級数を有限項の N で近似し、未定係数 A_{2n} を式(40)、(41)より境界点最小二乗法を用いて決定すれば温度分布が求まる。なお、本問題に対して温度の一価条件(18)は満足されている。

長方形境界での力学的境界条件は、応力自由として

$$\sigma_{jyy} - i\sigma_{jxy} = 0, y = \pm c \quad \dots\dots\dots(44)$$

$$\sigma_{jxx} + i\sigma_{jxy} = 0, x = \pm b \quad \dots\dots\dots(45)$$

本問題に対し、式(29)で定義される $h(x)$ は

$$h(x) = \left(a_1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} a_2 \right) g^+(x), |x| \leq a \quad \dots\dots\dots(46)$$

この関数は複雑で式(33)の積分を解析的に行うことは容易でない。そこで $h(x)$ を $|x| \leq a$ の区間で次式の多項式で近似する。

$$h(x) \approx \left(a_1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} a_2 \right) \sum_{m=0}^M H_{2m-1} x^{2m-1} \quad \dots\dots\dots(47)$$

ただし、 H_{2m-1} は純虚数係数である。この時、 $|z| \rightarrow \infty$ に対して初等計算により次の展開式を得る。

$$\frac{h(x)}{R_0(z)} = \left(a_1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} a_2 \right) \sum_{i=0}^q \delta_{q-i} z^{q-i} \quad \dots\dots\dots(48)$$

ただし、 $q = 2M + 1$ 。式(48)を式(33)に代入しムスヘリシュビロの方法⁽⁷⁾で計算すれば $w'(z)$ が得られる。

応力分布の虚軸に関する対称性を考慮すれば、本問題に適する複素解析関数 $\theta'(z)$ と $w'(z)$ は次式で与えることができる。

$$\theta'(z) = \sum_{l=0}^{\infty} (\hat{D}_{2l} z^{2l} + \hat{D}_{2l+1} z^{2l+1}) \quad \dots\dots\dots(49)$$

$$\begin{aligned} \frac{w'(z)}{R_0(z)} &= -\frac{2\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2\kappa_1} \frac{1}{1+\alpha} \left(a_1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} a_2 \right) \left[\frac{g(z)}{R_0(z)} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=0}^q \delta_{q-i} z^{q-i} + \sum_{s=0}^{\infty} (\hat{C}_{2s+1} z^{2s+1} + \hat{C}_{2s} z^{2s}) \right] \end{aligned} \quad (50)$$

ただし、 $\hat{D}_{2l}, \hat{C}_{2s+1}$ は実係数であり、 $\hat{D}_{2l+1}, \hat{C}_{2s}$ は純虚数係数である。式(49)、(50)に含まれる無限級数をそ

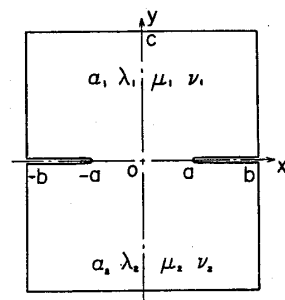
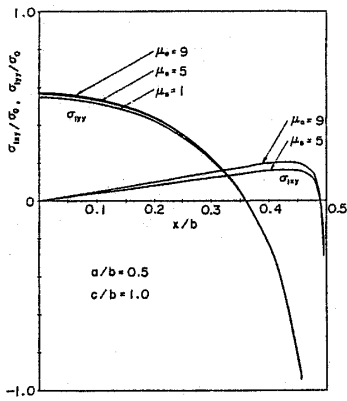
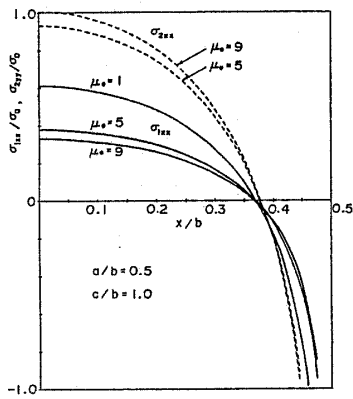


図2 界面端き裂を有する二層長方形板



$$\left(\sigma_0 = \frac{Q}{\pi} \left(\frac{\alpha_1}{\lambda_1} - \frac{\alpha_2}{\lambda_2} \right) \frac{2\mu_1\mu_2}{\sqrt{\mu_1 + \mu_2} \sqrt{\mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_2}} \right)$$

図3 接合面上の σ_{jxx} , σ_{jyy} の分布



$$\left(\sigma_0 = \frac{Q}{\pi} \left(\frac{\alpha_1}{\lambda_1} - \frac{\alpha_2}{\lambda_2} \right) \frac{2\mu_1\mu_2}{\sqrt{\mu_1 + \mu_2} \sqrt{\mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_2}} \right)$$

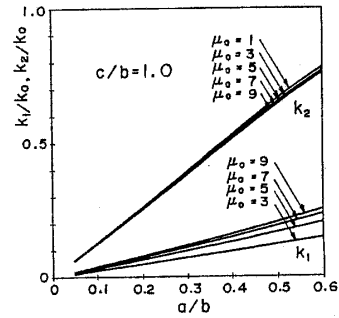
図4 接合面上の σ_{jxx} の分布

それぞれ有限項の $t=N_t$ および $s=N_s$ で近似し、未定係数 $\hat{D}_{2t}, \hat{D}_{2t+1}, \hat{C}_{2s+1}, \hat{C}_{2s}$ を式(44), (45)より境界点最小二乗法を用いて決定すれば、 $\theta'(z), w'(z)$ が求まり応力分布が求まる。なお、本問題に対して変位の一価条件(35)は満足されている。

さて、接合面を横切って流れる熱量を Q とすれば、

$$Q = \lambda_1 \int_{-a}^a \frac{\partial T_1}{\partial y} dx = \pi \lambda_1 \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} a^{2n} \quad \dots\dots\dots(51)$$

この時、 $A_0 \equiv Q/\pi\lambda_1, A_{2n} \equiv 0, (n=1, 2, \dots)$ 、さらに $\hat{D}_{2t} = \hat{D}_{2t+1} = \hat{C}_{2s+1} = \hat{C}_{2s} = 0$ とおけば、 $z \rightarrow \infty$ に強さ Q の熱源、 $z \rightarrow -\infty$ に強さ $-Q$ の吸熱源があり、熱流が端き裂きより乱される二層無限板の解⁽¹⁾が得られる。



$$\left(k_0 = \frac{Q}{\pi} \left(\frac{\alpha_1}{\lambda_1} - \frac{\alpha_2}{\lambda_2} \right) \frac{2\mu_1\mu_2 b}{\mu_2 + \mu_1 x_2} \right)$$

図5 応力拡大係数の変化

さて、実用上重要な接合面上の応力分布は、接合面上で $\theta'(x)$ が連続であり、かつ式(32)が成立することから式(36)より容易に得られるが、この時、界面き裂問題での応力拡大係数は次式で定義される⁽⁶⁾。

$$k_1 - ik_2 = \lim_{x \rightarrow a^-} (\sigma_{jyy} - i\sigma_{jxy})^+ / R\theta'(x) \quad \dots\dots\dots(52)$$

数値計算は $b=c$ の二層長方形板について、 a/b をパラメータに平面ひずみ状態のもとで実行した。上下層のポアソン比は $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ とし、横弾性係数の比

$$\mu_0 = \mu_2/\mu_1 \quad \dots\dots\dots(53)$$

の値を変えて熱応力分布を得た。 $a/b=0.5$ の場合の接合面上の $\sigma_{jxy}, \sigma_{jyy}$ の分布を図3に、 σ_{jxx} の分布を図4に示す。接合面上での応力分布は垂直応力が支配的であることがわかる。図5には応力拡大係数を示す。

数値計算において、式(42)における項数 N は10項、式(47)における M は7項、式(49), (50)における N_t, N_s はそれぞれ10項取り、境界点最小二乗法によりこれらを決定することで安定した解が得られた。

文 献

- (1) Brown, E. J. and Erdogan, F., *Int. J. Eng. Sci.*, 6-9(1968), 517.
- (2) Bregman, A. M. and Kassir, M. K., *Int. J. Fract.*, 10-1(1974), 87.
- (3) Barber, J. R. and Comninou, M., *Q. Jl Mech. Appl. Math.*, 35-3(1982), 403.
- (4) Martin-Moran, C. J., ほか2名, *Trans. ASME, Ser. E.* 50-1(1983), 29.
- (5) 高久田・ほか3名, 機論, 50-452, A(1984), 610.
- (6) 須見, 機論, 52-473, A(1986), 13.
- (7) Muskhelishvili, N. I., *Some Basic Problems in the Mathematical Theory of Elasticity*, (1953), 455, Noordhoff.