

衝撃加熱を受ける中空円筒の非軸対称動的熱応力*

須見尚文^{*1}, 吉川 浩^{*2}Asymmetric Dynamic Thermal Stresses in a Hollow Circular Cylinder
Caused by Sudden Heating

Naobumi SUMI and Hiroshi YOSHIKAWA

Two-dimensional asymmetric dynamic thermal stresses in a hollow circular cylinder subjected to a sudden time-dependent temperature field are studied numerically. The method employs the explicit finite difference approximations with second-order accuracy based on the integration of the governing equations along the bicharacteristics. Numerical calculations are carried out to analyze the propagation and reflection of thermal stress waves in a hollow circular cylinder subjected to sudden internal heat generation caused by the absorption of gamma-ray or electromagnetic radiation. The rate of heat generation is assumed to be constant for the duration of the pulse and to diminish exponentially with distance from the surface of cylinder and is an arbitrary function of the angle around the axis of the cylinder. Heating time is accounted for; however, heat conduction is ignored. Several numerical results are presented that illustrate the significance of the dynamic effects and their dependence on the coordinates and heating time.

Key Words: Thermal Stress, Wave Propagation, Hollow Circular Cylinder, Asymmetric Heat Generation, Bicharacteristic Method, Finite Difference Method

1. 緒 言

物体が電磁エネルギーの照射・吸収等により急激かつ直接的に内部加熱を受けると、材料内部には慣性効果によって動的熱応力が発生する。この場合の動的熱応力の特徴は、 l を特性距離、 κ を温度伝導率、 c を膨張波の伝ば速度とするとき、熱拡散に関する特性時間 ($t_r = l^2/\kappa$) は熱応力波伝ばに関する特性時間 ($t_M = l/c$) に比べて非常に大きく、したがって内部発熱による問題として熱伝導を無視できることにある。この種の問題の重要性は古くから認識され、種々の研究⁽¹⁾⁽²⁾がなされている。しかしながら、解析の困難さから、これら多くの解析は Sve ら⁽³⁾による二次元ガウス分布の温度変化を受ける無限円板の解を除いて、いずれも一次元問題としての解析である。

近年、核融合炉、宇宙空間等の過酷な熱的環境下で使用される機械構造物の設計において、熱衝撃によって生じる熱応力波の二次元あるいは三次元的詳細な伝ば挙動を把握する必要性が増大している。この種の動

的熱応力解析には種々の数値解析法が用いられるが、波頭に沿って成立する常微分関係式を数値積分して用いる従特性曲線法は、熱応力波の不連続性を含む波頭の位置を含めて解析を行うので、熱応力波の反射や干涉などの複雑な伝ばの様子を詳しく知り得る利点がある。このため、著者⁽⁴⁾は従特性曲線法を用いて円板状き裂を有する有限円筒の軸対称動的熱応力問題を解析し、また海津ら⁽⁵⁾は無限平板の三次元動的熱応力を解析している。しかしながら、電磁波等は必ずしも軸対称に放射されるとは限らず、したがって内部発熱の角度的変化を考慮した非軸対称問題の解析も必要とされている。しかしながら、これまで非軸対称動的熱応力問題の報告例は皆無である。

そこで本研究では、従特性曲線法を二次元非軸対称動的熱応力問題に適用することを目的として、非軸対称問題における従特性曲線方程式およびそれを数値解析するための差分方程式を導出した。数値解析例として、内部発熱が角度の任意関数で変化する中空円筒および任意角度で切断された中空円筒の非軸対称動的熱応力を解析し、熱応力波の伝ば挙動を調べた。

2. 理 論 解 析

2・1 基礎式 極座標 (r^*, θ^*) を用いれば、二次

* 1994年10月13日 材料力学講演会において講演、原稿受付
1995年5月8日。

*¹ 正員、静岡大学教育学部 (422 静岡市大谷 836)。

*² 常葉学園橘中学校 (420 静岡市瀬名 1268)。

衝撃加熱を受ける中空円筒の非軸対称動的熱応力

元非軸対称動的熱弾性問題における運動方程式は次式で与えられる。

$$\rho^* \frac{\partial u^*}{\partial t^*} = \frac{\partial \sigma_{rr}^*}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^*}{\partial \theta^*} + \frac{1}{r^*} (\sigma_{rr}^* - \sigma_{\theta\theta}^*) \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$\rho^* \frac{\partial w^*}{\partial t^*} = \frac{\partial \sigma_{r\theta}^*}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^*}{\partial \theta^*} + \frac{2}{r^*} \sigma_{r\theta}^* \quad \dots \dots \dots (2)$$

また、応力成分 σ_{ii}^* 、粒子速度成分 u^*, w^* および温度 T^* の関係は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}^*}{\partial t^*} &= (\lambda^* + 2\mu^*) \frac{\partial u^*}{\partial r^*} + \frac{\lambda^*}{r^*} \frac{\partial w^*}{\partial \theta^*} \\ &\quad + \lambda^* \frac{u^*}{r^*} - \beta^* \frac{\partial T^*}{\partial t^*} \quad \dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^*}{\partial t^*} &= \lambda^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*} (\lambda^* + 2\mu^*) \frac{\partial w^*}{\partial \theta^*} \\ &\quad + (\lambda^* + 2\mu^*) \frac{u^*}{r^*} - \beta^* \frac{\partial T^*}{\partial t^*} \quad \dots \dots \dots (4) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}^*}{\partial t^*} = \frac{\mu^*}{r^*} \frac{\partial u^*}{\partial \theta^*} + \mu^* \frac{\partial w^*}{\partial r^*} - \frac{\mu^*}{r^*} w^* \quad \dots \dots \dots (5)$$

ただし、 r^*, θ^* 軸方向の変位成分を U^*, W^* とするとき、 $u^* = \partial U^*/\partial t^*$, $w^* = \partial W^*/\partial t^*$ である。また、 ρ^* は密度、 λ^* と μ^* は Lame の定数であり、 a_t^* を線膨張係数とするとき $\beta^* = a_t^*(3\lambda^* + 2\mu^*)$ である。

2・2 従特性曲線方程式の差分方程式 本論文では、上添字 * のついた量は有次元量を表すものとして、定式化にあたっては対応する無次元量を次式として導入する。

$$\begin{aligned} r &= \frac{r^*}{a^*}, \quad t = \frac{c_t^* t^*}{a^*}, \quad b = \frac{b^*}{a^*}, \quad \eta = \frac{\eta^*}{a^*} \\ u &= \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)a_t^* T_0^* c_t^*} u^*, \quad w = \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)a_t^* T_0^* c_t^*} w^* \\ p &= \frac{(1-\nu)}{2a_t^* E^* T_0^*} (\sigma_{rr}^* + \sigma_{\theta\theta}^*), \\ q &= \frac{(1-\nu)}{2a_t^* E^* T_0^*} (\sigma_{rr}^* - \sigma_{\theta\theta}^*), \quad \tau = \frac{(1-\nu)}{2a_t^* E^* T_0^*} \sigma_{r\theta}^* \\ T &= \frac{T^*}{T_0^*}, \quad \lambda = \frac{\nu}{1-2\nu}, \quad \mu = \frac{1}{2}, \quad \rho = \beta = \frac{1-\nu}{1-2\nu} \end{aligned}$$

ただし、 T_0^* は基準温度、 E^* は縦弾性係数、 c_t^* は膨張波の伝ば速度である。

無次元化された基礎式(1)-(5)は双曲形 1 階偏微分方程式系であり、方向微分法⁽⁶⁾を用いれば、その従特性曲線に沿って成立する常微分関係式(従特性曲線方程式)は次式として得られる。

$$\begin{aligned} (1) \quad dr/dt &= c_1 n_r, \quad d\theta/dt = c_1 n_\theta/r^2 \text{ に沿って} \\ &- \rho c_1 n_r du - c_1 \frac{n_\theta}{r} dw - dp - \left(n_r^2 - \frac{n_\theta^2}{r^2} \right) dq \\ &- \frac{2n_r n_\theta}{r} d\tau = S_1(n_r, n_\theta) dt \quad \dots \dots \dots (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad dr/dt &= c_2 n_r, \quad d\theta/dt = c_2 n_\theta/r^2 \text{ に沿って} \\ &- \rho c_2 \frac{n_\theta}{r} du + \rho c_2 n_r dw - \frac{2n_r n_\theta}{r} dq \\ &+ \left(n_r^2 - \frac{n_\theta^2}{r^2} \right) d\tau = S_2(n_r, n_\theta) dt \quad \dots \dots \dots (7) \end{aligned}$$

ここで、 $S_1(n_r, n_\theta)$ および $S_2(n_r, n_\theta)$ はそれぞれ次式で定義される。

$$\begin{aligned} S_1 &= c_1 n_r \left\{ \left(n_r^2 - \frac{n_\theta^2}{r^2} \right) - 1 \right\} \frac{\partial q}{\partial r} + c_1 \frac{n_\theta}{r} \left\{ \left(n_r^2 - \frac{n_\theta^2}{r^2} \right) + 1 \right\} \frac{1}{r} \frac{\partial q}{\partial \theta} + c_1 \left\{ n_r \frac{2n_r n_\theta}{r} - \frac{n_\theta}{r} \right\} \frac{\partial \tau}{\partial r} \\ &\quad + c_1 \left\{ \frac{2n_r n_\theta}{r} \frac{n_\theta}{r} - n_r \right\} \frac{1}{r} \frac{\partial \tau}{\partial \theta} - \left\{ (\lambda + 2\mu) \frac{n_\theta^2}{r^2} + \mu \left(n_r^2 - \frac{n_\theta^2}{r^2} \right) - \mu \right\} \frac{\partial u}{\partial r} \\ &\quad - \left\{ (\lambda + 2\mu) n_r^2 - \mu \left(n_r^2 - \frac{n_\theta^2}{r^2} \right) - \mu \right\} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \lambda \frac{2n_r n_\theta}{r} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \lambda \frac{2n_r n_\theta}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \beta \frac{\partial T}{\partial t} \\ &\quad + \left\{ -(\lambda + \mu) + \mu \left(n_r^2 - \frac{n_\theta^2}{r^2} \right) \right\} \frac{u}{r} + \mu \frac{2n_r n_\theta}{r} \frac{w}{r} - c_1 n_r \frac{2q}{r} - c_1 \frac{n_\theta}{r} \frac{2\tau}{r} \quad \dots \dots \dots (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= -c_2 \left\{ \frac{n_\theta}{r} - n_r \frac{2n_r n_\theta}{r} \right\} \frac{\partial q}{\partial r} - c_2 \left\{ n_r - \frac{n_\theta}{r} \frac{2n_r n_\theta}{r} \right\} \frac{1}{r} \frac{\partial q}{\partial \theta} + c_2 n_r \left\{ 1 - \left(n_r^2 - \frac{n_\theta^2}{r^2} \right) \right\} \frac{\partial \tau}{\partial r} \\ &\quad - c_2 \frac{n_\theta}{r} \left\{ 1 + \left(n_r^2 - \frac{n_\theta^2}{r^2} \right) \right\} \frac{1}{r} \frac{\partial \tau}{\partial \theta} - c_2 \frac{n_\theta}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + c_2 n_r \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \frac{1}{2} \mu \frac{2n_r n_\theta}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \mu n_r^2 \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ &\quad - \mu \frac{n_\theta^2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{2} \mu \frac{2n_r n_\theta}{r} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \mu \frac{2n_r n_\theta}{r} \frac{u}{r} \\ &\quad - \mu \left(n_r^2 - \frac{n_\theta^2}{r^2} \right) \frac{w}{r} - c_2 \frac{n_\theta}{r} \frac{2q}{r} + c_2 n_r \frac{2\tau}{r} \quad \dots \dots \dots (9) \end{aligned}$$

上式中の n_r, n_θ は波面に垂直な法線 n の方向余弦であり

$$n_r = \frac{\partial n}{\partial r}, \quad n_\theta = \frac{\partial n}{\partial \theta}, \quad n_r^2 + \frac{n_\theta^2}{r^2} = 1$$

また、 c_1 および c_2 は無次元化された膨張波およびせん断波の伝ば速度であり、それぞれ次式で与えられる。

$$c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho} = 1, \quad c_2 = \sqrt{\mu/\rho} = c_1/\gamma \quad \dots \dots \dots (10)$$

式(6), (7)は、等温問題に対しては、対応する記号を置き換えれば Ziv の解⁽⁷⁾と一致し、独立変数が r のみの関数である場合、一次元問題に対する特性曲線方程式⁽⁸⁾と一致する。

さて、従特性曲線方程式(6), (7)から数値計算のための差分方程式を誘導する手順⁽⁶⁾は以下のとおりである。一般に、従特性曲線に沿って関数 $U(u, w, p, q, \tau)$ は常微分関係で与えられ、 $dU = g(n_r, n_\theta)dt$ と表される。今、特性曲面 (t, r, θ) における時間増分を k として、 $(n_r)_i, (n_\theta)_i$ とする従特性曲線に沿って式(6), (7)を $t=t_0-k$ 平面上の点 $i(t_0-k, r_i, \theta_i)$ から $t=t_0$ 平面上の点 $O(t_0, r_0, \theta_0)$ まで積分すれば、

ここで、 $\delta \mathbf{U} = \mathbf{U}^o - \mathbf{U}_0 = \mathbf{U}(t_0, r_0, \theta_0) - \mathbf{U}(t_0 - k, r_0, \theta_0)$ 、すなわち関数 \mathbf{U} の時間増分である。また、上添字 O および下添字 0 、下添字 i は、それぞれ特性曲面式の点 $O(t_0, r_0, \theta_0)$ および点 $0(t_0 - k, r_0, \theta_0)$ 、点 $i(t_0 - k, r_i, \theta_i)$ における関数値を示す。いま、特別な点として $i=1$ に対し $(n_r=1, n_\theta=0)$ 、 $i=2$ に対し $(n_r=0, n_\theta=r_0)$ 、 $i=3$ に対し $(n_r=-1, n_\theta=0)$ 、 $i=4$ に対し $(n_r=0, n_\theta=-r_0)$ である従特性曲線を用いて式(6)、(7)を式(11)に適用すれば合計8個の式が得られ、一方、基礎式(1)-(5)を時間軸に沿って点 0 から点 O まで積分すれば5個の式が得られる。これら合計13個の式を連立させて、関数 g^o に含まれる点 O における未知の偏導関数 U_r^o, U_θ^o を含む項を消去し、 $O(k^3)$ 以下の高次の微小項を省略すれば、領域内の任意点に対して成立する次式の連立の差分方程式が求められる。

$$2\rho c_1 \delta u = \lambda \frac{\xi^2}{c_1} \left(\frac{w}{r} \right)_\theta + \mu \gamma \frac{\eta \xi}{c_1 r_0} w_{r\theta} + \rho c_1 \xi^2 u_{rr} + \rho c_1 \frac{\eta^2}{r_0^2} u_{\theta\theta} + 2\xi p_r + 2\xi q_r + \gamma \frac{2\eta}{r_0} \tau_\theta \\ + \frac{\xi^3}{r_0} \left(\frac{q}{r} \right)_{rr} + \frac{\eta^2 \xi}{r_0^3} q_{\theta\theta} + \lambda \frac{\xi^2}{c_1 r_0} \left(\frac{u}{r} \right)_r - \mu \gamma \frac{\eta \xi}{c_1 r_0^2} w_\theta + \frac{2\xi}{r_0} (q^o + q_\theta) \quad \dots \dots \dots \quad (12 \text{-a})$$

$$2\rho c_1 \delta w = \lambda \frac{\eta \xi}{c_1 r_0} u_{r\theta} + \mu \gamma \frac{\xi^2}{c_1 r_0} \left(\frac{u}{r} \right)_{r\theta} + \rho c_1 \frac{\eta^2}{r_0^2} w_{\theta\theta} + \rho c_1 \xi^2 w_{rr} + \frac{2\eta}{r_0} p_\theta - \frac{2\eta}{r_0} q_\theta + 2\gamma \xi \tau_r \\ + \frac{\xi^3}{r_0} \left(\frac{\tau}{r} \right)_{rr} + \frac{\eta^2}{r_0^3} \tau_{\theta\theta} + (\lambda + 2\mu) \frac{\eta \xi}{c_1 r_0^2} u_\theta - \mu \gamma \frac{\xi^2}{c_1 r_0} \left(\frac{w}{r} \right)_r + \frac{2\xi}{r_0} (\tau^o + \tau_0) \quad \dots \dots \dots \quad (12\bullet b)$$

$$2\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\delta p = \frac{\xi^2}{r_0}\tau_{r\theta} + \frac{\eta\xi}{r_0}\left(\frac{\tau}{r}\right)_{r\theta} + \xi^2 p_{rr} + \xi^2 q_{rr} + \frac{\eta^2}{r_0^2}p_{\theta\theta} - \frac{\eta^2}{r_0^2}q_{\theta\theta} + 2\rho c_1\xi u_r + \rho c_1\frac{\eta}{r_0}w_\theta \\ + \frac{2\xi^2}{r_0}\left(\frac{q}{r}\right)_r + \frac{2\eta\xi}{r_0^2}\tau_\theta + \lambda\frac{\xi^3}{2c_1r_0}\left(\frac{u}{r}\right)_{rr} + (\lambda+2\mu)\frac{\eta^2\xi}{2c_1r_0^3}u_{\theta\theta} - 2\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\beta\delta T + (\lambda+2\mu)\frac{\xi}{c_1r_0}(u^o + u_0) \quad \dots \quad (12\bullet C)$$

$$2\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\partial q = \frac{\xi^2}{r_0}\tau_{r\theta} - \frac{\eta\xi}{r_0}\left(\frac{\tau}{r}\right)_{r\theta} + \xi^2 p_{rr} + \xi^2 q_{rr} - \frac{\eta^2}{r_0^2}p_{\theta\theta} + \frac{\eta^2}{r_0^2}q_{\theta\theta} + 2\rho c_1\xi u_r - 2\rho c_1\frac{\eta}{r_0}w_\theta \\ + \frac{2\xi^2}{r}\left(\frac{q}{\xi}\right) - \frac{2\eta\xi}{r^2}\tau + \lambda\frac{\xi^3}{2r^2}\left(\frac{u}{\xi}\right) - \lambda\frac{\eta^2\xi}{2r^2}\frac{u_{\theta\theta}}{\xi^3} - (\lambda+2\mu)\frac{\xi}{r}(u^o + u_0) \quad \dots \dots \dots \quad (12\bullet d)$$

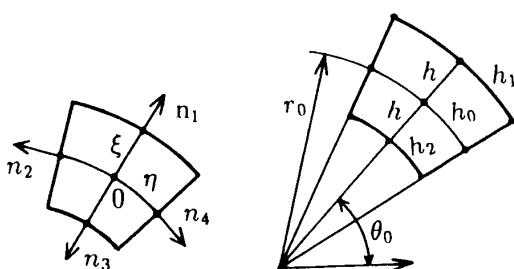
$$2\gamma\delta\tau = \frac{\xi^2}{r_0} \left(\frac{p}{r} \right)_{r\theta} - \frac{\xi^2}{r_0} \left(\frac{q}{r} \right)_{r\theta} + \frac{\eta\xi}{r_0} p_{r\theta} + \frac{\eta\xi}{r_0} q_{r\theta} - \mu \frac{\xi^3}{2C_1 r_0} \left(\frac{w}{r} \right)_{rr} - \mu \frac{\eta^2 \xi}{2C_1 r_0^3} w_{\theta\theta} + \frac{2\xi^2}{C_1 r_0} \left(\frac{\tau}{r} \right)_r \\ + \frac{2\eta\xi}{r_0^2} q_\theta + 2\rho C_1 \xi w_r + 2\rho C_1 \frac{\eta}{r_0} u_\theta + \xi^2 \tau_{rr} + \frac{\eta^2}{r_0^2} \tau_{\theta\theta} - \mu \frac{\xi}{C_1 r_0} (w^0 + w_0) \dots \quad (12e)$$

なお、式(12)の差分方程式の誘導においては、図1(a)に示す $t=t_0-k$ 上の特性曲面上の九つの差分格子点を用いて、次式によって差分評価した。

$$2\xi f_r = f(r_0 + \xi, \theta_0) - f(r_0 - \xi, \theta_0) \quad \dots \dots \dots (13-a)$$

$$\frac{2\eta}{r_0} f_\theta = f(r_0, \theta_0 + \delta\theta) - f(r_0, \theta_0 - \delta\theta) \quad \dots (13\bullet b)$$

$$\xi^2 f_{\pm} \equiv f(x_0 + \xi, \theta_0) + f(x_0 - \xi, \theta_0) - 2f(x_0, \theta_0)$$



(a) Characteristic points (b) Finite difference points

$$\frac{\eta^2}{r_0^2} f_{\theta\theta} = f(r_0, \theta_0 + \delta\theta) + f(r_0, \theta_0 - \delta\theta)$$

$$\frac{2\eta\xi}{r_0} f_{rs} = f(r_0 + \xi, \theta_0 + \delta\theta) - f(r_0 - \xi, \theta_0 + \delta\theta) - f(r_0 + \xi, \theta_0 - \delta\theta) + f(r_0 - \xi, \theta_0 - \delta\theta)$$

ここで $\hat{c} = c, k = x, \delta\theta$ です。

Fig. 1. Characteristic and finite-difference points.

なお、円筒の内外境界上の点、任意角度で切断された円筒の端面上の点や角の点では、特性曲面の一部が領域外に位置し、この領域外となる特性曲線に沿う微分関係式は利用できなくなり差分方程式の数が減少することになるが、その不足分は力学的境界条件で補足されるので、結果として、それぞれの点での未知数の数に応じた差分方程式が求められる。例えば、円筒の外側境界上の点では $i=1$ に対応する特性曲線が存在しない。この場合、式(12-a)から(12-e)をさらに組合せて $i=1$ に対応する微分関係式を消去すれば、3個の差分方程式が得られる。この外側境界上の点においては2個の力学的境界条件が与えられるので、結果として未知数の数に応じた方程式が得られる。その他の点についても同様な方法で差分方程式が得られる。

3. 数 値 計 算

上述の解析の具体的応力例として、最初、静止状態にある内半径 a 、外半径 b の中空円筒が、時間 $t=0$ の瞬間からその内面に電磁エネルギーを衝撃的に照射される場合に生じる二次元非軸対称動的熱応力を解析する。動的熱応力の初期応答を取扱うとき、熱拡散による温度変化の影響は弾性波の伝ばに比べ非常に遅いので、熱伝導は無視し、中空円筒の非定常温度分布は、時間的にはランプ加熱され、空間的には半径方向に指數関数的に減少し、円周方向には角度の任意関数で変化する⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾ ものとして次式で与える。

$$T = f(t)\{1+g(\theta)\}e^{-\eta(r-a)} \quad \dots \dots \dots (14)$$

ただし、 η は無次元の照射エネルギー吸収係数である。また、 t_0 を温度の立上り時間(加熱時間)とすると、 $f(t)$ と $g(\theta)$ は次式で定義される。

$$f(t) = \begin{cases} t/t_0, & t \leq t_0 \\ 1, & t \geq t_0 \end{cases}, \quad g(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sin n\theta \quad \dots \dots \dots (15)$$

ポアソン比 $\nu=1/3$ と仮定し、 $a=1$ 、 $b=2$ の中空円筒および任意の角度で切断された中空円筒について数值計算を行い、動的熱応力の伝ば挙動を調べた。なお、

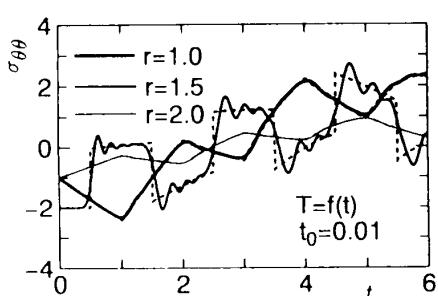


Fig. 2 Variation of $\sigma_{\theta\theta}$ at $r=1.0, 1.5, 2.0$

力学的境界条件は全境界応力自由とした。

数値計算においては、各差分方程式に含まれる偏導関数を領域内部の点に対しては中央差分、境界・端面および角の点に対しては前方および後方差分を用いて差分近似した。その際、差分法における数値解の安定条件を考慮して、無次元時間格子間隔 $k=\xi=0.01$ に対して無次元空間格子間隔を

$$h=4\xi, h_0=4\eta, h_1=4(r_0+h)\delta\theta,$$

$$h_2=4(r_0-h)\delta\theta$$

と取ることで安定した解が得られた。ただし、 h, h_0, h_1, h_2 は図 1(b)に示す極座標系の空間差分格子間隔である。

まず中空円筒の動的熱応力の伝ば挙動を吟味するために、式(14)の温度分布において円筒全体が立上り時間 $t_0=0.01$ で一様に軸対称加熱される場合 [$g(\theta)=0, \eta=0$] の内外表面 $r=1, 2$ および内部の点 $r=1.5$ における $\sigma_{\theta\theta}$ の時間的変動を図 2 に示す。図中の実線は本論文での二次元解、波線は対応する著者⁽⁸⁾による一次元解である。円筒の内外表面 $r=1, 2$ では両者の解はよく一致しているが、円筒の内面および外面からの反射波が干渉する内部の点 $r=1.5$ においては二次元解は鋭い波頭を示さず、波頭近傍では一次元解を中心で振動している。この円筒内部の点における波頭近傍での応力の振動現象は、立上り時間 t_0 が緩やかになるにつれて小さくなり、二次元解と一次元解はほぼ一致する。

次に、非軸対称動的熱応力の解析例として、無次元化された温度分布式(14)、(15)において $n=1$ と取り、 $t_0=0.01, \lambda_1=0.5, \eta=0.5$ と仮定した場合、すなわち

$$T = f(t)\left\{1 + \frac{1}{2} \sin \theta\right\} e^{-0.5(r-1)} \quad \dots \dots \dots (16)$$

で与えられる温度分布(図 3 の三次元分布参照)を受ける中空円筒の内部の点 $r=1.5$ における σ_{rr} および $\sigma_{\theta\theta}$ の時間的変動を図 4 および図 5 に、円筒の内面 $r=1.0$ および外面 $r=2.0$ における $\sigma_{\theta\theta}$ の時間的変動を図 6

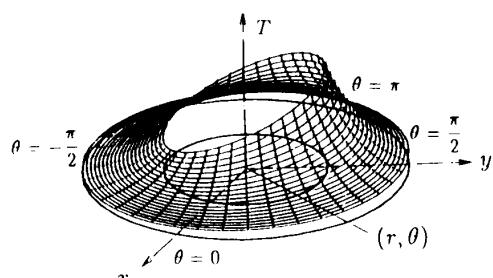


Fig. 3 Temperature distribution for
 $T = f(t)\{1 + 1/2 \sin \theta\}e^{-0.5(r-1)}$

および図7に示す。加熱の直後には圧縮の応力状態であった内部の点は、円筒の内外表面からの最初の引張りの応力波が到達すると、急激に圧縮状態が解放され引張応力状態になり、その後、内外表面で位相が逆転した圧縮の応力波の到達によって再び圧縮状態となる。以後、円筒の内外表面での反射波の影響によって

圧縮と引張りの応力状態を交互に繰返す。 $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{rr} ともに時間の経過とともに、振動しながら徐々に引張応力状態に向うが、これは最初に生じた円筒の内面と外面上における応力の大きさの違いによるものである。

さらに、非軸対称領域における動的熱応力の解析例として、図2の場合と同じく、全体が立上り時間 $t_0 =$

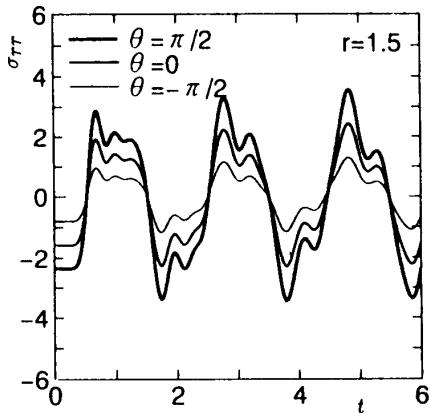


Fig. 4 Variation of σ_{rr} at $r = 1.5$

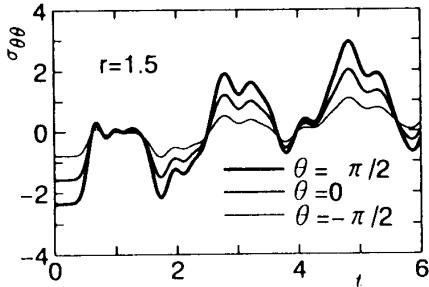


Fig. 5 Variation of $\sigma_{\theta\theta}$ at $r = 1.5$

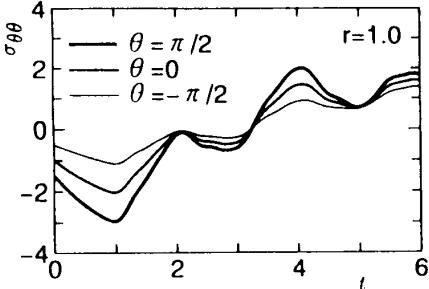


Fig. 6 Variation of $\sigma_{\theta\theta}$ at $r = 1.0$

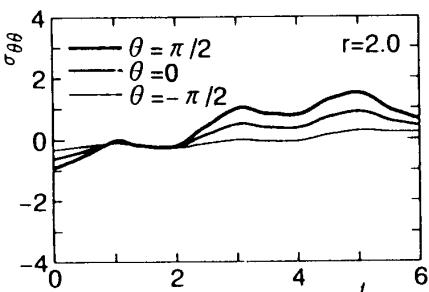


Fig. 7 Variation of $\sigma_{\theta\theta}$ at $r = 2.0$

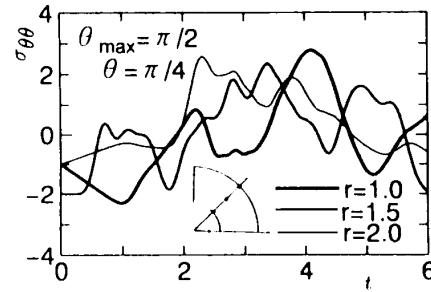


Fig. 8 Variation of $\sigma_{\theta\theta}$ at $r = 1.0, 1.5, 2.0$ and $\theta = \pi/4$

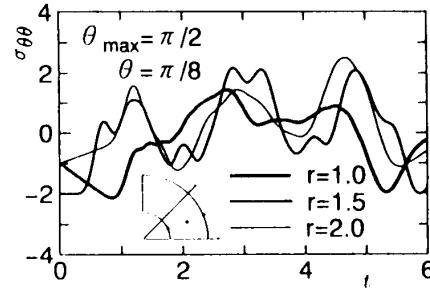


Fig. 9 Variation of $\sigma_{\theta\theta}$ at $r = 1.0, 1.5, 2.0$ and $\theta = \pi/8$

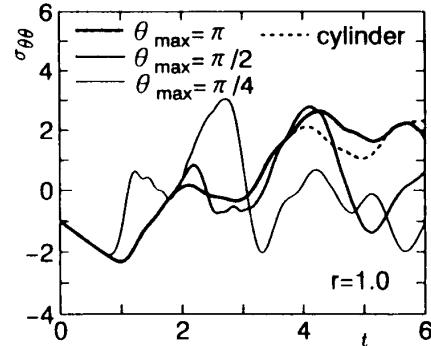


Fig. 10 Variation of $\sigma_{\theta\theta}$ at $r = 1.0$, $\theta = \theta_{\max}/2$

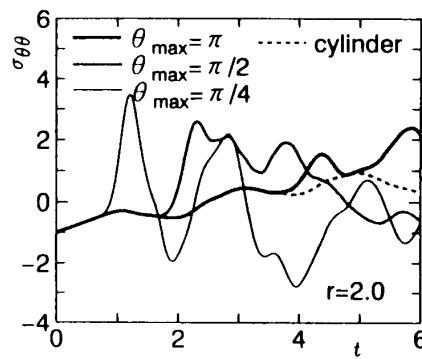


Fig. 11 Variation of $\sigma_{\theta\theta}$ at $r = 2.0$, $\theta = \theta_{\max}/2$

0.01 で一様に軸対称加熱される場合 [$g(\theta)=0, \eta=0$] の任意角度で切断された中空円筒の動的熱応力を図 8-11 に示す。図 8 および図 9 は x, y 軸で切断され 1/4 円筒 [以後 ($\theta_{\max}=\pi/2$) と記す] の $\theta=\pi/4$ および $\theta=\pi/8$ における $\sigma_{\theta\theta}$ の時間的変動を示す。軸対称領域に軸対称な温度分布が作用する図 2 の場合には、半径方向の膨張波が内外表面で反射・干渉するだけであるが、非軸対称領域である図 8 および図 9 の場合には、円筒の内外表面での反射波に加えて切断された端面からの反射波も干渉し、膨張波とせん断波が複雑に干渉しあうので、図 2 に示す中空円筒に比べて複雑な応力変動を示している。また、領域の非軸対称性により、場所によって応力変動の様子が大きく異なっている。図 10 および図 11 は、 $r=1, \theta=\theta_{\max}/2$ および $r=2, \theta=\theta_{\max}/2$ の位置での動的熱応力を円筒の切断角度 θ_{\max} をパラメーとして示す。図中の波線は同じ温度分布を受ける中空円筒の解である。切断角度が小さい $\theta_{\max}=\pi/4$ の場合は $t=0.8$ 付近まで、切断角度が大きい $\theta_{\max}=\pi$ の場合は $t=3.5$ 付近まで中空円筒の解と一致しているが、それ以後は領域の非軸対称性に依存した内外表面および端面からの反射波の複雑な干渉のため中空円筒とは違った応力変動を示す。

4. 結 言

本論文では、電磁波等により非軸対称加熱を受ける中空円筒あるいは任意角病で切断された中空円筒の非軸対称動的熱応力を従特性曲線法を用いて定式化し、これを差分法により数値解析した。中空円筒の二次元解は円筒の内外表面で応力波が反射され、一次元解とは異なった複雑かつ大きな応力変動が示され、また任意角度で切断された中空円筒では端面においても応力波が発生したり反射したりするなどの本解法の確立により、非軸対称動的熱応力も容易に解析できることが示された。最後に、本研究は文部省科学研究費によることを記し、謝意を表す。

文 献

- (1) 竹内洋一郎, 热応力, (1971), 171, 日新出版.
- (2) Bargmann, H., *Nucl. Eng. Des.*, **27**(1974), 372-385.
- (3) Sve, C. and Miklowitz, J., *J. Appl. Mech.*, **40-1**(1973), 161-167.
- (4) 須見尚文, 機論, **61-581**, A(1995), 13-19.
- (5) 海津浩一・ほか 3 名, 機論, **61-582**, A(1995), 395-401.
- (6) Clifton, R. J., *Q. Appl. Math.*, **25-1**(1967), 97-116.
- (7) Ziv, M., *Int. J. Solids Struct.*, **5**(1969), 1135-1151.
- (8) 須見尚文・伊藤禎元, 機論, **57-542**(1991), 2409-2414.
- (9) Rausch, P. J., *J. Appl. Mech.*, **36-2**(1969), 340-342.
- (10) Kraus, H. and Sonnemann, G., *J. Eng. for Pow.*, (1959), 449-454.