

レーザーパルスを受ける有限媒質中の熱波および熱応力波の伝ば挙動*

須見 尚 文^{*1}Propagation of Thermal and Thermal Stress Waves
in Finite Medium under Laser-Pulse Heating

Naobumi SUMI

This paper is concerned with the one-dimensional problem of thermal and thermal stress waves resulting from a suddenly applied laser-pulse heating in a finite plate, initially unstressed and at a constant temperature. The laser-pulse absorption is assumed to have Gaussian temporal profile with time, and to decay exponentially with depth. In this investigation, based on the generalized thermoelasticity, a coupling between thermal and mechanical fields is taken into account and the classical Fourier's law is also modified by adding a thermal relaxation term to the heat conduction equation to eliminate the paradox of the infinite thermal speed of the classical thermoelasticity. The numerical procedure employs the method of characteristics. The numerical calculations are carried out for two types of temperature-change input; one is ramp-type heating on the boundary surface and the other is internal heat generation by laser-pulses. The influence of relaxation time τ_0 on thermal and thermal stress waves are found for two values of τ_0 and the results are shown in figures.

Key Words: Generalized Thermoelasticity, Dynamic Thermal Stresses, Characteristic Method Laser-Pulse Radiation, Wave Propagation

1. 緒 言

弾性体が電磁波、レーザー、 γ 線などの照射を受けて急激に加熱される場合、材料内部には慣性効果によって動的熱応力が発生する。これまでに、古典熱弾性理論に基づいて数多くの動的熱応力問題が解析されている⁽¹⁾。また古典弾性理論における熱波の速度無限大という物理的な矛盾をなくすために展開された一般化された熱弾性理論に基づく解析も報告されているが⁽²⁾、熱波が温度や熱応力に与える影響を具体的に検討した報告は少なく、また解析対象も半無限体や無限体に限られ、さらに短時間解析に限られているようである。

近年、psのパルス時間をもつYAG固体レーザーやnsのパルス時間をもつCPM色素レーザーなどの超高速レーザーの技術が発展してきた。このような極めて短い熱じょう乱が与えられる場合には、内部熱発生による高速熱(温度)伝ばが工学および実際問題でも徐々に問題となるようになり、熱の緩和過程を含む非フーリエ双曲形熱伝導方程式を扱う必要性があり⁽³⁾⁽⁴⁾、また高速変形による温度場とひずみ場の連成の影響も大きくなる。

本論文では、超高速レーザーなどによって衝撃的に内部発熱を受ける有限平板の一次元的熱応力を、熱の緩和時間および温度場とひずみ場の連成項を考慮した一般化された熱弾性理論に基づき定式化し、これを特性曲線法により数値解析する。特性曲線法によれば、基礎式をこれと等価な特性曲線に沿う常微分方程式に変換し、これを特性曲線に沿って数値積分して差分化して逐次解を求めるので数値解析に適しており、また積分変換・逆変換を用いる一般の解析解に比べ、全時間域についての解を求めることができる。有限平板の表面がランプ加熱される場合および内部熱発生を生じる場合についての数値計算を行い、平板に生じる熱波および熱応力波の伝ば挙動を明らかにした。

2. 解 析

2.1 問題の提示および基礎式 図1に示すよう

に、最初一様温度で無応力状態にある厚さ h の平板が、時間 $t=0$ の瞬間から超高速レーザーパルスの照射・吸収を受ける場合に生ずる熱波および熱応力波を考える。超高速レーザーは時間的にガウス分布のエネルギー形状をもち、それを媒質が吸収する深さ方向に指数吸収則に従った分布をするものと仮定すれば、レーザーの吸収による平板の単位時間、単位体積当たりの内

* 原稿受付 1997年11月11日。

*1 正員、静岡大学教育学部(☎422-8529 静岡市大谷836)。

部熱発生 W は次式で与えられる⁽⁴⁾,

$$W = W_0 \exp \left[-\frac{x}{l} - \left(\frac{t}{t_0} \right)^2 \right]; W_0 = \frac{I_0}{t_0 l} \dots\dots (1)$$

ただし, I_0 は単位面積当たりのレーザーの強さ, t_0 はレーザーのパルス特性時間, l はレーザーの輻射エネルギーの吸収深さである. このとき, 平板に生じる応力, 粒子速度, 熱流速および温度はいずれも場所 x と時間 t の関数となり, 平板の動的熱弾性問題は一次元問題に帰着できる.

さて, 材料は均質・等方性であり, 材料定数は温度およびひずみ速度に依存しないと仮定すれば, 一般化された熱弾性理論に基づく平板の動的熱弾性問題の基礎式は次式で与えられる⁽⁵⁾⁽⁶⁾.

(1) 運動方程式

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \rho \frac{\partial v}{\partial t} \dots\dots (2)$$

(2) 構成方程式

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial t} = C_{11} \frac{\partial v}{\partial x} - \beta \frac{\partial T}{\partial t} \dots\dots (3)$$

(3) 修正されたフーリエの法則

$$\tau_0 \frac{\partial q}{\partial t} + q = -k \frac{\partial T}{\partial x} \dots\dots (4)$$

(4) 修正された熱伝導方程式

$$\frac{\partial q}{\partial x} + \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} + T_0 \beta \frac{\partial v}{\partial x} = W \dots\dots (5)$$

ただし, σ_x は垂直応力, u を変位とするとき $v = \partial u / \partial t$ は粒子速度, T は基準温度からの温度変化, q は熱流束, ρ は密度, c_v は比熱, k は熱伝導率であり, τ_0 は緩和時間, T_0 は絶対基準温度である. さらに, α を線膨張係数, λ および μ をラーメの定数とするとき, 熱弾性定数 C_{11} および β は

$$C_{11} = (\lambda + 2\mu), \quad \beta = \alpha(3\lambda + 2\mu) \dots\dots (6)$$

式(2), (3)から応力 σ_x を消去すれば, 変位成分 u で表した次式の熱弾性運動方程式(ナビアの式)が得られる.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \zeta \alpha \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \dots\dots (7)$$

ただし, c_L は膨脹波の伝ば速度, ζ は弾性定数であ

り,

$$c_L = \sqrt{(\lambda + 2\mu) / \rho}, \quad \zeta = (3\lambda + 2\mu) / (\lambda + 2\mu) \dots\dots (8)$$

式(7)は x と t を独立変数とする双曲形偏微分方程式である.

一方, 式(4), (5)より熱流束 q を消去すれば, 次式の非フーリエ熱伝導方程式が得られる.

$$\kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} + \tau_0 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\delta}{\zeta \alpha} \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \tau_0 \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} \right) - \frac{1}{\rho c_v} \left(W + \tau_0 \frac{\partial W}{\partial t} \right) \dots\dots (9)$$

ただし, κ は温度伝導率, δ は連成係数, $e = \partial u / \partial x$ はひずみであり, 次式で定義される.

$$\kappa = \frac{k}{\rho c_v}, \quad \delta = \zeta \alpha \frac{T_0 \beta}{\rho c_v} \dots\dots (10)$$

すなわち, フーリエの法則に緩和時間を導入すれば, 熱伝導方程式は式(9)に示すように, x と t を独立変数とする双曲型偏微分方程式となり, 弾性体内部には有限の速度を持った第二音波(熱波)が存在することを示す. このことにより, 熱波の速度が無限大, すなわち弾性体が熱的じょう乱を受けると弾性体の任意の位置で瞬間的にその影響を受けるという, 古典弾性理論に基づく物理的な矛盾を修正した熱伝導方程式が得られる.

2・2 特性曲線および特性曲線方程式

さて, 式(2)~(5)は σ_x, v, q, T に関する4元連立1階偏微分方程式である. 基礎式が x と t を独立変数とする双曲型偏微分方程式で与えられる場合には特性曲線法が適用できる.

式(2)~(5)を行列表示すれば

$$L[\omega] = A^t \omega_t + A^x \omega_x - B = 0 \dots\dots (11)$$

ここで, 下添字 t, x はその量についての偏微分を意味し, ベクトル ω, B および行列 A^t, A^x はそれぞれ次に示すとおりである.

$$\omega = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ v \\ q \\ T \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -q \\ W \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 0 & -\rho & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \tau_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho c_v \end{bmatrix},$$

$$A^x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & T_0 \beta & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

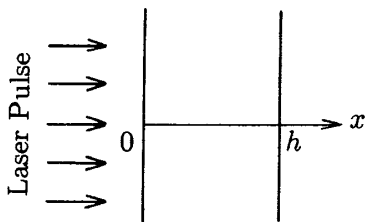


Fig. 1 A finite plate under laser-pulse heating

いま、関数 $\Phi(t, x) = \text{const.}$ が式(11)の特性曲線であるための条件は、 $A = A^t \Phi_t + A^x \Phi_x$ で定義される特性マトリックス A の行列式が零になることである。

$$\rho^2 c_v \tau_0 [\Phi_t^2 - c_1^2 \Phi_x^2] [\Phi_t^2 - c_2^2 \Phi_x^2] = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここで、 c_1, c_2 は一般性を失うことなく $c_1 > c_2$ として、

$$\begin{cases} c_1^2 \\ c_2^2 \end{cases} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\kappa}{\tau_0} + c_L^2 + \delta c_L^2 \right) \pm \sqrt{\left(c_L^2 + \delta c_L^2 - \frac{\kappa}{\tau_0} \right)^2 + 4\delta \frac{\kappa}{\tau_0} c_L^2} \right] \quad \dots\dots\dots (13)$$

与えられる二つの伝ば速度である。なお、温度場とひずみ場の連成項を考慮しない場合 ($\delta = 0$)、 $c_1 = c_L$ 、 $c_2 = c_T = \sqrt{\kappa/\tau_0}$ となり、 c_1 は熱応力波の伝ば速度 c_L に、 c_2 は熱波の伝ば速度 c_T に一致する。さらに、緩和時間を考慮しない場合 ($\tau_0 = 0$)、 $c_1 = c_L$ 、 $c_2 = \infty$ となり、古典熱弾性理論による熱波の速度が無窮大という結果が得られる。

このことから、本問題の特性曲線は、図2に示すように

$$I_i : \frac{dx}{dt} = V_i, \quad (i=1 \sim 4)$$

$$(V_1, V_2, V_3, V_4) = (c_1, -c_1, c_2, -c_2) \quad \dots\dots\dots (14)$$

与えられる4本の平行な直線群 I_i により構成される。

これに対応する常微分方程式としての特性曲線方程式は、次式のように得られる。

$$l_1^{(i)} d\sigma_x - l_2^{(i)} dv + l_3^{(i)} dq + l_4^{(i)} dT$$

$$= l_5^{(i)} W dt - l_6^{(i)} q dt$$

$$\text{along } dx/dt = V_i, \quad (i=1 \sim 4) \quad \dots\dots\dots (15)$$

ただし

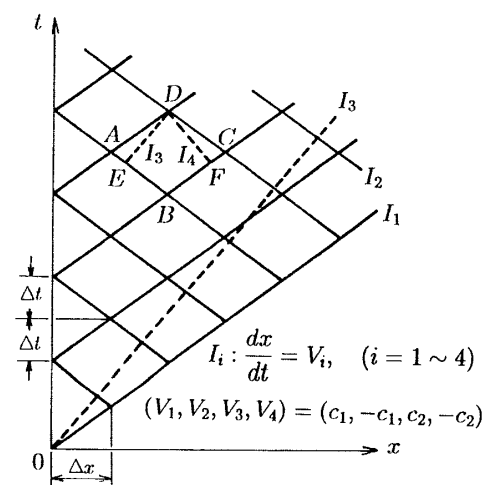


Fig. 2 Characteristic network for numerical procedure

$$\left. \begin{aligned} l_1^{(i)} &= 1 \\ l_2^{(i)} &= \rho V_i \\ l_3^{(i)} &= \frac{\rho(c_L^2 - V_i^2)}{T_0 \beta V_i} \\ l_4^{(i)} &= \frac{k\rho(c_L^2 - V_i^2)}{T_0 \beta \tau_0 V_i^2} = l_3^{(i)} \frac{k}{\tau_0 V_i} \\ l_5^{(i)} &= \frac{\rho(c_L^2 - V_i^2)}{T_0 \beta} = l_3^{(i)} V_i \\ l_6^{(i)} &= \frac{\rho(c_L^2 - V_i^2)}{T_0 \beta V_i \tau_0} = l_3^{(i)} \frac{1}{\tau_0} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

3. 数値計算と考察

3.1 特性曲線方程式の離散化 特性曲線方程式(15)を特性曲線(14)に沿って積分して σ_x, v, q, T を求めるために、 $(t-x)$ 平面を図2に示すように平行な直線群 ($I_1, I_2: dx/dt = \pm c_1$) により直線格子網に分割する。このとき、格子点Dにおける未知量は σ_x, v, q, T の4個である。いま、点Dを通る特性曲線 I_3, I_4 が直線 AB, BC と交わる点を E, F とするとき、格子点Dでの値は、隣接する格子点 A, B, C, E, F での既知量を用いて求めることができる。すなわち、微小格子間隔内で関数値の線形変化を仮定して、点Dを通る4本の特性曲線 I_1, I_2, I_3, I_4 に沿って、特性曲線方程式(15)をそれぞれ点AからD, CからD, EからD, FからDまで数値積分すれば

$$l_1^{(i)} \sigma_{xD} - l_2^{(i)} v_D + \left\{ l_3^{(i)} + \frac{l_6^{(i)}}{2} \Delta t \right\} q_D + l_4^{(i)} T_D$$

$$= l_1^{(i)} \sigma_{xi} - l_2^{(i)} v_i + \left\{ l_3^{(i)} - \frac{l_6^{(i)}}{2} \Delta t \right\} q_i$$

$$+ l_4^{(i)} T_i + l_5^{(i)} \frac{W_D + W_i}{2} \Delta t \quad \dots\dots\dots (17)$$

ただし、上式右辺の下添字 i は $i=1, 2, 3, 4$ に対してそれぞれ点 A, C, E, F での値を意味する。ただし、点EおよびFでの値は、点A, B, Cにおける値を用いて内挿により求めるものとする。したがって、点Dでの値はこれらの4元連立1次方程式を解くことにより求められる。

本論文では、無次元量として次式を用いた。

$$\left. \begin{aligned} x^* &= \frac{x}{h}, \quad t^* = \frac{c_L t}{h}, \quad T^* = \frac{T}{T_0}, \quad q^* = \frac{\kappa q}{k c_L T_0} \\ \sigma^* &= \frac{\sigma}{\rho c_L^2 \alpha T_0}, \quad v^* = \frac{v}{a T_0 c_L}, \quad W^* = \frac{Wh}{\rho c_v c_L T_0} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

上式の無次元量を用いる場合、対応する物理定数を

$$\left. \begin{aligned} h^* &= \phi, \quad \beta^* = \zeta, \quad \rho^* = 1, \quad c_L^* = 1 \\ T_0^* \beta^* &= \delta/\zeta, \quad C_1^* = 1, \quad c_T^* = 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

と取ることにほかならない。ただし、 ϕ は次式で定義

される慣性パラメータである。

$$\phi = \frac{\kappa}{hc_L} \dots \dots \dots (20)$$

3.2 ランプ加熱による有限平板の動的熱応力

古典熱弾性理論による結果と一般化された熱弾性理論による結果を比較検討するために、内部熱発生 W^* がなく、内面が立上り時間 t_0^* で一定温度 $T^*=1$ までランプ加熱され、外面は初期一定温度 $T^*=0$ のまま保たれる有限平板の動的熱応力を求めた。温度の境界条件は

$$T^*(0, t^*) = \begin{cases} t^*/t_0^*, & t^* \leq t_0^* \\ 1, & t^* \geq t_0^* \end{cases} \dots \dots \dots (21)$$

$$T^*(1, t^*) = 0$$

$\phi=1.0, t_0^*=0.01$ の場合に対し、 $\delta=0, \tau_0^*=0$ とした古典熱弾性理論に基づく温度 T^* および熱応力 σ_x^* を図3および図4に、 $\delta=0.0733, \tau_0^*=2.6$ とした一般化された熱弾性理論に基づく温度 T^* および熱応力 σ_x^* を図5および図6に示す。古典熱弾性理論による解析では $c_1^*=1, c_2^*=\infty$ であり、一般化された熱弾性理論による解析では $c_1^*=1.0545, c_2^*=0.5881$ である。図

3の古典熱弾性理論による解析では熱は拡散現象により平板内部に伝達される様子を示すが、図5の一般化された熱弾性理論による解析では、熱は波動として伝ばし、この問題では熱エネルギーの大半は熱波により伝達されることがわかる。図4の古典熱弾性理論による応力分布では、平板の各位置において熱応力波が到達する以前にすでに大きな圧縮応力を生じており、熱応力波の到達とともに引張応力状態となり、この状態は端面 $x^*=1$ からの反射波が到達するまで続くという物理的に矛盾した応力分布を示している。これに対し、図6の一般化された熱弾性理論によれば、平板の各位置では熱応力波が到達するまで初期無応力状態であり、熱応力波と熱波の間に比較的大きな圧縮応力を生じている。このように、緩和時間を考慮するか否かにより温度および熱応力分布に基本的な差を生じ、極めて短い熱じょう乱が生じる場合、緩和時間を考慮した解析が重要となる。

表面にステップ状の応力あるいは温度が作用する半無限体の熱波と熱応力波の問題に対して、Lopez と Lord⁽⁶⁾ は温度とひずみに関する6元連立2階偏微分方程式を特性曲線法を用いて解析し、同様の知見を得ている。

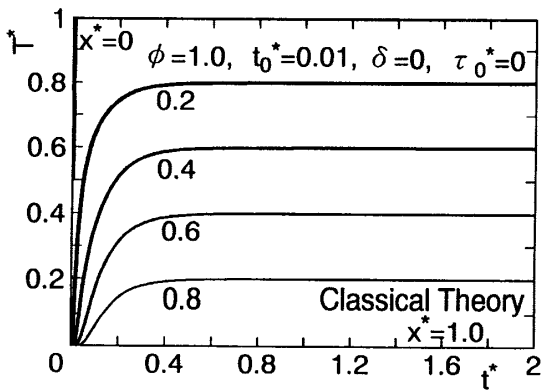


Fig. 3 Temperature T^* versus time t^* at various position x^* (classical theory)

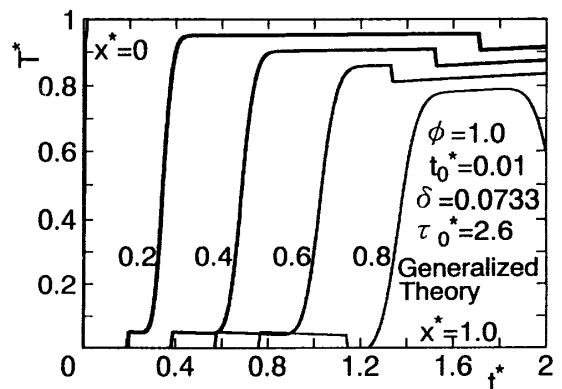


Fig. 5 Temperature T^* versus time t^* at various position x^* (generalized theory)

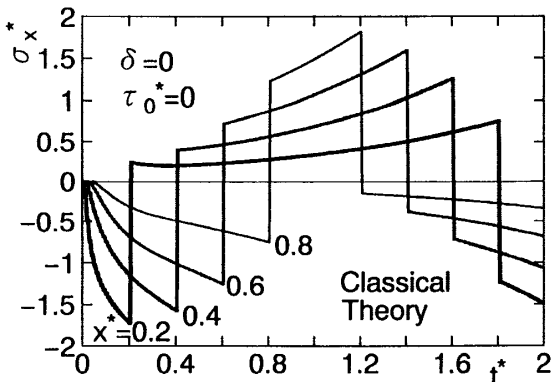


Fig. 4 Stress σ_x^* versus time t^* at various position x^* (classical theory)

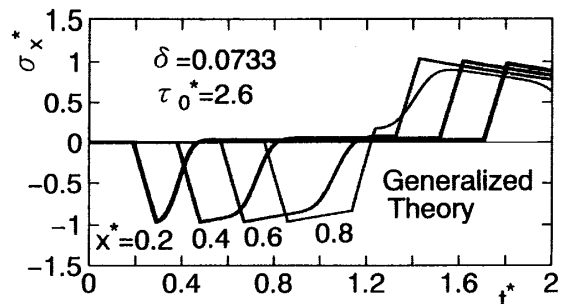


Fig. 6 Stress σ_x^* versus time t^* at various position x^* (generalized theory)

3・3 内部熱発生による有限平板の動的熱応力

平板内部に内部熱発生 W^* を受け、両表面 $x^*=0, 1$ はそれぞれ初期一定温度 $T^*=0$ に保たれる有限平板の動的熱応力を求めた。平板の内部熱発生は

$$W^* = W_0^* \exp \left[-\frac{x^*}{l^*} - \left(\frac{t^*}{t_0^*} \right)^2 \right], \quad W_0^* = \frac{I_0^*}{t_0^* l^*} \quad \dots\dots\dots (22)$$

温度の境界条件は

$$\left. \begin{aligned} T^*(0, t^*) &= 0 \\ T^*(1, t^*) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

数値計算は、6061-T6アルミニウム合金について行い、その基準温度 $T_0=293$ [K] における物性値は以下のものである。

$\rho=2.7$ [g/cm³], $c_v=0.23$ [cal/gK],
 $\kappa=0.596$ [cm²/s]
 $\alpha=23.4 \times 10^{-6}$ [1/K], $\nu=0.33$
 $c_L=6.15 \times 10^5$ [cm/s], $\delta=0.0248$

各種材料に対する緩和時間は Francis⁽⁷⁾ により実験的に求められているが、一般には $10^{-14} \sim 10^{-9}$ [s] の値を取る。本論文では、緩和時間の温度および熱応力に及ぼす影響を検討するためにアルミニウム合金の緩和時間として $\tau_0=(0.5, 1.0) \times 10^{-12}$ [s] の2種類の値を使った。対応する無次元緩和時間はそれぞれ $\tau_0^*=0.308$ および 0.615 となる。また、代表長さとしての板厚を $h=10^{-6}$ [cm] とすれば、 $\phi=0.969$ となり、内部熱発生に関する諸量は $t_0^*=3.08$, $I_0^*=2.0$, $l^*=0.2$ とし

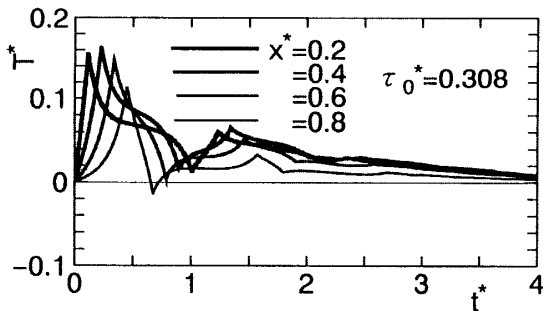


Fig. 7 Temperature T^* versus time t^* at various position x^* ($\phi=0.969$, $\delta=0.0248$, $t_0^*=3.08$, $I_0^*=2.0$, $l^*=0.2$)

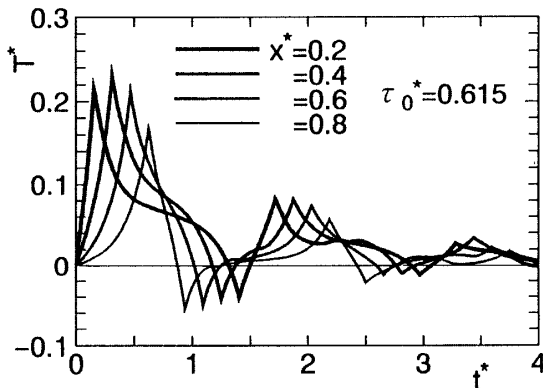


Fig. 8 Temperature T^* versus time t^* at various position x^* ($\phi=0.969$, $\delta=0.0248$, $t_0^*=3.08$, $I_0^*=2.0$, $l^*=0.2$)

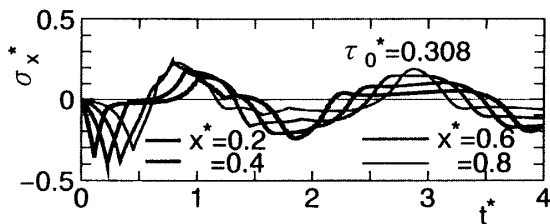


Fig. 9 Stress σ_x^* versus time t^* at various position x^* ($\phi=0.969$, $\delta=0.0248$, $t_0^*=3.08$, $I_0^*=2.0$, $l^*=0.2$)

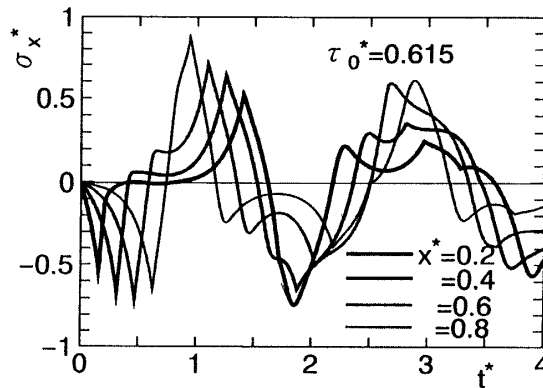


Fig. 10 Stress σ_x^* versus time t^* at various position x^* ($\phi=0.969$, $\delta=0.0248$, $t_0^*=3.08$, $I_0^*=2.0$, $l^*=0.2$)

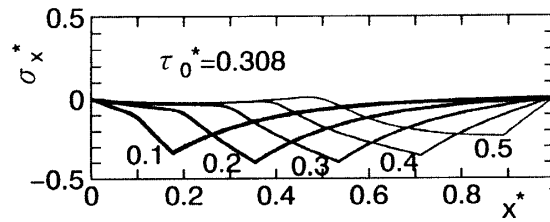


Fig. 11 Stress σ_x^* versus time x^* at various time t^* ($\phi=0.969$, $\delta=0.0248$, $t_0^*=3.08$, $I_0^*=2.0$, $l^*=0.2$)

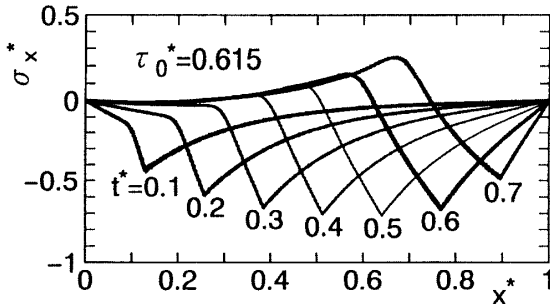


Fig. 12 Stress σ_x^* versus time x^* at various position t^* ($\phi=0.969$, $\delta=0.0248$, $t_0^*=3.08$, $I_0^*=2.0$, $l^*=0.2$)

た。

図7および図8は、それぞれ $\tau_0^* = 0.308$ および 0.615 に対する平板の各位置 x^* における温度 T^* の時間的変動を示す。緩和時間 τ_0^* が大きくなるにつれ温度の波動としての伝ば挙動が顕著となる。図9および図10は、それぞれ $\tau_0^* = 0.308$ および 0.615 に対する平板の各位置 x^* における熱応力 σ_x^* の時間的変動を、図11および図12は、それぞれ $\tau_0^* = 0.308$ および 0.615 に対する各時間 t^* ごとの熱応力 σ_x^* の分布を示す。時間の経過とともに波頭が表面 $x^* = 0$ から $x^* = 1$ に向かって伝ばする様子を示している。なお、波頭が $x^* = 1$ に到達した後は応力の符号を変えて反射・伝ばを繰返す。

本論文では、 $\tau_0^* = 0.308$ および 0.615 の場合を図示したが、 τ_0^* の値が小さくなれば熱の波動としての伝ば挙動は小さくなり、温度および応力値は τ_0^* の値とともに減少する。例えば、 $\tau_0^* = 0.308$ の場合と比較して、 $\tau_0^* = 0.0308$ と τ_0^* の値が $1/10$ になれば、温度値は $2/5$ 、応力値は $1/5$ 程度に減少する。

4. 結 言

本論文では、超高速レーザーなどにより極めて短時間

のうちに衝撃的に内部加熱を受ける有限媒質の一次元的熱応力を一般化された熱弾性理論に基づき解析した。解析には特性曲線法を用い、熱波と熱応力波に関する4本の特性曲線に沿って特性曲線方程式を積分して離散化する数値解法を確立した。6061-T6アルミニウム合金の特性値を使って数値計算を行った結果、緩和時間の温度および熱応力に及ぼす影響は大きく、nsオーダの高速レーザー照射を受ける μm オーダの極めて薄い材料では緩和時間を考慮した解析が必要ながわかった。最後に、本研究は文部省科学研究費の補助のものに行われたことを記し、謝意を表す。

文 献

- (1) Bargmann, H., *Nucl. Eng. Des.*, **27**(1974), 372-385.
- (2) Chandrashekharaiyah, D. S., "Thermoelasticity with Second Sound", *Appl. Mech. Rev.*, **39**-3(1986), 355-376.
- (3) 唐大偉・荒木信幸, 機論, **62**-595, B(1996), 1136-1141.
- (4) 唐大偉・荒木信幸, 機論, **62**-604, B(1996), 4183-4188.
- (5) 竹内洋一郎, 熱応力, (1971), 381, 日新出版.
- (6) Lopez, A. A. and Lord, H. W., *Development Theoret. and Appl. Mech.*, **5**(1971), 417-447.
- (7) Francis, P. H., *J. Sound Vib.*, **21**-2(1972), 181-192.