

## 区分的線形不均質性近似による傾斜機能平板の 非定常温度場の解析解\*

菅野良弘<sup>\*1</sup>, 佐藤恵一<sup>\*2</sup>, 須見尚文<sup>\*3</sup>

### An Analytical Solution to Transient Temperature Field in a Functionally Graded Material Plate by Piecewise- Linear Nonhomogeneity Approximation Method

Yoshihiro SUGANO, Keiichi SATO and Naobumi SUMI

An analytical solution is presented to the transient temperature field in a functionally graded material plate (FGM plate) heated at its surface. The FGM plate has arbitrary nonhomogeneities of thermal properties and temperature variation only through the thickness. The transient temperature field is determined by solving the nonhomogeneous heat conduction problem in a multilayered plate with piecewise-linear nonhomogeneous thermal conductivity, and different, homogeneous specific heat and density in each layer. Numerical calculations in order to demonstrate the applicability of the present analytical method are carried out for transient temperature distributions in PSZ/SUS304 FGM plates with linear and ceramic-rich compositional distributions.

**Key Words:** Nonhomogeneous Heat Conduction, Functionally Graded Material (FGM), Non-homogeneous Plate, Ceramics/Metal FGM Plate, Transient Temperature Field, Piecewise-Linear Nonhomogeneity, Analytical Solution

#### 1. 緒 言

物体が温度分布をもつとき物性値の温度依存性により、不均質体となるという理由から不均質体の熱座屈問題が、1968年にDeweyとCostello<sup>(1)</sup>によってポテンシャルエネルギー法で解析された。その後スペースプレーンの超耐熱軽量構造材料として熱応力緩和形傾斜機能材料なる概念が新野ら<sup>(2)</sup>によって発表され、この材料が典型的な不均質材料であることから、不均質材料および傾斜機能材料の熱応力解析への関心は飛躍的に高まってきた。すでに、傾斜機能材料からなる平板、円板、円筒などの熱応力緩和を目指した熱応力解析が公表されているが、いずれもその前段階として解析の困難な傾斜機能材料(任意の熱的不均質特性をもった材料)の温度解析が必要であり、傾斜機能材料を多層の均質層で近似<sup>(3)-(6)</sup>することにより非定常温度解析がなされている。傾斜機能材料の非定常温度解析に、このような従来の複合体の非定常温度場を解析する手法を最初に適用したのは、Arakiら<sup>(3)</sup>であり、ラブラ

ス変換法が利用されている。菅野ら<sup>(7)(8)</sup>も傾斜機能材料を相異なる多層均質層で近似し、複合領域に対する一種の積分変換法に相当するVodickaの手法を応用して非定常温度場の解析解を得ている。傾斜機能材料のように熱物性値が座標の関数として大きく変動する場合は、多層の均質層で近似する手法で解析できたとしても多数の分割数を必要とし、非常に面倒な計算を強いられる。

そこで、本研究では熱応力緩和に適した材料組成の探索に必要な任意の不均質性をもった傾斜機能材料の温度解析に対処するため、傾斜機能平板を区分的に線形の不均質性をもった多層の不均質層で近似する。そして、不均質平板全体の熱伝導率が板厚方向座標の一つのべき関数で表される場合の温度解<sup>(9)</sup>を拡張し、区分的に線形の相異なる不均質性をもった多層平板の非定常熱伝導問題を解析的に解く方法を提案する。また、実際にPSZ/SUS304系傾斜機能材料に適用し、温度解の精度と信頼できる温度分布を得るに必要な層数について検討した。

#### 2. 解 析

図1のように、厚さ $h$ の傾斜機能平板(以下FGM平板と記す)の板厚方向に $x$ 軸をもつ座標系を設定し、

\* 1995年11月11日 日本機械学会関西支部第254回講演会において講演、原稿受付 1996年3月26日。

<sup>\*1</sup> 正員、岩手大学工学部 (〒020 盛岡市上田4-3-5)。

<sup>\*2</sup> 学生員、岩手大学大学院 [現:三菱重工業(株)広島研究所]。

<sup>\*3</sup> 正員、静岡大学教育学部 (〒422 静岡市大谷836)。

任意の不均質熱特性をもつこの FGM 平板が、初期温度零から、片側表面を温度  $T_0$  に加熱され、背面では初期温度に保持される場合の非定常温度分布を解析する。FGM 平板の非定常熱伝導問題の基礎微分方程式、初期条件式、境界条件式は次式となる。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \lambda(x) \frac{\partial T}{\partial x} \right\} = \rho(x) c(x) \frac{\partial T}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$T=0, t=0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$T=0, x=0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$T=T_0 H(t), x=h \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 $\lambda, \rho, c$  はそれぞれ、熱伝導率、密度、比熱であり、 $H(\ )$  はヘビサイドの単位ステップ関数である。

上記の熱伝導問題を解析的に解くために、従来は図 2 の実線のような不均質熱伝導率をもつ平板を破線のように各層が相異なる均質層からなる多層均質層で近似して解析がなされているが<sup>(3)~(8)</sup>、この手法では熱伝導率が各層間の仮想界面において実際の熱伝導率とは異なり、かつ不連続に変化する。また、近似の精度を向上させるには、多層化が不可欠であるが、これでは依然として仮想界面における熱伝導率の不連続性は解消されない。そこで、本解析では、FGM 平板を一点鎖線のように区分的に相異なる線形不均質熱伝導率をもった薄板の積層板とみなし、不均質熱伝導問題を解く。この場合、仮想界面における熱伝導率は実際の FGM 平板の熱伝導率に等しい。

まず、横軸の板厚座標と縦軸の熱伝導率の関係第  $i$  層について考える。 $b_i$  は板厚座標  $a_i$  における実際の熱伝導率である。線形表示された熱伝導率は 2 点

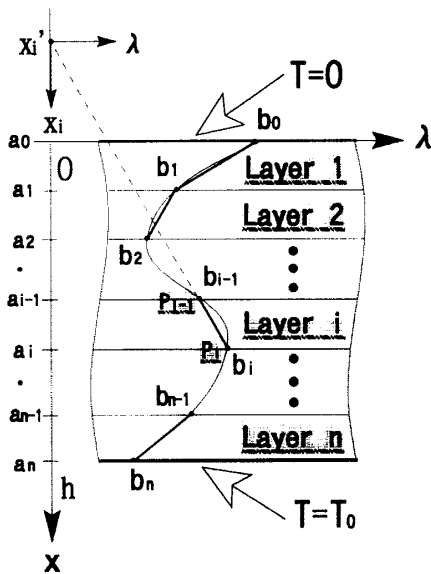


Fig. 1 Analysis Model

$P_{i-1}(a_{i-1}, b_{i-1}), P_i(a_i, b_i)$  を通過する直線より次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \lambda_i(x) &= \lambda_i x - \lambda_i a_{i-1} + b_{i-1} \quad (a_{i-1} \leq x \leq a_i) \\ \lambda_i &= \frac{b_i - b_{i-1}}{a_i - a_{i-1}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

式(1)~(4)の熱伝導問題は第  $i$  層の非定常温度関数を  $T_i(x, t)$  とし、仮想界面において温度と熱量が連続する条件を付加すれば、次式のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \lambda_i(x) \frac{\partial T_i}{\partial x} \right\} &= \rho_i c_i \frac{\partial T_i}{\partial t} \quad (i=1, 2, \dots, n) \\ T_i &= 0, t=0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \\ T_i &= 0, x=a_0 \quad (a_0=0) \\ T_n &= T_0 H(t), x=a_n \quad (a_n=h) \\ T_i &= T_{i+1} \\ \frac{\partial T_i}{\partial x_i} &= \frac{\partial T_{i+1}}{\partial x_{i+1}} \quad (i=1, 2, \dots, n-1) \end{aligned} \right\} x_i = a_i \quad \dots\dots\dots (6)$$

ただし、密度、比熱は各層で相異なる一定値とした。次に、式(5)を式(6)に代入した微分方程式を解析的に解くことは困難であるので、式(5)の線形表示された熱伝導率が各層において原点を通る直線の一部になるように次式の座標変換を導入し、全体座標系  $(x, \lambda)$  から各層で定義される局所座標系  $(x_i, \lambda)$  に変換する。

$$x = x_i + x'_i, x'_i = a_{i-1} - b_{i-1} / \lambda_i \quad \dots\dots\dots (7)$$

ただし、 $x'_i$  は第  $i$  層に対する局所座標系の原点の座標である。このとき、式(6)の熱伝導問題の基礎微分方程式および各条件式は、第  $i$  層の局所座標系  $(x_i, \lambda)$  を用いて次式のように表される。

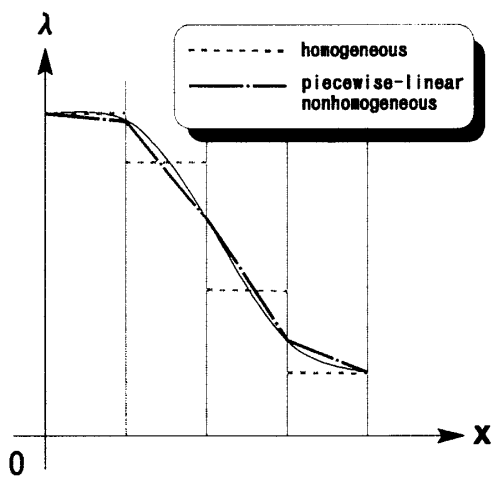


Fig. 2 Piecewise-linear nonhomogeneity approximation and multi-layer homogeneity approximation

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( x_i \frac{\partial T_i}{\partial x_i} \right) &= \frac{1}{\kappa_i} \frac{\partial T_i}{\partial t} \quad (i=1, 2, \dots, n) \\ T_i &= 0, t=0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \\ T_1 &= 0, x_1 = a_0 - x'_1 \quad (a_0=0) \\ T_n &= T_0 H(t), x_n = a_n - x'_n \quad (a_n=h) \\ T_i &= T_{i+1} \\ \frac{\partial T_i}{\partial x_i} &= \frac{\partial T_{i+1}}{\partial x_{i+1}} \quad (i=1, 2, \dots, n-1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

ここで、 $\kappa_i = \lambda_i / (\rho_i c_i)$  である。上記の非定常熱伝導方程式のラプラス像空間における一般解は、次式のように得られる。

$$T_i^*(x_i, s) = A_i I_0(2\sqrt{(s/\kappa_i)x_i}) + B_i K_0(2\sqrt{(s/\kappa_i)x_i}) \dots\dots\dots (9)$$

ここで、 $I_0(\quad)$ 、 $K_0(\quad)$  は零次の第一種、第二種変形ベッセル関数であり、 $s$  はラプラス変換パラメータである。未知係数  $A_i$ 、 $B_i$  は式(9)とラプラス変換を施した境界条件式、連続条件式より次式のように決定される。

$$A_i = |\alpha_i|/|F|, B_i = |\beta_i|/|F| \dots\dots\dots (10)$$

ここで、 $F$  は次式で定義される  $2n \times 2n$  の行列である。

$$F = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1,2n-1} & e_{1,2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ e_{2n,1} & e_{2n,2} & \dots & e_{2n,2n-1} & e_{2n,2n} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (11)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} e_{11} &= I_0(\sqrt{s} p_{20}), e_{12} = K_0(\sqrt{s} p_{20}) \\ e_{2n,2n-1} &= I_0(\sqrt{s} p_{1n}), e_{2n,2n} = K_0(\sqrt{s} p_{1n}) \\ e_{2k,2k-1} &= I_0(\sqrt{s} p_{1k}), e_{2k,2k} = K_0(\sqrt{s} p_{1k}) \\ e_{2k,2k+1} &= -I_0(\sqrt{s} p_{2k}), e_{2k,2k+2} = -K_0(\sqrt{s} p_{2k}) \\ e_{2k+1,2k-1} &= \gamma_{1k} I_1(\sqrt{s} p_{1k}) \\ e_{2k+1,2k} &= -\gamma_{1k} K_1(\sqrt{s} p_{1k}) \\ e_{2k+1,2k+1} &= -\gamma_{2k} I_1(\sqrt{s} p_{2k}) \\ e_{2k+1,2k+2} &= \gamma_{2k} K_1(\sqrt{s} p_{2k}) \\ &(k=1, 2, \dots, n-1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{1i} &= \frac{1}{\sqrt{\kappa_i(a_i - x'_i)}}, \gamma_{2i} = \frac{1}{\sqrt{\kappa_{i+1}(a_i - x'_{i+1})}} \\ p_{1i} &= 2\sqrt{(a_i - x'_i)/\kappa_i}, p_{2i} = 2\sqrt{(a_i - x'_{i+1})/\kappa_{i+1}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

なお、行列  $F$  の上記の要素以外はすべて零である。また、行列  $\alpha_i$ 、 $\beta_i$  はそれぞれ、行列  $F$  の第  $(2i-1)$  列めと第  $(2i)$  列め(ただし、 $i=1, 2, \dots, n$ ) を列ベクトル  $\mathbf{d}$  に置き換えることにより得られる。

ここで、

$$\mathbf{d} = (0, 0, \dots, 0, T_0/s) \dots\dots\dots (14)$$

ただし、 $'$  は転置マトリックスを意味する。したがって、局所座標系表示のラプラス像空間における第  $i$  層の温度関数  $T_i^*(x_i, s)$  は次式となる。

$$T_i^*(x_i, s) = \frac{1}{|F|} \{ |\alpha_i| I_0(2\sqrt{(s/\kappa_i)x_i}) + |\beta_i| K_0(2\sqrt{(s/\kappa_i)x_i}) \} \dots\dots\dots (15)$$

次に、式(15)をラプラス逆変換するためのラプラス変換の反転公式は、次式で与えられる。

$$T_i(x_i, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} T_i^*(x_i, s) ds \dots\dots\dots (16)$$

式(15)を式(16)に代入し、留数定理を用いて積分を評価し、式(7)を用いて全体座標系表示すると、最終的に、第  $i$  層における非定常温度関数  $T_i(x, t)$  は次式のように得られる。

$$T_i(x, t) = C_i \ln(|x - x'_i|) + D_i + 2 T_0 \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ e^{-\omega_l t} \frac{G(x, \omega_l)}{\omega_l L(\omega_l)} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

$$\left. \begin{aligned} G(x, \omega_l) &= |\bar{\alpha}_i|_{\omega=\omega_l} J_0(2\omega_l \sqrt{(x-x'_i)/\kappa_i}) - |\bar{\beta}_i|_{\omega=\omega_l} Y_0(2\omega_l \sqrt{(x-x'_i)/\kappa_i}) \\ L(\omega_l) &= \frac{d(|\bar{F}|)}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_l} \quad (a_{i-1} \leq x \leq a_i) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

ここで、 $J_0(\quad)$ 、 $Y_0(\quad)$  は零次の第一種、第二種ベッセル関数であり、固有値  $\omega_l$  は次式の超越方程式を満足する第  $l$  番目の正根である。

$$|\bar{F}|_{\omega=\omega_l} = 0 \dots\dots\dots (19)$$

ただし、 $\bar{F}$  は次式で定義される  $2n \times 2n$  の行列である。

$$\left. \begin{aligned} \bar{F} &= \begin{bmatrix} \bar{e}_{11} & \bar{e}_{12} & \dots & \bar{e}_{1,2n-1} & \bar{e}_{1,2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \bar{e}_{2n,1} & \bar{e}_{2n,2} & \dots & \bar{e}_{2n,2n-1} & \bar{e}_{2n,2n} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (20) \\ \bar{e}_{11} &= J_0(\omega p_{20}), \bar{e}_{12} = -Y_0(\omega p_{20}) \\ \bar{e}_{2n,2n-1} &= J_0(\omega p_{1n}), \bar{e}_{2n,2n} = -Y_0(\omega p_{1n}) \\ \bar{e}_{2k,2k-1} &= J_0(\omega p_{1k}), \bar{e}_{2k,2k} = -Y_0(\omega p_{1k}) \\ \bar{e}_{2k,2k+1} &= -J_0(\omega p_{2k}), \bar{e}_{2k,2k+2} = Y_0(\omega p_{2k}) \\ \bar{e}_{2k+1,2k-1} &= \gamma_{1k} J_1(\omega p_{1k}) \\ \bar{e}_{2k+1,2k} &= -\gamma_{1k} Y_1(\omega p_{1k}) \\ \bar{e}_{2k+1,2k+1} &= -\gamma_{2k} J_1(\omega p_{2k}) \\ \bar{e}_{2k+1,2k+2} &= \gamma_{2k} Y_1(\omega p_{2k}) \\ &(k=1, 2, \dots, n-1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

なお、行列  $\bar{F}$  の上記の要素以外はすべて零である。また、行列  $\bar{\alpha}_i$ 、 $\bar{\beta}_i$  はそれぞれ、行列  $\bar{F}$  の第  $(2i-1)$  列めと第  $(2i)$  列め(ただし、 $i=1, 2, \dots, n$ ) を列ベクトル  $\bar{\mathbf{d}}$  に置き換えることにより得られる。

ここで、

$$\bar{d} = (0, 0, \dots, 0, 1) \dots\dots\dots (22)$$

第  $i$  層の定常温度関数に含まれる未知係数  $C_i, D_i$  は、次式の  $2n$  元連立一次方程式の解として得られる。

$$MX = Y \dots\dots\dots (23)$$

ここで、

$$M = \begin{bmatrix} e'_{11} & e'_{12} & \dots & e'_{12n-1} & e'_{12n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ e'_{2n1} & e'_{2n2} & \dots & e'_{2n2n-1} & e'_{2n2n} \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} e'_{11} &= \ln(|a_0 - x'_1|), e'_{12n-1} = \ln(|a_n - x'_n|) \\ e'_{12} &= e'_{2n2n} = 1 \\ e'_{2k2k-1} &= \ln(|a_k - x'_k|) \\ e'_{2k2k} &= 1 \\ e'_{2k2k+1} &= -\ln(|a_k - x'_{k+1}|), e'_{2k2k+2} = -1 \\ e'_{2k+12k-1} &= 1/(|a_k - x'_k|), e'_{2k+12k} = 0 \\ e'_{2k+12k+1} &= -1/(|a_k - x'_{k+1}|), e'_{2k+12k+2} = 0 \\ &(k=1, 2, \dots, n-1) \\ 'X &= (C_1, D_1, C_2, D_2, \dots, C_n, D_n) \\ 'Y &= (0, 0, \dots, 0, T_0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

本解析手法である FGM 平板を区分的線形不均質層の積層板で近似する手法において、層数  $n \rightarrow \infty$  の極限值として得られる温度解は厳密解と一致するものと考えられる。上述のことを確認すべく、不均質熱伝導論により厳密な温度解<sup>(10)</sup> がすでに得られている次式の指数関数形の熱伝導率をもつ不均質平板の熱伝導問題を扱う。

$$\lambda(x) = b_0 \exp(-\eta x) \quad (0 \leq x \leq h) \dots\dots\dots (25)$$

ここで、 $\eta$  は不均質パラメータである。式(25)を式(17)の非定常温度関数の定常項に代入し、 $n \rightarrow \infty$  の極限值をとれば、次式の定常温度関数  $T(x)$  が得られる。

$$T(x) = T_0 \frac{\exp(\eta x) - 1}{\exp(\eta h) - 1} \dots\dots\dots (26)$$

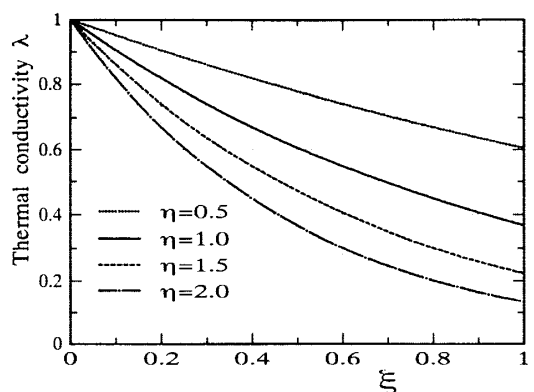


Fig. 3 Thermal conductivity of exponential function type

式(26)は厳密温度解<sup>(10)</sup> と一致していることが確認される。

### 3. 数値計算と考察

数値計算に際して次式の無次元量を導入する。  
 $(\xi, \bar{a}_i) = (x, a_i)/h \quad (i=1, 2, \dots, n), \bar{T} = T/T_0$   
 $\tau = \alpha_0 t/h^2 \quad \{\alpha_0 = b_0/(\rho_1 c_1)\}$ 
..... (27)

まず、本解析手法を適用して得られる温度解と厳密温度解<sup>(10)</sup> とを比較して、本解析手法の精度を検討する。次に、数値計算例として、実際に使用される FGM 平板に対し、均質 20 層近似で得られる既報の温度解<sup>(8)</sup> と本解析解とを比較して、本解析手法の有用性を確認する。

#### 3.1 厳密温度解との比較

FGM 平板を各層が相異なる線形の熱伝導率を有する区分的線形不均質層で近似して得られる本解析手法の温度解の精度および

Table 1 Comparison between exact solution and two analytical solutions to steady-state temperature

$\eta \backslash \xi$	0.2	0.4	0.6	0.8
exact sol.	0.12885	0.28623	0.47845	0.71324
20#layers	0.12885	0.28623	0.47845	0.71324
2#layers	0.12931	0.28543	0.47958	0.71279
3#layers	0.12877	0.28650	0.47815	0.71346
4#layers	0.12877	0.28618	0.47853	0.71340
5#layers	0.12885	0.28623	0.47845	0.71324

#homogeneous, \*\*piecewise-linear nonhomogeneous

Table 2 Comparison between exact solution and analytical solution (5 layers) to transient temperature

$\tau$	$\xi$			
	0.2	0.4	0.6	0.8
0.01	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	0.00001 0.00000
0.05	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	0.04520 0.04486
0.1	0.00000 0.00000	0.00012 0.00011	0.00688 0.00679	0.15316 0.15252
0.5	0.02216 0.02198	0.07458 0.07415	0.20909 0.20840	0.50305 0.50241
1.0	0.07368 0.07341	0.18113 0.18061	0.35251 0.35190	0.62055 0.62007
$\infty$	0.12885 0.12885	0.28623 0.28623	0.47845 0.47845	0.71324 0.71324

...Exact Solution

有用性を評価するために、式(25)の熱伝導率をもつ不均質平板の熱伝導問題を考える。ここで、図3にこの熱伝導率の板厚方向の不均質性を示す。なお、本解析手法による温度解との比較の際に  $\eta=1$  を採用した。表1は、定常状態の温度分布について、式(25)の指数関数形の熱伝導率を直接用いた既報の厳密温度解<sup>(10)</sup>の計算値と、各層が相異なる一定の熱伝導率をもつ多層均質層で近似した温度解および式(25)の熱伝導率を区分的線形不均質層で近似した温度解の計算値とを比較したものである。表1より、従来の均質層近似の場合は20層で小数点以下5けたまで厳密解と一致していたものが、区分的線形不均質層で近似した場合は、2

層ですでに厳密解との誤差が0.3%以下となり、わずか5層で厳密解と完全に一致していることがわかる。次に、表2に非定常状態の温度分布について、厳密温度解と5層の区分的線形不均質層で近似した場合の温度解との比較を示す。表2より、各無次元時間での本解析手法により得られる温度解は、厳密温度解と完全には一致せず、最大1.0%程度の誤差を含むが、工学的には十分許容される誤差範囲にある。以上より、本解析手法により、飛躍の少ない層数でほぼ厳密解と一致した温度解が得られることが確認されたので、次に、本解析手法を傾斜機能材料の非定常熱伝導問題へ適用する。

Table 3 Material properties of PSZ and SUS304

	PSZ	SUS304
Thermal Conductivity $\lambda$ (W/m·K)	1.67	15.97
Young's Modulus $E$ (GPa)	211	193
Coefficient of Linear Thermal Expansion $\alpha$ ( $\times 10^{-6}$ 1/K)	2.93	14.87
Density $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	5730	7930
Specific Heat $c$ (kJ/kg·K)	0.467	0.361

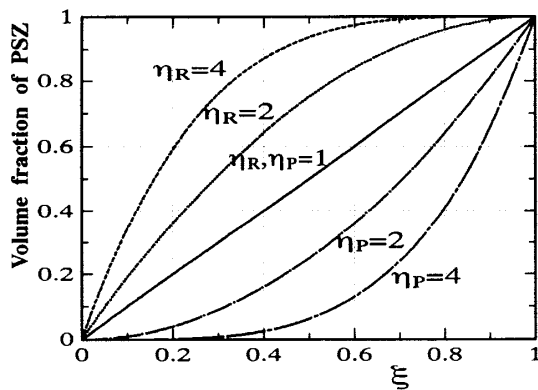


Fig. 4 Compositional distribution of PSZ

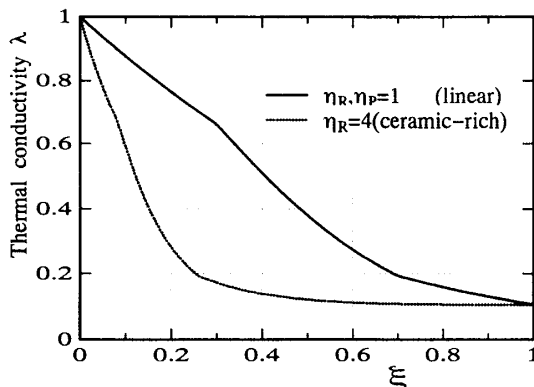


Fig. 5 Nonhomogeneity of thermal conductivity

**3.2 傾斜機能平板への応用** 実際中使用される傾斜機能材料についての数値計算例として、加熱側にPSZ(部分安定化ジルコニア)、冷却側にSUS304(オーステナイト系ステンレス)からなるFGM平板を取り扱う。表3にPSZとSUS304の材料特性を示す。また、板厚方向の加熱側PSZの組成分布  $f_{PSZ}(\xi)$  は、無次元板厚座標  $\xi$  のべき乗関数形とし、セラミックリッチとブアの場合に分けて次式で定義する。なお、図

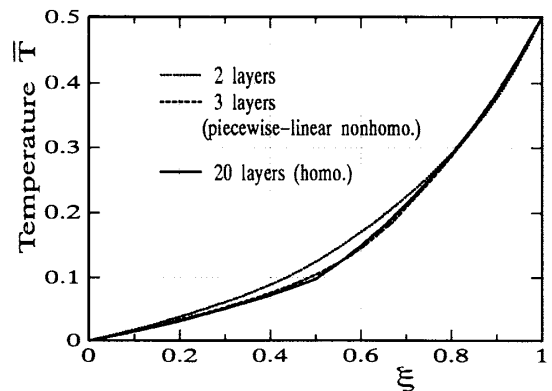
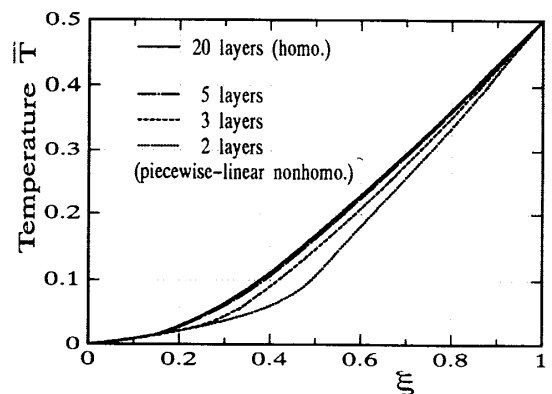
(a) Linear function ( $\eta_R, \eta_P=1$ )(b) Ceramic-rich ( $\eta_R=4$ )

Fig. 6 Steady-state temperature distribution in FGM plate

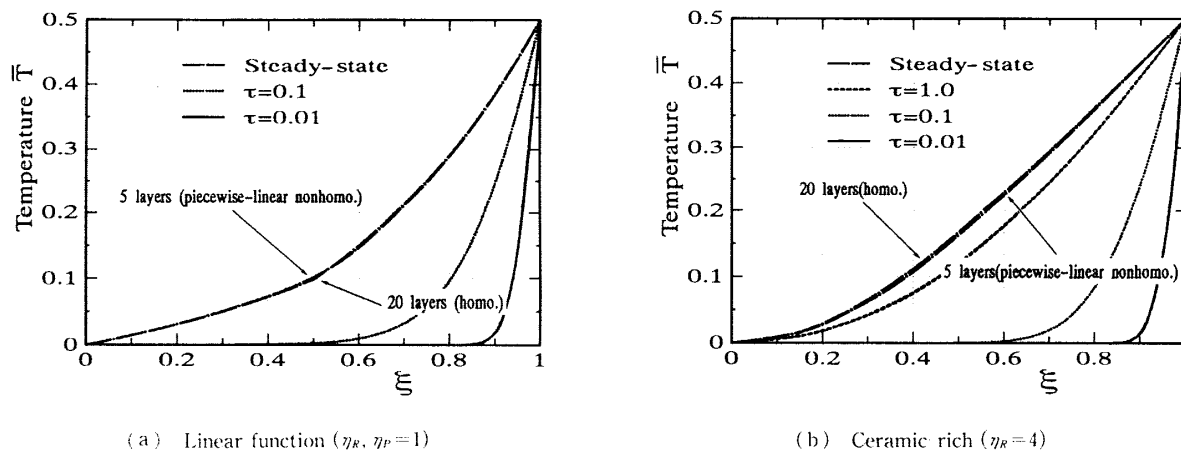


Fig. 7 Transient temperature distribution in FGM plate

4 に PSZ の組成分布を示す。

$$\left. \begin{aligned} f_{PSZ}(\xi) &= 1 - (1 - \xi)^{\eta_R} \quad (\text{Ceramic-rich}) \\ f_{PSZ}(\xi) &= \xi^{\eta_P} \quad (\text{Ceramic-poor}) \end{aligned} \right\} \dots (28)$$

ここで、 $\eta_R$ 、 $\eta_P$  は組成分布パラメータであり、 $\eta_R$ 、 $\eta_P = 1$  は線形分布を示す。各仮想界面において実際に計算される熱伝導率は、母相に球状粒子を分散させた場合について Mori-Tanaka の理論<sup>(11)</sup> を用い、また、密度、比熱は線形複合則を用いて算出した。以下に Mori-Tanaka の理論より導出された熱伝導率を算出する式を示し、図 5 に PSZ の組成分布が線形 ( $\eta_R$ 、 $\eta_P = 1$ ) とセラミックリッチ ( $\eta_R = 4$ ) の場合の熱伝導率を示す。

$$\lambda(f) = \lambda_m + 3f\lambda_m(\lambda_p - \lambda_m) / \{(1-f)(\lambda_p - \lambda_m) + 3\lambda_m\} \dots (29)$$

ただし、 $f$  は分散相の分率、下添字  $p$ 、 $m$  はそれぞれ分散相および母相の熱伝導率を表す。

図 6(a)、(b) は、PSZ の組成分布がそれぞれ線形 ( $\eta_R$ 、 $\eta_P = 1$ )、セラミックリッチ ( $\eta_R = 4$ ) である FGM 平板について、均質 20 層で近似した定常温度分布と、区分的線形不均質層で近似した定常温度分布とを比較したものである。図 6(a) の組成分布が線形の場合では、区分的線形不均質層で近似した場合はわずか 3 層で均質 20 層で近似した定常温度分布とほぼ一致している。図 6(b) の組成分布がセラミックリッチの場合では、熱伝導率が冷却側 ( $\xi = 0$ ) 近辺で急激に変化しているにもかかわらず、線形不均質 5 層で近似した場合の定常温度分布は、ほぼ完全に均質 20 層で近似した場合と一致していることがわかる。したがって、加熱時間の十分経過した定常状態では、熱伝導率を区分的線形不均質層の 5 層で近似すれば、均質 20 層で近似した定常温度分布と同程度の温度解が得られることが確認された。次に、区分的線形不均質層の 5 層で近

似した非定常温度解と均質 20 層で近似した場合のそれとを比較する。

図 7(a)、(b) は、PSZ の組成分布がそれぞれ線形 ( $\eta_R$ 、 $\eta_P = 1$ )、セラミックリッチ ( $\eta_R = 4$ ) である FGM 平板について、均質 20 層で近似した非定常温度分布と、区分的線形不均質の 5 層で近似した場合のそれを各無次元時間をパラメータとして示したものである。図 7(a)、(b) より、組成分布が線形、セラミックリッチのいずれの場合も加熱初期の  $\tau = 0.01$ 、 $0.1$  では、区分的線形不均質層の 5 層で近似した非定常温度分布は、均質 20 層で近似した場合のそれと完全に一致していることがわかる。以上より、実際に使用されている傾斜機能材料の熱伝導問題に対して、本解析手法である区分的線形不均質層の積層板で近似する手法を適用することは、従来の均質多層で近似する手法に比べてはるかに有用であることが示された。なお、正しい温度解が導出されると、その温度場による FGM 平板の熱応力は、Sugano<sup>(10)</sup> の任意の熱弾性的不均質特性をもつ不均質平板の熱応力式から容易に算出できる。

#### 4. 結 言

傾斜機能材料の熱応力緩和に適した材料組成を選択するためには、任意の不均質性をもった不均質材料の熱伝導問題を解く手法が必要である。本研究では、任意の不均質熱伝導率をもつ FGM 平板を区分的線形不均質層の積層板で近似し、各層が相異なる線形の不均質熱伝導率をもった不均質積層板として、FGM 平板の非定常熱伝導問題を解く方法を提案した。また、PSZ/SUS 304 系 FGM 平板の数値計算結果より、本解析手法の区分的線形不均質層で近似した非定常温度解と、従来の均質多層で近似した場合のそれとを比較して、飛躍的に少ない層数で精度のよい FGM 平板の

温度解が得られることを確認した。

### 文 献

- (1) Dewey, B. R. and Costello, G. A., *Nucl. Eng. Des.*, **7-2** (1968), 249-256.
- (2) 新野正之・渡辺龍三・ほか3名, ニューセラミックス, **2** (1989), 1-16.
- (3) Araki, N., Mihara, J. and Makino, A., *Proc. of the first Int. Sympo., FGM*, (1990), 345-350, Sendai.
- (4) 荒木信幸・牧野敦・石黒達男・三原純, 機論, **57** 544, B (1991), 4235-4240.
- (5) 石黒達男・牧野敦・野田直剛・荒木信幸, 機論, **58** 556, B (1992), 3690-3696.
- (6) 牧野敦・荒木信幸・北嶋英俊・大橋賢太郎, 機論, **60** 580, B (1994), 4200-4206.
- (7) 菅野良弘・森下博之・田中喜久昭, 機論, **59** 567, A (1993), 2666-2673.
- (8) 菅野良弘・佐藤恵一・木村範貴・須見尚文, 機論, **62** 595, A (1996), 728-736.
- (9) 菅野良弘・飯塚栄治・田中喜久昭・山口尚夫, 第69期全国大会講演会講演論文集, No. 910-62, A (1991-10), 58-60.
- (10) Sugano, Y., *Ing. Arch.*, **57** 2 (1987), 147-159.
- (11) Mura, T., *Micromechanics of Defects in Solids*, 2nd ed., (1987), 1, Martinus Nijhoff. Tanaka, K., Tanaka, Y., Watanabe, H., Poterasu, V. F. and Sugano, Y., *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **109** 3 (1993), 377-389.