

材料定数の温度依存性が考慮された傾斜機能平板の動的熱応力解析*

須見 尚文*¹, 菅野 良弘*²Dynamic Thermal Stresses in a Functionally Graded Material
with Temperature-Dependent Material Properties

Naobumi SUMI and Yoshihiro SUGANO

This paper is concerned with the dynamic treatment of thermal stresses in an infinite plate of functionally graded material (FGM) subjected to uniform impulsive electromagnetic radiation. Heating is assumed to be a step function in time, and to diminish exponentially with the distance from the exposed surface of the plate, assuming negligible heat conduction. In treating problems, the nature of the stress-wave buildup in the absorption plate is studied for the case of a temperature-dependent solid, i. e., when material properties vary with temperature. The numerical procedure employs the characteristic method based on the integration of the governing equations along the characteristics. Numerical examples are presented for several PSZ (partially stabilized zirconia)/SUS₃₀₄ (type 304 stainless steel) FGM showing the significance of the dynamic effects and the temperature-dependent properties of material to the thermoelastic material design of FGM.

Key Words: Nonhomogeneous Thermoelasticity, Temperature-Dependent Property, Functionally Graded Material, Dynamic Thermal Stress, Wave Propagation

1. 緒 言

過酷な熱的使用環境下で所要の熱応力緩和を発現させるための傾斜機能材料(FGM)は、最適な傾斜組成分布をもたせる必要から不均質材料であり、またFGMの熱的使用環境は高温度、高温度落差の非常に過酷なものであるため、各種の材料定数は温度依存性の影響が大きく、熱応力緩和を目的とするFGMの最適組成分布の検討では、物性値の温度依存性を考慮した熱応力の解析が重要である。しかしながら、解析の困難さから材料定数の温度依存性が考慮されたFGMの非定常熱応力の研究は少なく、菅野らによる応力関数を用いた傾斜機能円筒⁽¹⁾、淵山らによる有限要素法を用いた傾斜機能円板⁽²⁾の研究が見受けられる程度である。

さて、弾性体が電磁波、レーザー、 γ 線等の照射・吸収によって急激かつ直接的に内部加熱を受ける場合、材料内部には衝撃的な動的熱応力が発生し、熱応力波の境界や界面での反射と干渉によって、材料内部には引

張りと圧縮の複雑かつ大きな衝撃応答が繰返され、均質材料に対しては多くの研究報告がなされている^{(3)~(7)}。一般に、熱応力緩和形傾斜機能材料は高温側にセラミックス、低温側に金属を配し、セラミックスから金属への組成を連続的に変化させて熱応力緩和や熱遮へい効果を高めるべく組成がテーラリングされる。そのために、脆性材料であるセラミックスに生じる引張応力の軽減は極めて重要となる。しかしながら、これまで傾斜機能材料の動的熱応力に焦点を絞った研究報告はない。

本研究では、電磁波などにより衝撃的に内部加熱を受けるPSZ/SUS₃₀₄傾斜機能平板の物性値の温度依存性を考慮した動的熱応力を、特性曲線法^{(8)~(10)}を用いて数値解析することにより、動的熱応力緩和に及ぼす材料定数の温度依存性の重要性を定量的に検討する。また、どのような傾斜組成が動的熱応力の緩和に有効かという観点からも考察を加える。

2. 問題の定式化および基礎式

図1に示すように、時間 $t \leq 0$ 、初期温度 T_0 において無応力かつ静止状態にある厚さ h の傾斜機能平板が、時間 $t=0$ の瞬間にその表面($x=0$)から電磁エネルギーを衝撃的に照射される場合に生じる一次元的

* 1994年11月9日 計算力学講演会において講演、原稿受付1995年2月23日。

*¹ 正員、静岡大学教育学部 (☎ 422 静岡市大谷 836)。

*² 正員、岩手大学工学部 (☎ 020 盛岡市上田 4-3-5)。

熱応力を解析する。この種の熱衝撃応答の特徴は、 l を特性距離、 κ を温度伝導率、 c を膨張波の伝ば速度とすると、熱拡散に関する特性時間 ($t_T = l^2/\kappa$) は熱応力波伝ばに関する特性時間 ($t_M = l/c$) に比べて非常に大きく、したがってエネルギー照射による衝撃的な内部発熱問題として熱伝導を無視できることにある。また、電磁エネルギーの照射時間 t_D は特性時間 t_M に比べ極めて短く、温度上昇は時間的にはデルタ関数で与えられ、空間的には指数関数的に減少する⁽⁶⁾。したがって、本論文での傾斜機能平板の温度分布は次式で与える。

$$T = T_0 + T_a H(t) e^{-x/l} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 T_0 は平板の初期温度、 T_a は照射エネルギーと材料の比熱等により決まるエネルギー照射面での一定温度上昇であり、 l はエネルギー吸収の特性距離であり、 $H(t)$ は Heaviside のステップ関数である。

さて、縦弾性係数 E 、ポアソン比 ν 、線膨張係数 α 、密度 ρ がいずれも座標 x と温度 T の関数である場合の一次元動的熱応力問題に対する基礎式は次式で与えられる。

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial t} = C_{11} \frac{\partial v}{\partial x} - \beta \frac{\partial}{\partial t} \int a dT \dots\dots\dots (3)$$

ただし、 σ_x は垂直応力、 v は粒子速度であり、 C_{11} と β は次式で定義される。

$$C_{11} = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \beta = \frac{E}{(1-2\nu)}$$

式(2)、(3)は σ_x と v に関する双曲形連立1階偏微分方程式であり、 $(x-t)$ 平面においては特性曲線⁽⁷⁾の方向 (I^+ , I^-) に沿って常微分関係式(特性曲線方程式)で与えられる。すなわち、特性曲線は

$$\frac{dt}{dx} = \pm \sqrt{\frac{\rho}{C_{11}}}, (I^+, I^-) \dots\dots\dots (4)$$

また、特性曲線方程式は次式で与えられる^{(8)~(10)}。

$$I^+ : d\sigma_x - \sqrt{\rho C_{11}} dv = -\beta \frac{\partial}{\partial t} \int a dT dt \dots\dots\dots (5)$$

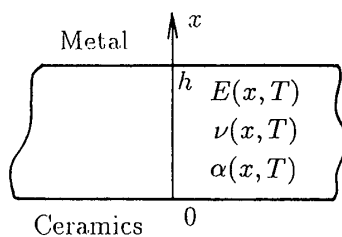


Fig. 1 Functionally graded material plate

$$I^- : d\sigma_x + \sqrt{\rho C_{11}} dv = -\beta \frac{\partial}{\partial t} \int a dT dt \dots\dots\dots (6)$$

3. 特性曲線法による数値解析

数値解法としての特性曲線法は、差分法がもとの偏微分方程式(2)、(3)を直接差分してこれを数値積分するのに対し、特性曲線方程式(5)、(6)を特性曲線(4)に沿って差分して数値積分する方法である。このため、熱応力波の不連続性を含む波頭の位置を含めて解析を行うことになるので、熱応力波伝ばの状況をより詳しく知り得るという利点がある。

さて、材料定数の温度依存性に起因する不均質特性により、式(4)の特性曲線は $(x-t)$ 平面では図2(a)に示すように曲線格子網となるが、各微小時間格子間隔 Δt に対して平板を $\Delta x_i = \Delta t / (\sqrt{\rho/C_{11}})_{x=x_i}$, ($i=1, 2, \dots, N$) を満足する N 層の不等間隔な多層平板に分割し、各平板内では物性値は一定として式(5)、(6)を積分して離散化すれば、応力および速度が順次決定される。すなわち、図2(b)に示すように、特性曲線 I^+ に沿って式(5)を点Aから点Dまで積分すれば

$$\sigma_{xD} - \sigma_{xA} - \frac{1}{2} \{ (\sqrt{\rho C_{11}})_D + (\sqrt{\rho C_{11}})_A \} (v_D - v_A) = - \int_A^D \beta \frac{\partial}{\partial t} \int a dT dt \dots\dots\dots (7)$$

特性曲線 I^- に沿って式(6)を点Cから点Dまで積分すれば

$$\sigma_{xD} - \sigma_{xC} + \frac{1}{2} \{ (\sqrt{\rho C_{11}})_D + (\sqrt{\rho C_{11}})_C \} (v_D - v_C) = - \int_C^D \beta \frac{\partial}{\partial t} \int a dT dt \dots\dots\dots (8)$$

したがって、式(7)、(8)より格子点Dにおける未知の応力 σ_{xD} と粒子速度 v_D は隣接の格子点A、Cにおける既知の諸量を用いて求められる。なお、弾性体の

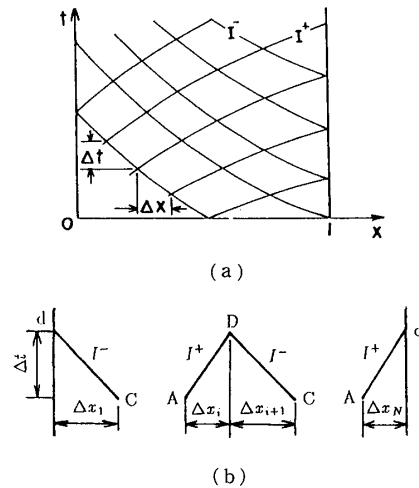


Fig. 2 Characteristic network for numerical procedure

境界上の点 $D=d$ に対しては、境界条件より $\sigma_{xd} \equiv 0$ であるので、 $x=0$ 上では式(8)より、 $x=h$ 上では式(7)より未知の速度 v_d が求められる。

4. 数値計算結果と考察

不均質材料として、高温側が耐熱・断熱材料として優れている部分安定化ジルコニア (PSZ) と低温側が高強度の SUS₃₀₄ からなり、図3の体積分率で示すような2種類の組成分布(a), (b)を有する PSZ/SUS₃₀₄ 熱応力緩和形傾斜機能平板を考える。組成分布(a)は PSZ と SUS₃₀₄ からなる線形の組成分布の場合であり、組成分布(b)は静的熱応力の緩和に有効とされているセラミックリッチな組成分布を示す。また、図中の実線は金属の体積分率 V_m を、破線はセラミックの体積分率 $V_c=1-V_m$ を示す。なお、PSZ および SUS₃₀₄ の温度範囲 ($300\text{ K} \leq T \leq 800\text{ K}$) における材料定数の温度依存性は次のように与えた⁽¹⁾。

(a) 線膨張係数 $\alpha[\text{K}^{-1}]$

$$\alpha_{\text{psz}}(T) = -1.39 \times 10^{-5} + 9.00 \times 10^{-8} T - 1.43 \times 10^{-10} T^2 + 1.12 \times 10^{-13} T^3 - 4.12 \times 10^{-17} T^4 + 5.76 \times 10^{-21} T^5$$

$$\alpha_{\text{sus}}(T) = 9.52 \times 10^{-6} + 2.01 \times 10^{-8} T - 8.37 \times 10^{-12} T^2$$

(b) 縦弾性係数 $E[\text{GPa}]$

$$E_{\text{psz}}(T) = 2.23 \times 10^2 - 6.91 \times 10^{-2} T + 1.45 \times 10^{-4} T^2 - 1.89 \times 10^{-7} T^3 + 9.55 \times 10^{-11} T^4 - 1.85 \times 10^{-14} T^5$$

$$E_{\text{sus}}(T) = 313 - 0.863 T + 2.03 \times 10^{-3} T^2 - 1.44 \times 10^{-6} T^3$$

なお、これらの材料のポアソン比および密度の温度依存性は小さいので、それぞれ一定と仮定し次の値を使用した。

(c) ポアソン比 ν

$$\nu_{\text{psz}} = 0.3, \nu_{\text{sus}} = 0.3$$

(d) 密度 $\rho[\text{kg/m}^3]$

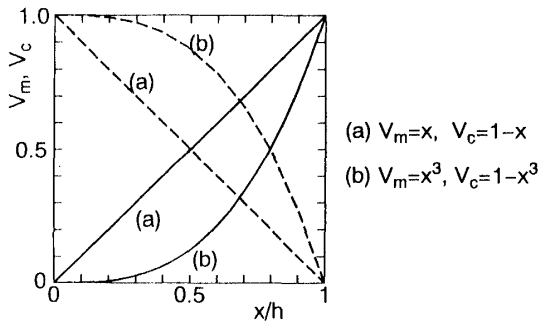


Fig. 3 Volume fraction V_m and V_c for (SUS₃₀₄) and (PSZ)

$$\rho_{\text{psz}} = 6\,070[\text{kg/m}^3], \rho_{\text{sus}} = 8\,000[\text{kg/m}^3]$$

このような組成成分をもつ傾斜機能材料の体積弾性係数 K , せん断弾性係数 G および線膨張係数 α は、次式の球状粒子分散形複合材料に対する Mori-Tanaka の理論⁽¹¹⁾ により求めた。

$$K = K_m + \xi(K_p - K_m)(3K_m + 4G_m) / [3K_m + 4G_m + 3(1-\xi)(K_p - K_m)] \dots\dots\dots (9)$$

$$G = G_m + \xi(G_p - G_m)[5G_m(3K_m + 4G_m) / [5G_m(3K_m + 4G_m) + 6(1-\xi)(K_m + 2G_m)] \times (G_p - G_m)] \dots\dots\dots (10)$$

$$\alpha = \xi\alpha_p + (1-\xi)\alpha_m + \xi(1-\xi)(\alpha_p - \alpha_m)(K_p - K_m) / [3K_p K_m / 4G_m + \xi K_p + (1-\xi)K_m] \dots\dots\dots (11)$$

ただし、上式において下添字 p および m の付いた諸量は、それぞれ粒子および母相の物性値を表す。これらの式の適用にあたっては、体積分率が 50% を越えているほうを母材、50% 以下のほうを分散粒子の材料とした。なお、密度は線形複合則により導出した。

数値計算にあたり、次の無次元量を用いた。

$$x^* = x/h, t^* = c_0 t/h, l^* = l/h, T^* = (T - T_0)/T_a$$

$$E^* = E/E_0, \nu^* = \nu/\nu_0, \alpha^* = \alpha/\alpha_0, \rho^* = \rho/\rho_0$$

$$(\sigma_x^*, \sigma_y^*) = \frac{1-\nu_0}{\alpha_0 E_0 T_a} (\sigma_x, \sigma_y), v^* = \frac{1-\nu_0}{1+\nu_0} \frac{1}{\alpha_0 T_a c_0} v$$

無次元化に使用した下添字 0, a の付いた諸量はセラミックスの温度 T_0, T_a における値を示し、数値計算において $T_0=300\text{ K}, T_a=500\text{ K}$ を採用した。特性曲線の時間格子間隔は、格子間隔の増減と解の収束性を吟味することにより $\Delta t^*=0.002$ と取った。この場合、平板の分割総数 N は温度依存性を考慮しない均質平板に対して $1/0.002=500$ 分割となるが、温度依存性を考慮した不均質平板の場合は不均質性の度合いによって異なる。

図4は式(1)による平板の温度分布を特性距離 l^* をパラメータとして示す。 $l^*=0.5$ の場合、平板の深部まで電磁エネルギーにより加熱され、加熱面 $x=0$ が

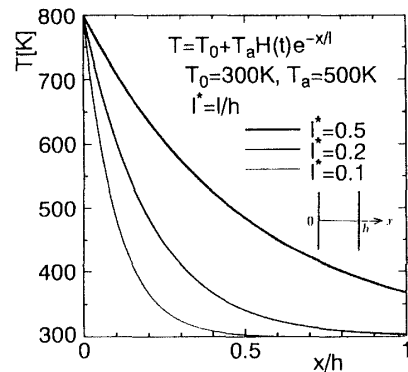
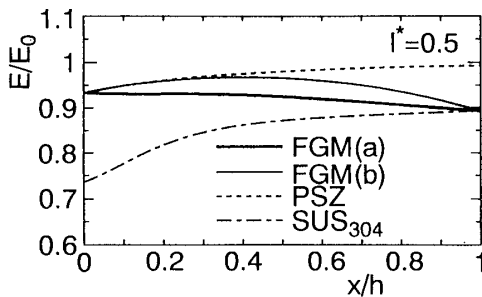
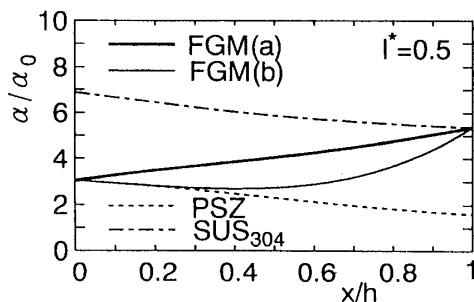


Fig. 4 Temperature distribution along x axis

$T = T_0 + T_a = 800$ K, 端面 $x = h$ が約 368 K に温度上昇する。 $l^* = 0.1$ の場合, 電磁エネルギーは平板の深部まで到達せず, 加熱面から平板中央面付近までのみが温度上昇する。

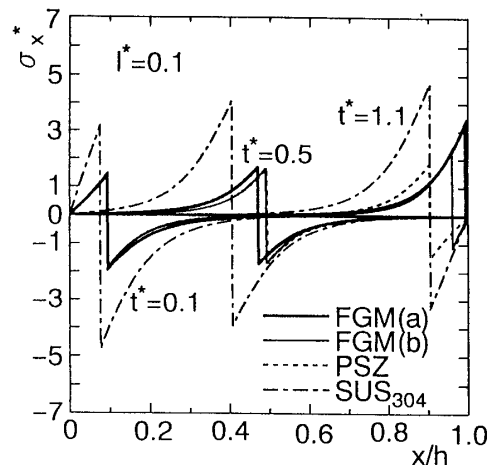
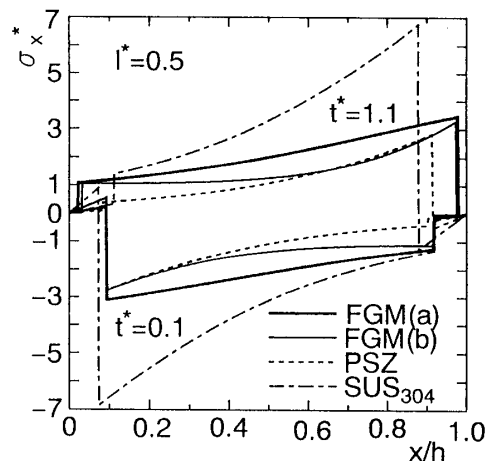
図 5 および図 6 は, $l^* = 0.5$ の場合の組成分布 (a), (b) の傾斜機能平板および PSZ, SUS₃₀₄ 単一材料からなる均質平板の縦弾性係数 E および線膨張係数 α の分布を示す。同一の温度上昇を受ける傾斜機能平板 (a), (b) においては, 縦弾性係数はセラミックリッチな組成分布 (b) の場合が大きく, 線膨張係数は線形な組成分布 (a) のほうが大きい。このことは, $l^* = 0.1$ の温度変化を受ける場合も同様な傾向を示すが, $l^* = 0.5$ の場合と比較して, 縦弾性係数は平板の各位置において大きく, 線膨張係数はかなり小さな値を示す。このように, 材料定数の温度依存性の影響は大きく, 初期に均質平板であっても温度分布をもてば不均質特性をもつ平板となり, 温度依存性を考慮した解析の必要性を示している。

図 7 および図 8 は, それぞれ $l^* = 0.1$ および $l^* = 0.5$ の場合の時間 $t^* = 0.1, 0.5, 1.1$ における σ_x^* の分布を示す。高温側に生じた大きな熱応力波頭は, 時間の経過とともに平板内部に伝ばし, 端面 $x = h$ で応力の符号を反転して反射し, $t^* = 1.1$ では $x/h = 0.9$ 付近まで到達している。以降, 時間の経過とともに平板の両表面での反射を繰り返す。図中の PSZ, SUS₃₀₄ はそれぞれの単一材料が式 (1) の温度変化を受けると仮定した場合

Fig. 5 Variation of E along x axisFig. 6 Variation of α along x axis

の結果を参考のために示している。実際には, 耐熱性, 強度などの面からこれらの材料を単独で使うことができず, 高温側には遮熱性, 耐熱性の優れたセラミックスを, 低温側には強度の高い金属を使用せねばならないが, 組成分布 (a), (b) のように組成を傾斜させることにより, 大きな熱応力緩和を実現できることがわかる。特に, 静的熱応力の緩和に有効であったセラミックリッチな組成分布 (b) が, 図 7 の $l^* = 0.1$ における応力分布が示すように, 動的熱応力の緩和にも有効であることがわかる。

図 9, 10 は線形の組成分布 (a) を, 図 11, 12 はセラミックリッチな組成分布 (b) を有する傾斜機能平板の $l^* = 0.5$ の場合の σ_x^* および σ_y^* の時間的変動を平板の位置 x^* をパラメータとして示す。組成分布 (a), (b) ともセラミックリッチな高温側 ($x^* = 0.2$) では圧縮応力が大きく, 引張応力が小さい。また, 金属リッチな低温側 ($x^* = 0.8$) では引張応力が大きく, 圧縮応力が小さい応力変動を繰り返す。すなわち, 組成分布 (a), (b)

Fig. 7 Variation of σ_x^* along x for $t^* = 0.1, 0.5, 1.1$ Fig. 8 Variation of σ_x^* along x for $t^* = 0.1, 1.1$

ともセラミック側で引張応力を小さくするという材料の FGM 化の効果を顕著に示している。なお、セラミックリッチな組成分布(b)のほうがより効果が現れている。

図 13 および図 14 は組成分布(b)の傾斜機能平板の $l^*=0.1$ における σ_x^* および σ_y^* の時間的変動を示す。組成分布(a)の場合もほぼ同じ変動を示す。平板の深部まで電磁エネルギーが到達しないより局所的な加熱

を受ける $l^*=0.1$ の場合には、組成分布(b)によって全体的には図 7 に見たような大きな熱応力緩和効果はあったが、平板のどの x^* においても同レベルの引張応力を生じていることから考えて、なお付与すべき組成分布に考察の余地があることがわかる。

5. 結 言

本論文では、電磁波などにより衝撃的に内部加熱を受ける傾斜機能平板の材料定数の温度依存性を考慮した動的熱応力を、特性曲線/差分法を用いて数値解析

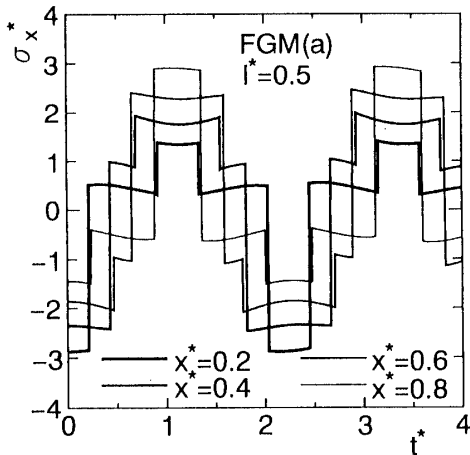


Fig. 9 Variation of σ_x^* versus t^* for FGM (a)

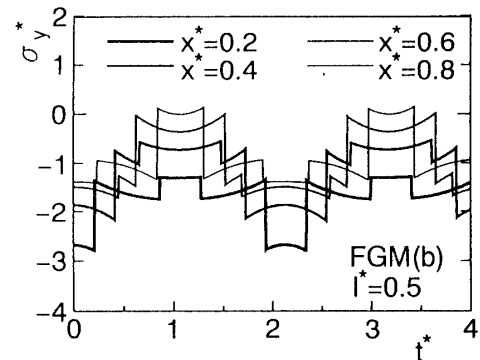


Fig. 12 Variation of σ_y^* versus t^* for FGM (b)

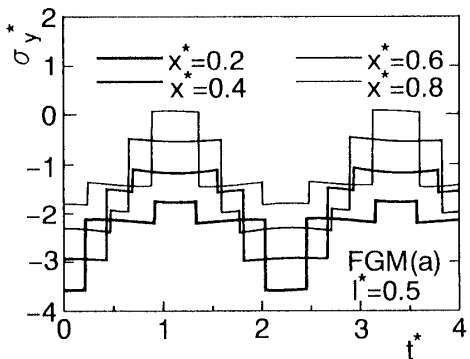


Fig. 10 Variation of σ_y^* versus t^* for FGM (a)

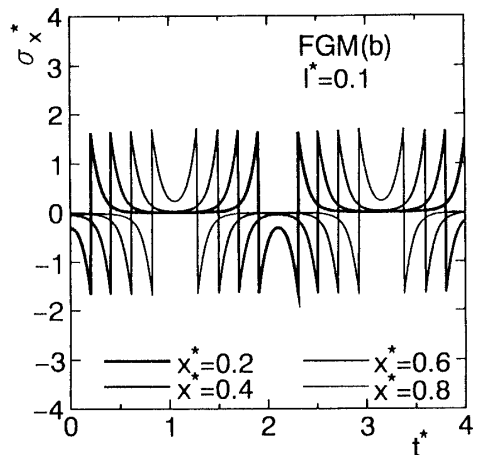


Fig. 13 Variation of σ_x^* versus t^* for FGM (b)

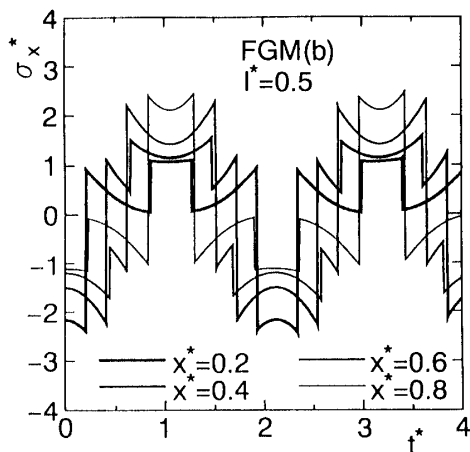


Fig. 11 Variation of σ_x^* versus t^* for FGM (b)

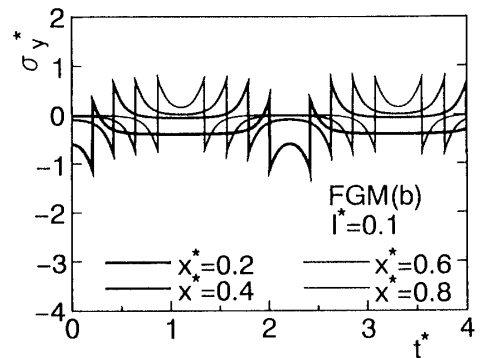


Fig. 14 Variation of σ_y^* versus t^* for FGM (b)

する方法を示した。本解法は、特性曲線に沿って特性曲線方程式を差分化するため、境界での熱衝撃波の反射が自動的に考慮され、鋭い波頭をもった解が得られた。また、解析において波頭の位置を知る必要がないので、動的熱応力の解析には非常に有効であることが示された。過酷な熱的環境下で使用される傾斜機能材料の物性値の温度依存性の影響は大きく、温度依存性を考慮した動的解析は不可欠であることがわかった。高温側にセラミックリッチな組成分布をもった傾斜機能材料を用いることにより、動的熱応力の大きな熱応力緩和が得られた。最後に、本研究は文部省科学研究費によることを記し、謝意を表す。

文 献

- (1) 菅野・ほか2名, 機論, 59-562, A (1993), 1505-1513.
- (2) 淵山・ほか3名, 機論, 59-564, A (1993), 1925-1930.
- (3) Zaker, T. A., *J. Appl. Mech.*, 32-1 (1965), 143-150.
- (4) Morland, L. W., *AIAA J.*, 6-6 (1968), 1063-1066.
- (5) Rausch, P. J., *J. Appl. Mech.*, 36-2 (1969), 340-342.
- (6) Hegemier, G. A. and Tzung, F., *J. Appl. Mech.*, 37-2 (1970), 339-344.
- (7) Johnston, B. M., *Nucl. Eng. Des.*, 9 (1969), 327-348.
- (8) Chou, P. C. and Koenig, H. A., *J. Appl. Mech.*, 33-1 (1966), 159-167.
- (9) Chou, S-C. and Greif, R., *AIAA J.*, 6-6 (1968), 1067-1074.
- (10) 須見・畑, 機論, 56-532, A (1990), 2514-2519.
- (11) Mura, T., *Micromechanics of Defects in Solids*, 2nd ed., (1987), 394, Martinus Nijhoff.