

特性曲線/差分法による複合平板の動的熱衝撃問題*

須見尚文^{*1}, 畑俊明^{*1}Dynamic Thermal Shock Problem in a Composite Slab
by the Method of combined Characteristic-Difference

Naobumi SUMI and Toshiaki HATA

A set of generalized equations which govern the propagation of one-dimensional plane, cylindrical, and spherical waves in elastic media subjected to a time-dependent temperature field is presented. The numerical procedure employs the characteristic relationships on boundaries and on interfaces between media with different material properties while using an explicit finite difference scheme at all other points. Fundamental problems for plane waves are solved for examples, and the results show clearly the propagation of discontinuities in stress and velocity or their slopes due to a step or a ramp heating on the boundary. Comparison of the results with those available from other investigators yields excellent agreement. Results are also given for stress wave propagations in a composite slab consisting of two layers with different material properties.

Key Words: Thermal Stress, Wave Propagation, Composite Slab, Characteristic Method, Finite Difference Method

1. 緒 言

機械・構造物が急激な加熱や冷却によって激しい温度変化をうけるとき、いわゆる熱衝撃現象として大きい過渡的熱応力を発生し、クラックなどを誘起する。この熱衝撃問題に関しては、その重要性は古くから認識され、慣性効果、連性効果ともあいまって、種々の研究⁽¹⁾がなされている。

熱衝撃問題のモード法による解法は、解の収束のために多くのモードを必要とし、急激荷重の作用する問題には不向きであり、またラプラス変換法は、その逆変換が困難、複雑になることが多く、これらの理論解析は、簡単な棒、円柱、球、球かなどの問題に限定されている。一方、有限要素法、境界要素法などの数値解析法は、対象問題に限定されず有効な方法ではあるが、熱衝撃波の不連続性などの急激な応力変動を表現するのに困難を伴う面がある。

本研究は、平面、円柱、球などの衝撃加熱を受ける一次元弾性体の動的挙動を解明するための数値解析法として、弾性体の境界あるいは異材の界面上では、熱衝撃波の不連続性を表現する特性曲線を用い、その他

の点では定式化・応用が容易な差分法を用いる特性曲線/差分法による解法を示し、具体的な数値計算例として、半無限体、帯板および複合平板の動的熱衝撃問題を解析し、本解法の妥当性を検討した。

2. 基礎方程式

平面、円柱、球を含めた一次元熱伝導問題に対する非定常熱伝導の基礎式は

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{N}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\chi} \frac{\partial T}{\partial t} \quad \dots \quad (1)$$

ここで、 T は温度、 r は一次元座標、 t は時間、 χ は温度伝導率である。

一方、一次元動的熱弹性問題に対する釣合い方程式は

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{N(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} \quad \dots \quad (2)$$

応力・速度・温度の関係式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial t} &= \bar{E} \left\{ [1 - (N-1)\nu^*] \frac{\partial v}{\partial r} + N\nu^* \frac{v}{r} \right\} \\ &\quad - \frac{\alpha^* E^*}{1 - N\nu^*} \frac{\partial T}{\partial t} \end{aligned} \quad \dots \quad (3)$$

$$\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial t} = \bar{E} \left\{ \frac{v}{r} + \nu^* \frac{\partial v}{\partial r} \right\} - \frac{\alpha^* E^*}{1 - N\nu^*} \frac{\partial T}{\partial t} \quad \dots \quad (4)$$

変位の運動方程式は

* 原稿受付 平成2年2月2日。

*¹ 静岡大学教育学部 (422 静岡市大谷836)。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + N \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{r} \right) = \frac{1+\nu^*}{1-(N-1)\nu^*} a^* \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \dots \dots \dots \quad (5)$$

ただし、

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \dots \dots \dots \quad (6)$$

$$\bar{E} = \frac{E^*}{(1+\nu^*)(1-N\nu^*)} \quad \dots \dots \dots \quad (7)$$

ここで、 u は波面方向の変位、 v は速度、 ρ は密度、 σ_r, σ_θ は波面に平行および垂直な面上の垂直応力であり、 c は弾性波の伝ば速度である。また、 N は定数で、平面、円柱、球の応力波の問題に対して、それぞれ 0, 1, 2 の値をとる。また、 E^*, ν^*, a^*, c は、 E を綫弾性係数、 a を線膨張係数、 ν をポアソン比とする時、それぞれ次式で与えられる。

(I) 平面波($N=0$)の場合

$$E^* = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\nu^* = 0$$

$$a^* = \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} a$$

$$c^2 = \frac{(1-\nu)E}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}$$

(II) 円柱波($N=1$)の場合

平面応力に対し

$$E^* = E, \nu^* = \nu, a^* = a$$

$$c^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu^2)}$$

平面ひずみに対し

$$E^* = \frac{E}{1-\nu^2}, \nu^* = \frac{\nu}{1-\nu}, a^* = (1+\nu)a$$

$$c^2 = \frac{(1-\nu)E}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}$$

(III) 球波($N=2$)の場合

$$E^* = E, \nu^* = \nu, a^* = a$$

$$c^2 = \frac{(1-\nu)E}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}$$

である。

3. 特性曲線方程式

$r-t$ 平面において、応力 σ_r, σ_θ と速度 v は連続であるが、それらの導関数は不連続となる曲線が存在し得る。これらの曲線を特性曲線と呼び、式(2)～(4)の系に対しては、等温問題の場合⁽²⁾と同様に、次式で与えられる。

$$I^+ : dr/dt = +c \quad \dots \dots \dots \quad (8)$$

$$I^- : dr/dt = -c \quad \dots \dots \dots \quad (9)$$

$$II : dr = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (10)$$

ここで、 I^+ は導関数の不連続量が $r-t$ 平面内で速度 c で右方向に、 I^- は左方向に伝ばすることを示す。また、 II は $r=$ 一定の曲線に沿う条件を表す。特性曲線に沿って $\sigma_r, \sigma_\theta, v$ が支配される方程式を特性曲線方程式と呼び、それぞれ次式で与えられる。

① I^+ に沿って

$$\begin{aligned} d\sigma_r - \rho c dv &= \left\{ -N(\sigma_r - \sigma_\theta) \right. \\ &\quad \left. + \rho c \nu^* v \left[\frac{N}{1-(N-1)\nu^*} \right] \right\} \frac{dr}{r} \\ &\quad - \frac{\rho c (1+\nu^*) a^*}{[1-(N-1)\nu^*]} \frac{\partial T}{\partial t} dr \quad \dots \dots \dots \quad (11) \end{aligned}$$

② I^- に沿って

$$\begin{aligned} d\sigma_r + \rho c dv &= \left\{ -N(\sigma_r - \sigma_\theta) \right. \\ &\quad \left. - \rho c \nu^* v \left[\frac{N}{1-(N-1)\nu^*} \right] \right\} \frac{dr}{r} \\ &\quad + \frac{\rho c (1+\nu^*) a^*}{[1-(N-1)\nu^*]} \frac{\partial T}{\partial t} dr \quad \dots \dots \dots \quad (12) \end{aligned}$$

③ II に沿って

$$\begin{aligned} \nu^* d\sigma_r &= [1-(N-1)\nu^*] d\sigma_\theta - \frac{E^* v}{r} dt \\ &\quad + a^* E^* dT \quad \dots \dots \dots \quad (13) \end{aligned}$$

特性曲線方程式(11)～(13)は、 σ_r, σ_θ および v の導関数は不連続となり得るが、それらの値は連続である応力場に適用できる。しかしながら、急激荷重が作用する問題等においては、 $\sigma_r, \sigma_\theta, v$ 自身が不連続となり、式(11)～(13)は波頭におけるこれらの不連続性を表現していない。特性曲線に沿う式(11), (12)の極限操作を行うことにより、特性曲線を横切っての応力と速度の不連続量 $\delta\sigma_r, \delta\sigma_\theta, \delta v$ は等温問題⁽²⁾⁽³⁾と同様に、次式で与えることができる。

$$\left. \begin{aligned} \delta\sigma_r &= Cr^{-N/2} \\ \delta\sigma_\theta &= \frac{\nu^*}{1-(N-1)\nu^*} Cr^{-N/2} \\ \delta v &= \mp \frac{1}{\rho c} Cr^{-N/2} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (14)$$

ただし、 C は境界条件から決定される定数である。また、 δv の表示式中の上側の符号は I^+ 、下側の符号は I^- に対応する。

4. 基礎式の差分表示

4.1 リープフロッグ(leap frog)法による差分式
式(5)は変位 u を変数とする 2 階の微分方程式であり、ラプラス変換法等の適用に適している。しかしながら、本報での特性曲線/差分法による解法では、波頭を含めた領域内部の点に対しては、 $\sigma_r, \sigma_\theta, v$ を変数とする 1 階の三元連立微分方程式(2)～(4)を差分表示して用いる。式(2)～(4)は双曲形方程式であり、

波頭において応力と速度が不連続となる急激荷重の作用する問題にも適用できる。

図1に $r-t$ 平面での差分格子および波頭を示す。熱伝導方程式(1)をリープフロッグ法⁽⁴⁾により差分表示すれば

$$T_D = \frac{1-2p}{1+2p} T_E + \frac{2p}{1+2p} (T_c + T_A) \\ + \frac{q}{1+2p} \frac{N}{r_p} (T_c - T_A) \quad \dots \dots \dots \quad (15)$$

ただし、

$$p = \Delta t / (\Delta r)^2, \quad q = \Delta t / \Delta r$$

同様に、式(2)～(4)を中心差分表示すれば

$$v_D = v_E + \frac{2\Delta t}{\rho} \left\{ \frac{\sigma_{rc} - \sigma_{rA}}{2\Delta r} + \frac{N}{r_p} \left(\frac{\sigma_{rc} + \sigma_{rA}}{2} - \frac{\sigma_{\theta C} + \sigma_{\theta A}}{2} \right) \right\} \dots \dots \dots (16)$$

$$\sigma_{rD} = \sigma_{rE} + 2\bar{E}\Delta t \left\{ [1 - (N-1)\nu^*] \frac{\nu_c - \nu_A}{2\Delta r} + N\nu^* \frac{\nu_c + \nu_A}{2\nu_D} \right\} - \frac{\alpha^* E^*}{1 - N\nu^*} (T_D - T_E) \dots\dots (17)$$

$$\sigma_{\theta D} = \sigma_{\theta E} + 2\bar{E}\Delta t \left\{ \frac{v_c + v_A}{2r_D} + \nu^* \frac{v_c - v_A}{2\Delta r} \right\} - \frac{\alpha^* E^*}{1 - N\nu^*} (T_D - T_E) \quad \dots \dots \dots \quad (18)$$

を得る。リープフログ法による差分式(15)は任意の格子比 $\Delta t/(\Delta r)^2$ の値に対して安定⁽⁴⁾であり、双曲形方程式の差分式(16)～(18)は $\Delta r \geq c\Delta t$ に対して安定⁽³⁾である。

4・2 特性曲線方程式の離散化

4・2 特性曲線方程式の離散化 一般に、差分法による解法では、弾性体の境界あるいは異種材料の界面上の点に対しては仮想差分格子点を必要とし、仮想格子点での関数値の仮定の仕方が解の精度に大きく影響するため、熱衝撃波の反射を含むような問題には不向きである。そこで、特性曲線/差分法による解法では、弾性体の境界あるいは異種材料の界面では、特性曲線方程式(11)～(13)を用いる。

いま、図2に示す $r-t$ 平面内の特性曲線格子網を考える。微小格子区間内で関数値の線形変化を仮定して、式(11)～(13)を特性曲線に沿って積分すれば、それぞ

れ次式の離散化式を得る。

① I⁺に沿って

$$\begin{aligned} & \sigma_{rD} - \sigma_{rA} - \rho c(v_D - v_A) \\ &= \left\{ -N \left(\frac{\sigma_{rD} + \sigma_{rA}}{2} \right) - \left(\frac{\sigma_{\theta D} + \sigma_{\theta A}}{2} \right) \right. \\ &+ \rho c v^* \left[\frac{N}{1 - (N-1)v^*} \right] \frac{v_L + v_A}{2} \left. \right\} \frac{d_r}{r_D} \\ & - \frac{\rho c^2 (1 + v^*) \alpha^*}{1 - (N-1)v^*} (T_D - T_A) \dots \dots \dots (19) \end{aligned}$$

② I⁻に沿って

$$\begin{aligned} & \sigma_{rd} - \sigma_{rc} + \rho c(v_d - v_c) \\ &= \left\{ +N\left(\frac{\sigma_{rd} + \sigma_{rc}}{2}\right) - \left(\frac{\sigma_{\theta d} + \sigma_{\theta c}}{2}\right) \right. \\ &+ \rho c v^* \left[\frac{N}{1-(N-1)v^*} \right] \frac{v_L + v_c}{2} \left. \right\} \frac{\Delta r}{r_d} \\ &+ \frac{\rho c^2(1+v^*)\alpha^*}{1-(N-1)v^*} (T_d - T_c) \dots \quad (20) \end{aligned}$$

③ IIに沿って

$$\sigma_{rD} - \sigma_{rE} = \frac{1 - (N-1)\nu^*}{\nu^*} (\sigma_{\theta D} - \sigma_{\theta E}) \\ - \frac{E^*}{\nu^*} \cdot \frac{v_D + v_E}{2} \cdot \frac{\Delta t}{r_D} + \frac{\alpha^* E^*}{\nu^*} (T_D - T_E) \\ \dots \dots \dots (21)$$

ただし、上式における密度 ρ 、速度 c 、および弾性定数 E^* 、 ν^* は、図 2 に示すような $r=R_1$ で接合された複合材料に対しては、それぞれ内層(1)および外層(2)の材料の値を取るものとする。この時、弾性体の境界上での値は式(19)～(21)より得られる。例えば、図 2(b) に示すように、内層材料の境界 $r=R_1$ 上の点 d で 3 変数 σ_{rd} 、 σ_{bd} 、 v_d の内の 1 個が規定されれば、残りの 2 変数は内層材料に対する I⁺ に沿う式(20)お

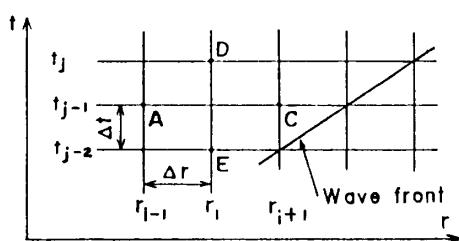


図 1 差分格子

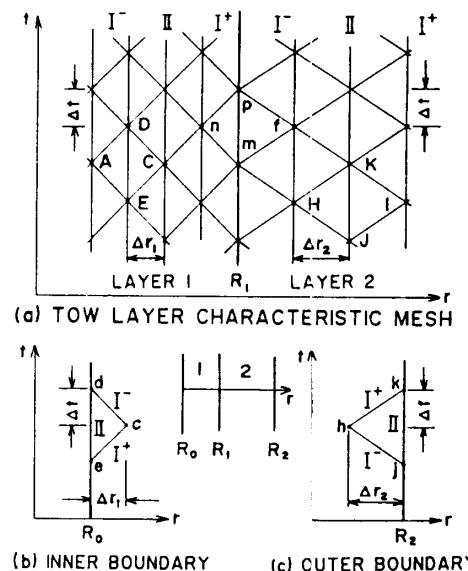


図 2 特性曲線格子

よりIIに沿う式(21)より得られる。また図2(c)に示すように、外層材料の外側境界 $r=R_2$ 上の点kで3変数 $\sigma_{rk}, \sigma_{\theta k}, v_k$ の内の1個が規定されれば、残りの2変数は外層材料に対する I⁺ に沿う式(19)およびIIに沿う式(21)より得られる。

次に、複合材料の場合の接合界面での条件を考える。図2(a)に示す接合界面 $r=R_1$ 上の点 p での温度条件は

ただし、添字 1, 2 はそれぞれ内層(1)、外層(2)の材料を示し、 λ は熱伝導率である。式(22)を用いて式(23)を差分表示すれば、界面上の点 p での温度 T_p が求められる。

また、接合界面での力学的境界条件は、界面において σ_r とりが等しいことより

一般に、接合界面両側での σ_θ の値は異なり、したがって、接合界面上の点 p での未知数は σ_{rp} , $(\sigma_{\theta p})_1$, $(\sigma_{\theta p})_2$, v_p の 4 個である。これらは内層に対する式(19), (21)と外層に対する式(20), (21)の合計 4 個の式より得ることができる。

5. 數值計算例

5・1 半無限体の動的熱衝撃問題

5・1 半無限体の動的熱衝撃問題 本解析方法の有効性を検証するため、まず理論解の得られている半無限体($x \geq 0$)の端面 $x=0$ がランプ加熱される問題^{(5)～(7)}を考える。温度場の初期条件および境界条件は

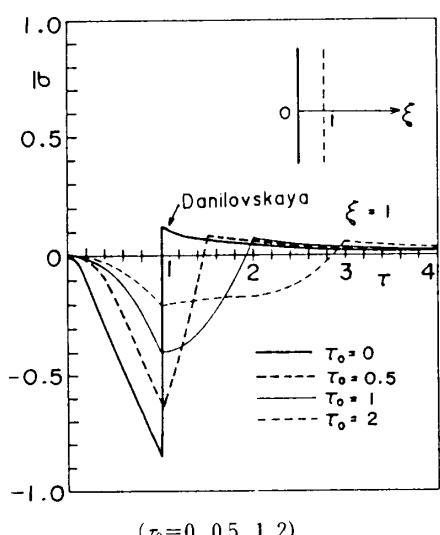


図 3 ランプ加熱を受ける半無限体の σ の時間的変動

$$\left. \begin{aligned} T(x, 0) &= 0 & (-\infty < t < 0) \\ T(0, t) &= (T_0/t_0)t, & (0 \leq t \leq t_0) \\ T(0, t) &= T_0, & (t_0 \leq t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

ここで、 T_0 は一定温度、 t_0 は一定時間である。 $t_0=0$ の場合は Danilovskaya⁽⁵⁾によるステップ加熱の問題に相当する。熱応力場に対する初期条件および境界条件は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x(x, 0) &= 0, & v(x, 0) &= 0, & (-\infty < t < 0) \\ \sigma_x(0, t) &= 0, & & & (0 \leq t \leq \infty) \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (27)$$

本論文では、次式の無次元量を導入する。

$$\left. \begin{aligned} \xi &= cx/\kappa, & \tau &= c^2 t/\kappa \\ \bar{T} &= T/T_0, & \bar{\sigma} &= \sigma_x/K \\ \bar{v} &= \rho c v / K \end{aligned} \right\} \dots \quad (28)$$

たたかひ

$$K \equiv \alpha E T_0 / (1 - 2\nu)$$

$$\tau_0 \equiv c^2 t_0 / x$$

以下の数値計算においては、ポアソン比 $\nu = 0.3$ と仮定した。この問題に対しては、温度の厳密解^{(5)~(7)}が利用できるが、本報では厳密解の利用が期待できない問題に対する応用を考慮して、温度は式(15)の差分式を用いて求めた。図3に $\tau_0 = 0, 0.5, 1, 2$ の場合の $\xi = 1$ の内点における $\bar{\sigma}$ の時間的変動を示す。 $\tau_0 = 0$ のステップ加熱場合、 $\bar{\sigma}$ および \bar{v} は $\xi = 1$ で不連続となる。 $\tau_0 > 0$ の場合、これらの値は連続であるが、それらの導関数は $\tau = 1$ および $\tau = 1 + \tau_0$ で不連続となる。

熱衝撃波に対する数値解は $\Delta x = c\Delta t$, ($\Delta\xi = \Delta\tau$) と取る場合が最も精度がよく、ランプ加熱の場合, $\Delta\xi = 0.01$ と取ることにより Sternberg ら⁽⁷⁾の解析解と誤差 1 % 以内の精度で一致する解を得た。 $\bar{\sigma}$, \bar{v} が不連続となるステップ加熱の場合、波頭近傍でわずかの精度低下が見られるが、この場合 $\Delta\xi = 0.001$ と取ることで波頭での誤差が解析解⁽⁵⁾⁽⁶⁾の 2 % 以下の解が得られた。

5・2 帯板の動的熱衝撃問題 本解析方法の応用として、端面 $x=0$ がランプ加熱される厚さ l の帯板の熱衝撃問題を考える。端面 $x=0$ での初期条件および境界条件は式(26), (27)と同じであり、端面 $x=l$ での条件は

$$\left. \begin{aligned} T(l, t) &= 0, & (0 \leq t) \\ \sigma_r(l, t) &= 0, & (0 \leq t) \end{aligned} \right\} \dots \quad (29)$$

無次元量は式(28)と同じであるが、新たに次の慣性パラメータ⁽⁸⁾を導入する。

図4に $\gamma=0.5$ 、図5に $\gamma=0.2$ の場合の $\tau_0=0, 0.5, 1,$

2に対する $\xi=1$ の内点における σ の時間的変動を示す。いずれの場合も、熱衝撃波が内外表面で反射を繰

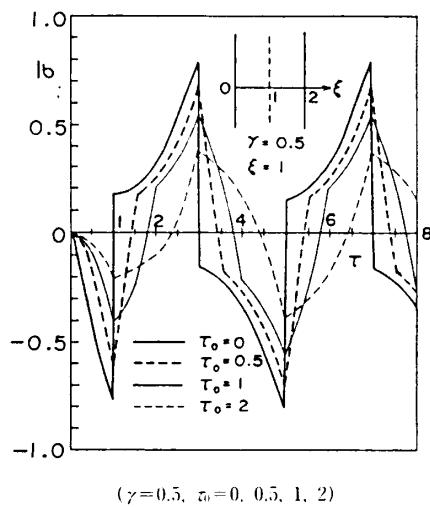


図 4 ランプ加熱を受ける帯板の σ の時間的変動

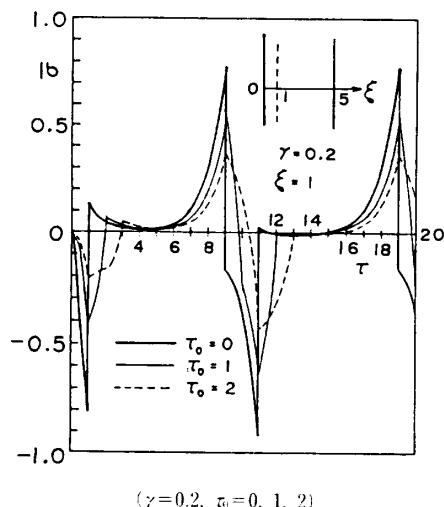


図 5 ランプ加熱を受ける帯板の σ の時間的変動

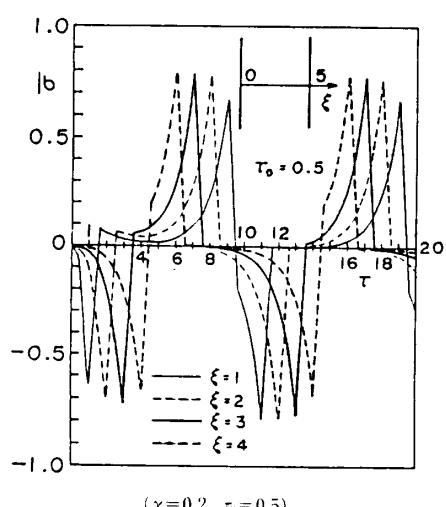


図 6 ランプ加熱を受ける帯板の σ の時間的変動

返すために不連続的に応力分布が変動する様子を示している。また図6は、 $\gamma=0.2, \tau_0=0.5$ の場合の内点 $\xi=1, 2, 3, 4$ における σ の時間的変動を示している。

5・3 複合平板の動的熱衝撃問題 本解析方法の複合材料への応用として厚さが l_1, l_2 である複合平板の熱衝撃問題を考える。材料1に対する端面 $x=0$ での条件式(26), (27)と同じであり、材料2に対する端

表 1 複合材料の材料定数

材料	λ_2/λ_1	α_2/α_1	ρ_2/ρ_1	c_2/c_1
I	1	1	1	1
II	2	1	1	1
III	1	2	1	1
IV	1	1	2	1
V	1	1	1	2
VI	1	1	1	0.5

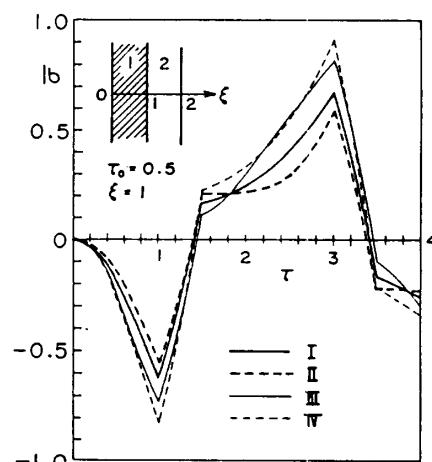


図 7 ランプ加熱を受ける複合平板の σ の時間的変動

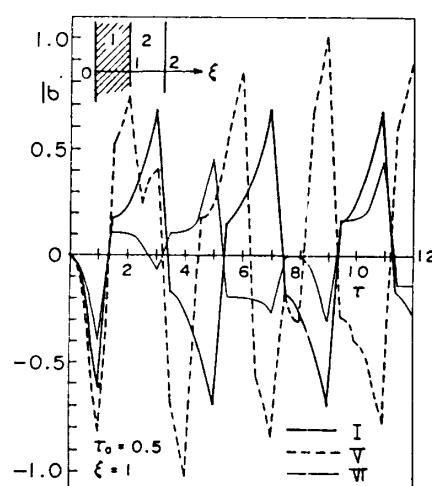


図 8 ランプ加熱を受ける複合平板の σ の時間的変動

面 $x = l_1 + l_2$ の条件は式(29), (30)と同じである。また、接合界面 $x = l_1$ の条件は温度場に対し式(22), (23), 応力場に対し式(24), (25)である。材料1の物性値を基準として材料定数の無次元化を行い、表1に示す複合材料に対して数値解を得た。表中材料Iは内外層の熱弾性定数が同一の単一材料の場合に相当する。 $l_1 = l_2$ の複合平板に対して、図7は $\gamma = 0.5$ の場合の複合材料I~IVの、図8は複合材料I, V, VIの接合界面 $\xi = 1$ での σ の時間的変動を示している。

6. 結 言

本報では、平面、円柱および球を含めた一次元動的熱衝撃問題の数値解析方法として、特性曲線／差分法による動的熱衝撃問題の解法の定式化を示し、本解析法を半無限体、帯板および複合平板の基本的な平面波の問題に適用した。その結果、波頭での不連続性を表す式(14)を用いなくても、十分な精度の解が得られるることを確認した。このことは、本解法によれば、境界あ

るいは界面での熱衝撃波の反射が自動的に考慮され、また解析において波頭の位置を知る必要がないので、多層の複合平板に代表される複雑な応力変動を示す問題にも非常に有効であることを意味している。本報では平面波の問題の数値計算を行ったが、基礎式が示すように円柱、球などの問題も全く同一の手法で簡単に処理できる。

文 献

- (1) 竹内、熱応力、(1971), 171, 日新出版。
- (2) Chou, P. C. and Koenig, H. A., *J. Appl. Mech.*, **33**-1(1966), 159.
- (3) Chou, S-C. and Greif, R., *AIAA J.*, **6**-6(1968), 1067.
- (4) 斎藤、機械の研究、**36**-9(1984), 1051.
- (5) Danilovskaya, V. I., *Prikl. Mat. i Mekh.*, **14**(1950), 316.
- (6) Mura, T., *Proc. 2nd Japan Natl. Congr. Appl. Mech.*, (1952), 9.
- (7) Sternberg, E. and Chakravorty, J. G., *J. Appl. Mech.*, **24**-4(1959), 503.
- (8) Sternberg, E. and Chakravorty, J. G., *Q. Appl. Math.*, **17**-2(1959), 205.