Teaching of Geometry to Promote Comprehensive and Expansive Thinking in Junior High School : Development of teaching materials and practice in “Plane figures’’ and “similar figures’

教育実践報告

中学校数学科における統合的・発展的な考察を促す図形指導

－「平面図形」と「相似な図形」での教材開発と実践－

美澤　将史*・稲熊　紀昭*・松元　新一郎**

（*静岡大学教育学部附属島田中学校　**静岡大学教育学部）

Teaching of Geometry to Promote Comprehensive and Expansive Thinking in Junior High School

Development of teaching materials and practice in “Plane figures’’ and “similar figures’

Misawa Masashi, Inaguma Noriaki, Matsumoto Shinichiro

要　旨

本研究は，中学校数学科における統合的・発展的な考察を促す図形の指導について，これまでとは異なる教材を開発して実践し，その有効性を検証することを目的とする．そのために，中１の単元「平面図形」で「最短距離の作図」について，また中３の単元「相似な図形」で「図形の折り返し」について，それぞれ教材化して実践を行った．授業中の生徒の様子や授業後の感想等から，統合的・発展的に考察する活動が多く観察され，教材の有効性を示すことができた．

キーワード：統合的・発展的な考察，最短距離の作図，図形の折り返し, 相似な三角形

１．はじめに

本稿の目的は，「統合的・発展的な考察」に焦点を当て，中学校数学科における統合的・発展的な考察を促す図形指導のあり方を追究することである．

これまでに，本研究では，以下のア～エの4点を明らかにしてきた(加藤他，2018；加藤他，2020；加藤他，2021；鈴木他，2016；鈴木他，2017；杉山他，2022).

ア　中学校の教科書を分析した結果，発展的な考え方を育成するような問題設定は，教科書では扱いが少ない.

イ　発展的な考え方に関する先行研究を分析した結果,発展的な考え方をいくつかのタイプに分類することができ(橋本，2001；片桐，1988；菊池，1997)，その中で「広い意味での問題の条件を変える」タイプの実践(例えば，福田，2009)は，必ずしも多く実践されていない.

ウ　「広い意味での問題の条件を変える」タイプの実践として，以下の教材を開発して実践を行った．

中1「図形の移動の方法を考える」
中2「くの字の法則を見つける」
中2「くり抜いた図形の角の和」
中2「三角形の対称軸の本数」
中2「多角形の直角の個数」
中2「ボロノイ図」
中2「星形五角形の発展」
中3「相似な図形の面積比」
中3「三角形の辺の比」
中3「三平方の定理の導入」

実践の結果から，「発展させることで数学の理解が深まるように設定を工夫する」，「難易度が高くなり過ぎないように配慮する」，「一般化することのよさを感じられる教材にする」，「多様な方法を分類する活動を取り入れる」，「生徒が統合的・発展的に考察することの価値を認める」等が有効であるとの示唆を得た.

エ　中３時の各単元において，統合的・発展的に考える活動を継続して取り入れた結果，統合的・発展的に考えようとする態度が身に付いていることが調査結果から読み取れた．

ア～エの 2015～2021 年度の研究成果を踏まえて，本稿では，中１と中３の図形の内容の中で，これまでとは異なる統合的・発展的な考察を促す教材を開発して実践を行い，授業中の生徒の反応や授業後の感想等を分析して，教材の有効性を検証する．

なお，これまでの研究では，片桐(1988)の統合的な考え方を参考にして「統合的な考え方」，「発展的な考え方」を次のように規定してきた．

＜統合的な考え方＞
多くの事象をばらばらにせず，広い観点から本質的な共通性を抽象し，同じものとしてまとめていく考え方であり，次の2つに分類できる．
［C1］複数の事象を，共通なものでまとめる．
［C2］複数の事象を，その中の1つに統合したり一般化したりする．

＜発展的な考え方＞
1つのことが得られても，さらによりよい方法を求めたり，これを基にして，より一般的な，より新しいものを発見したりしていこうとする考え方

であり，次の2つに分類できる．
［E1］問題の条件を変える．
［E2］思考の観点を変える．

このうち，これまで2つに分類してきた「統合的な考え方」を見直し，中島(1982)を参考にして次の3つの場合に分類分けする．また，中島(1982)では，それぞれの統合の具体例が小学校算数科の内容であるため，中学校数学科の図形領域における具体例を提示する．

＜統合的な考え方＞

①集合による統合

はじめは異なったものとしてとらえられていたものについて，ある必要から共通の観点を見出して一つのものにまとめる場合．上記の［C1］にあたる．

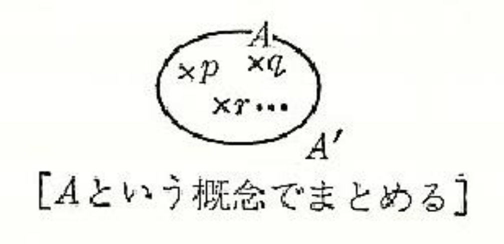


図１　集合による統合（中島，1982, p. 127）

【具体例】

・すべての面が合同な正多角形で，どの頂点のまわりにも面の数が同じであって，へこみのない立体を，「正多面体」としてまとめる場合．

②拡張による統合

はじめに考えた概念や形式が，もっと広い範囲（はじめの考えでは含められない範囲のものまで）に適用できるようにするために，はじめの概念の意味や形式を一般化して，もとのものも含めてまとめる場合．上記の［C2］にあたる．

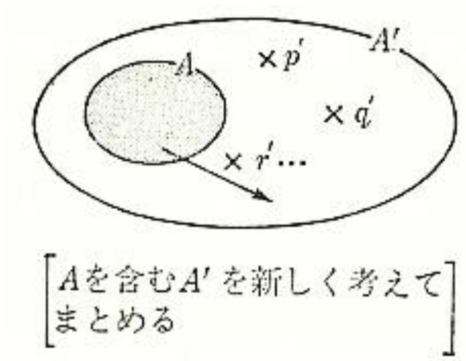


図２　拡張による統合（中島，1982, p. 128）

【具体例】

・角の二等分線の作図が，ある直線に対して垂線を引く作図でも使えるようにする場合．

③補完による統合

すでに知っている概念や形式だけでは，適用できない場合が起こるとき，補うものを加えて，「完全になる」ようにまとめる場合

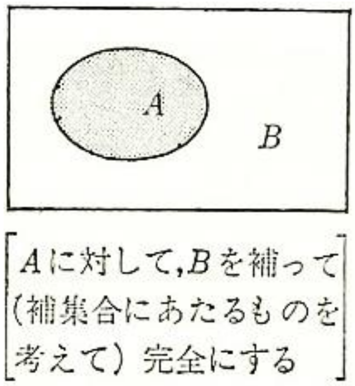


図３　補完による統合（中島，1982, p. 129）

【具体例】

・「四角形の辺の中点同士を結ぶと平行四辺形になる」ことに対して（一般に中学校数学科では多角形はへこんだ形を考えない），４つの線分で囲まれた図形の場合も同じことがいえるかどうかを，いわゆるブーメラン型（へこんだ四角形）に着目して考え出す場合．

また，「発展的な考え方」を，片桐(1988)を参考にしつつ，次のように規定するものとする．

＜発展的な考え方＞

1つのことが得られても，さらによりよい方法を求めたり，これを基にして，より一般的な，より新しいものを発見したりしていこうとする考え方であり，次の2つに分類できる．

［E1］問題の条件を変える．
［E2］思考の観点を変える．

２．本稿の目的

本稿の目的は，中学校数学科における統合的・発展的な考察を促す図形の指導について，これまでとは異なる教材を開発して実践し，その有効性を検証することである．

３．研究の方法

以下の手順に従って，研究を進める．

(1)　中１，中３の図形指導の内容について，過去に実践した教材とは異なる統合的・発展的な考え方を育成する効果的な教材を開発する．

(2)　(1)で開発した教材を用いて実践を行い，授業中の生徒の反応およびワークシートの記述，授業後の感想等を分析して，教材の有効性について検証する．

４．統合的・発展的な考え方の育成を重視した教材の検討

(1)　「平面図形」における教材の検討

中 1 の最初の図形領域である「平面図形」では，コンパスと定規をつかった作図の学習が単元の約半分を占める単元である．基本の作図である垂直二等分線，角の二等分線，垂線の作図手順やその性質について学習する．その後，これらを活用した作図の利用の問題でよく目にするのが，図 4 左の問題で，「水汲み問題」や「ヘロンの問題」と呼ばれる．点 A を出発して，川岸（直線）の点 P で水を汲み，点 B まで向かうとき，AP+PB を最も短くするには点 P をどこにとればよいか，という問題である．（たとえば中山，2020）

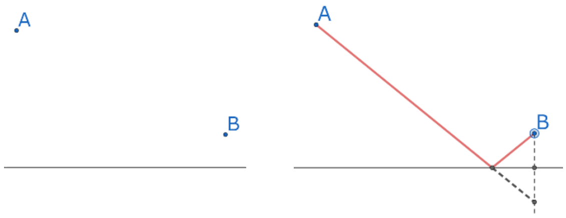


図４　水汲み問題（ヘロンの問題）

この水汲み問題で最短になるのは，図 4 右のように直線に対して点 B と線対称な点を点 B’とし，線分 AB’と直線の交点を P とすると AP+PB が最小になる．

この問題では，経路が直線になるときが最短になるため，「水汲み問題」をさらに発展させた「最短経路の問題」を教材化することについて検討する．まず，この問題を図形的に分析すると，「点から直線を経由して点まで向かうときの最短経路」ということができる．最初の点と最後の点を変えることなく，間の直線の部分を変えて問題にできないか考えた．まず，間になにも経由しないとなると，図 5 左のように 2 点間の距離に関する問題となる．また，点を経由するようにすれば，図 5 右のようになる．これらの問題に取り組むことで水汲み問題に発展すると考えた．

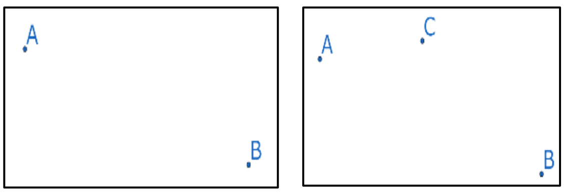


図５　水汲み問題の経由するものを変えたとき

なお，図 5 右において，点 A と点 B の最短経路が折れ線 ACB ではなく線分 AB になることは，三角不等式を用いれば明らかである．

図 6 のように，水汲み問題から経由する直線の本数を増やす発展も考えられる．ただし，点と直線の位置関係によって，どちらの直線を先に経由した方が最短になるかなど，問題の条件に左右されるため，今回の実践では扱わないこととした．

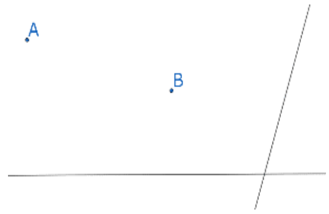


図６　経由する直線を増やした場合

また，水汲み問題では直線と線分 AB が交わらないように設定されているが，交わる場合にはどうなるか考えた．直線 1 本のみだと，図 7 左のように最短経路は線分 AB になってしまい，発展的な課題にはならない．そこで，図 7 右のように直線を平行な 2 本にし，直線間は垂直に進むこととした．このことが生徒にとって不自然に感じられると考えたため，この 2 直線間を川と表現し，垂直に進むことを，橋を架けると表現した．いわゆる「橋架け問題」である．（たとえば神原，2016）

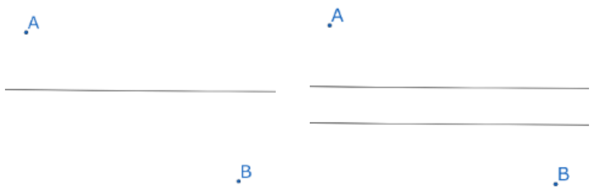


図７　直線が線分 AB 間にあるとき

この場合で最短になる場合の一例は，図 5 の通りである．川の上部の直線を l ，下部の直線を m とする．手順は，点 B から直線 m に対して垂線を引き，２直線間の距離だけ川に近づけた点を B’とする．線分 AB’を結び，直線 l との交点を P とする．P から直線 m に垂線を引き，交点を Q とし，線分 QB を結ぶ．このとき，AP+PQ+QB が最短となる．

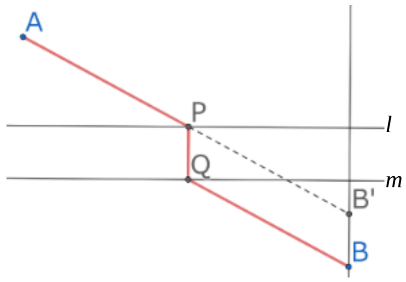


図８　橋掛け問題の最短経路の例

この経路が最短であることは，以下の方法で証明できる．図 8 において，BB’は川幅と等しいため，BB’=PQ となる．また，どちらの線分も直線 m に対する垂線なので，BB’//PQ である．よって四角形 PQBB’は平行四辺形となり，PB’=QB であることがいえる．すなわち，AP+PQ+QB のうち，橋を除いた AP+QB=AB’であるといえる．橋の PQ はどこに架けても長さは等しいため，AP+QB が直線となる AB’と等しいので，この経路が最短となる．

この橋架け問題からさらに問題を発展させる．図 9 のように川の 2 直線を平行ではない場合は，橋の長さ

が場所によって変わってしまうことや，対岸に対して引いた垂線の橋の両端が，川の両岸を重ねる（角の二等分線を折り目に折る）ときとずれてしまうため，今回の実践では取り扱わなかった．

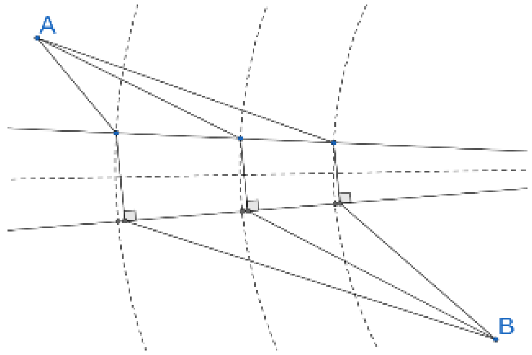


図９　川の 2 直線が平行でない場合

それ以外の発展として考えられるのが，図 10 のように水汲み問題と橋掛け問題を組み合わせる場合と，図 11 のように渡る川の本数を 2 本に増やす場合である．それぞれに，川同士が平行であるときと平行でないときの 2 つの場合が考えられる．水汲み問題と橋掛け問題の組み合わせでは，点 B の位置によっても場合分けが発生する．今回の実践では，川 2 本を渡る 2 つの場合について取り上げ，学習課題とした．

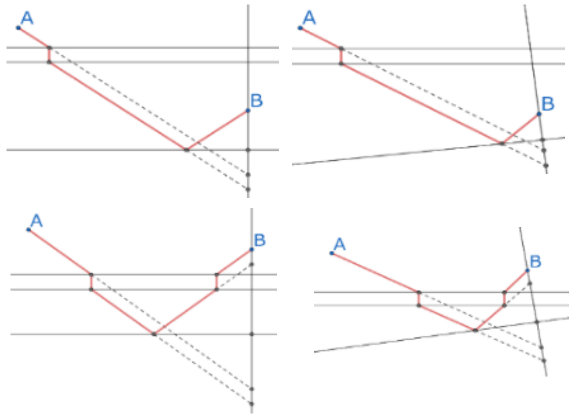


図 10　水汲み問題と橋掛け問題の組み合わせ
（左が川同士が平行，右が川同士が平行でない）

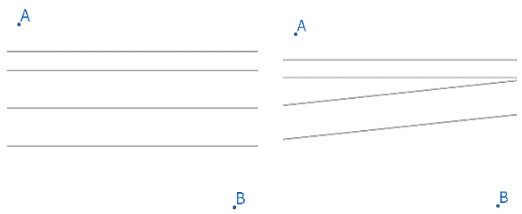


図 11　川の本数が２本の場合

図 11 左の川 2 本が平行の場合，図 11 右は川 2 本が平行でない場合である．川 2 本が平行でない場合，川 2 本がどこで交わるかによって最短経路が変わってくる．図 12 のように川 2 本が図中で交わる場合，2 本の川を別々に渡る場合と，広い方の川幅 1 本分で渡る場合，広い方の川幅より長い川幅で渡る場合の場合分けが必要であるため，今回の実践では取り上げなかった．

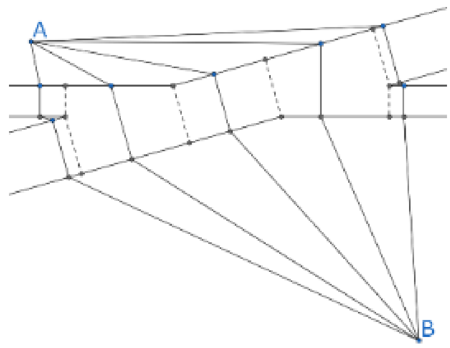


図 12　2 本の川が図中で交わる場合

直線を上から l_1，m_1，l_2，m_2 とし，直線 l_1，m_1 の川を川①，l_2，m_2 の川を川②とする．この場合の最短経路は図 10 の通りである．点 B から直線 m_2 に対して引いた垂線について，点 B から川②の川幅分川②に近づけた点を点 B’とする．同様に，点 B’からに直線 m_1 に対して引いた垂線について，点 B’から川①の川幅分川①に近づけた点を点 B”とする．線分 AB”と直線 l_1 との交点を P_1，P_1 から直線 m_1 に対して垂線を引き，直線 m_1 との交点を Q_1 とする．次に線分 Q_1B’と直線 l_2 との交点を P_2，P_2 から直線 m_2 に対して垂線を引き，直線 m_2 との交点を Q_2 とする．最後に線分 Q_2B を結ぶ．このときの $AP_1+P_1Q_1+Q_1P_2+P_2Q_2+Q_2B$ が最短経路となる．

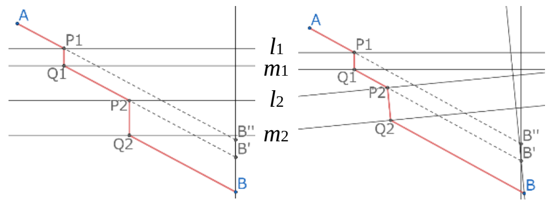


図 13　川が 2 本のときの最短経路

この経路が最短であることは，以下の方法で証明できる．図 13 において，まず，P_1Q_1//B’’B’，P_1Q_1=B’’B’であるから，四角形 P_1Q_1B’B’’は平行四辺形である．したがって，P_1B’’=Q_1B’である．同様に，P_2Q_2//B’B，P_2Q_2=B’B であるから，四角形 P_2Q_2BB’は平行四辺形である．したがって，P_2B’=Q_2B である．AB’’=AP_1+P_1B’’，Q_1B’=$Q_1P_2+P_2$B’ であるから，AB’’=$AP_1+Q_1P_2+Q_2B$ である．P_1Q_1，P_2Q_2 はどこでも長さが変わらないので，それ以外の $AP_1+Q_1P_2+Q_2B$ が最短となるのは，三角不等式から明らかである．したがって，この経路が最短である．

(2)　「相似な図形」の教材 1 の検討

中 3 で学習する「相似な図形」は，相似条件を導き出した後，証明の学習へと繋がっていく．多くの出版社の教科書が，相似条件を用いて図形の性質を証明するという流れが一般的である．また，相似の証明の学習後は，平行線と相似について学習し，中点連結定理を導き出す．中点連結定理については，「四角形の各

辺の中点を結んでできる図形」について，統合的・発展的に考える教材がある（たとえば，飯島，2021）．一方で，相似の証明を利用して，統合的・発展的に考える教材については，多くないと言える．

そこで，相似条件を用いて図形の性質を統合的・発展的に考える教材を開発することにより，相似条件の有用性を感じると共に，統合的・発展的な見方を生徒が身に付けていくと考えた．事例として，藤本(2008)，河村(2011)を参考に，「図形の折り返し」を教材化することについて検討する．以下では，藤本(2008)を参考に教材を検討する．

藤本(2008)は原題として「長方形の紙を折る．このとき，相似形はいくつできるだろうか．」として問題提示をしている．(図 14)

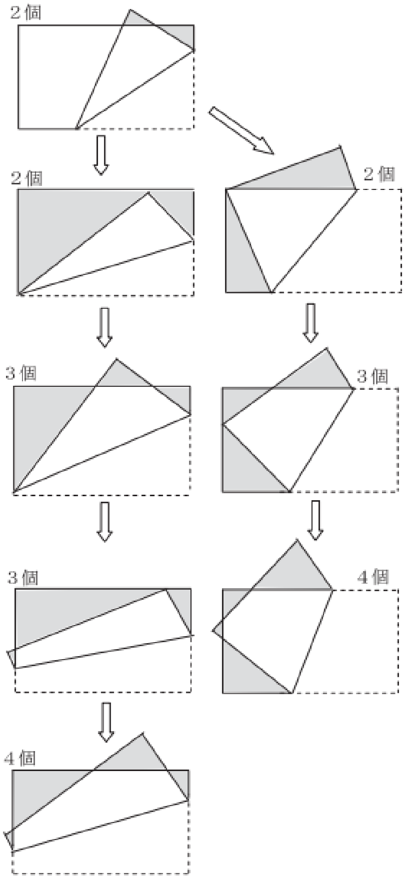


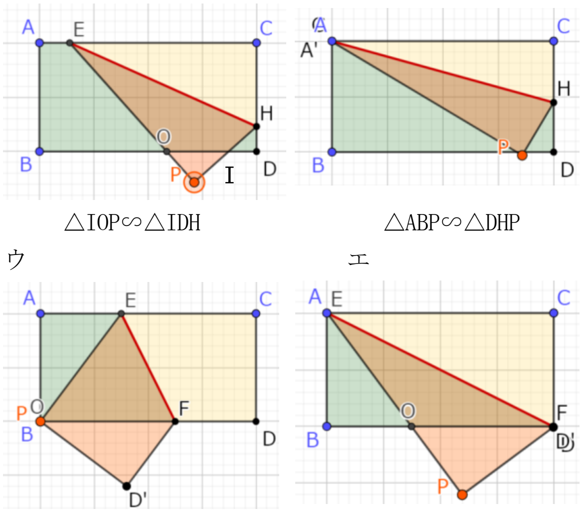
図 14　先行実践の原題（藤本，2008，p. 86）

そして，折り方として「隣り合う辺を結んで折るとき，最大 2 個」，「向かい合う辺を結んで折るとき，最大 4 個」としている．そこで，統合的・発展的に考える展開として，「相似な三角形の数」と「折り返す図形」に着目して教材化する．本研究では，その 2 つを生徒自ら発展させて，図形の性質を相似の証明によって見出し，得られた結果を統合していくことをねらいとしていく．発展的に考える方向性を絞り，統合的な結論を導きやすくするために，「元の図形と折り返した図形が重なった部分は考えないこと」と「折り返しは 1 回」という条件を付けた．以下は，教材の考察である．

まず原題について考察する．藤本の原題では，数の指定はなかった．生徒によって「図形の形」や「数」は発展させやすいものである．最初に「長方形」と相似な三角形を「2 つ」と指定することによって，「他の場合」について展開しやすくするために，本研究では，原題を「長方形を 1 回だけ折り返して，相似な三角形を 2 つ見つけよう」とした．

その場合に考えられるのは次の 4 つである．

ア　イ



△IOP∽△IDH　△ABP∽△DHP

ウ　エ

△AOE∽△D'BF（合同でもある）　△ABO∽△DPO（合同でもある）

図 15　1 回だけ折り返して，相似な三角形を 2 つつくる

図 15 アは「等しい角と対頂角」によって「2 組の角がそれぞれ等しい」と証明することができる（図 26 参照）．さらに「三角形の内角の和」によって，図 15 エの合同を「1 組の辺とその両端の角」と証明することができる．頂点が辺上にある場合（図 15 イ）については，「等しい角と外角」によって「2 組の角がそれぞれ等しい」と証明することができる（図 27 参照）．また，図 15 ウについては，「90 度から共通な角を引くことと等しい辺や角」によって「1 組の辺とその両端の角」と証明することができる．これによって，原題に関しては全て証明することができた．

次に，原題を「相似な三角形の数」と「折り返す図形」の 2 つの視点で発展させる．

①「相似な三角形の数」に着目した場合

では，原題を「相似な三角形の数」に着目して発展させると，相似な三角形を 3 つ，4 つと増やした場合である．原題で示した通り，元の図形の「等しい角」と折り返した時にできる「対頂角」や「外角」によって三角形の相似を証明することができる．5 つ以上については，元の図形で長方形あるに「等しい角」が 4 つしかないこと，1 回の折り返しによって重ならない三角形が最大 4 つまでしかできないことから，5 つ以上の相似な三角形はできない．図 16 は 3 つの場合，図 17 は 4 つの場合である．

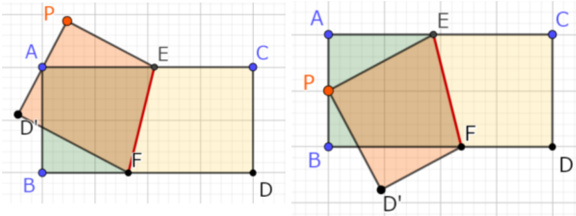


図 16　3 つの場合

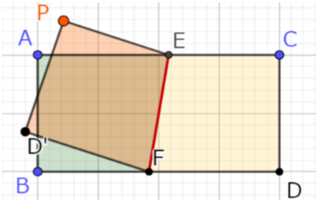
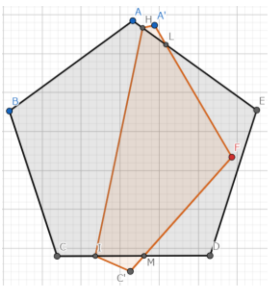


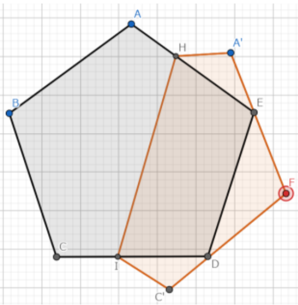
図 17　4 つの場合

②「折り返す図形」に着目した場合

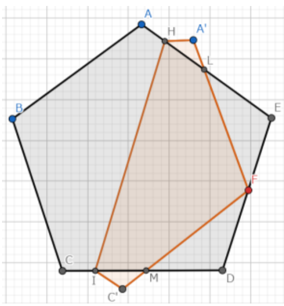
長方形以外にも，様々な図形で折り返して考えることができる．①でも示した通り，「等しい角」が 2 つ以上ないと相似条件を用いて証明することができない．その条件を満たすものは，平行四辺形，正多角形，等脚台形が考えられる．本稿では，例として「正五角形を 1 回折り返した」場合の相似な三角形の数について考察する．



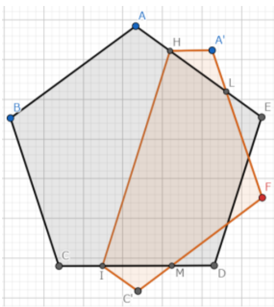
ア　2 つの場合



イ　3 つの場合



ウ　4 つの場合



エ　5 つの場合

図 18　2 つから 5 つの場合

5 つの場合は「等しい角と対頂角」によって「2 組の角がそれぞれ等しい」と証明することができる．3 つと 4 つの場合については，「等しい角と外角」によって「2 組の角がそれぞれ等しい」と証明することができる．2 つの場合については，図 19 のような補助線を引くと相似を証明しやすい．

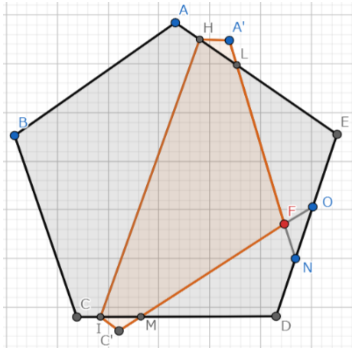


図 19　2 つの場合（辺を延長）

辺 A'F を延長して辺 ED との交点を N，辺 C'F を延長して辺 ED との交点を O とする．△A'HL と△C'MI の相似を証明する（実際には合同となる）．原題と同じように△A'HL∽△ELN，△DOM∽△C'MI と証明することができる．△ELN と△FON は，∠NEL＝∠NFO（五角形の内角），∠FNO は共通なので，「2 組の角がそれぞれ等しい」ので相似と証明することができる．△FON と△DOM も同じように相似と証明することができる．よって，△A'HL∽△C'MI と証明することができる．

図 20 は違う補助線の引き方である．

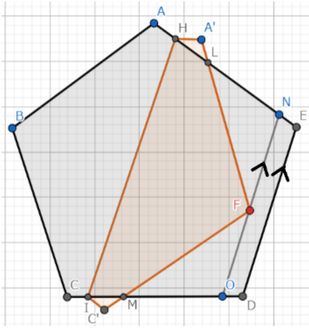


図 20　2 つの場合（平行線を引く）

平行線を引くことで，4 つの場合と同じように，2 つの三角形の相似を証明することができる．

つまり，2 つの場合においても，原題の時のように「等しい角と対頂角」や「等しい角と外角」によって相似を証明することができる．

こうした場合から，次のような結論が考えられる．

- 折り返す図形や数が変わっても，原題と同じように三角形の相似を証明することができる．（等しい角と対頂角，等しい角と外角）
- 等しい角の数が，折り返した時にできる相似な三角形の数の最大になる

正五角形の場合から考えると，この結論は，他の図形になったとしても変わらないことが予想できる．よって，この教材は，相似条件を利用して，統合的・発展的に考えることができるものと言える．

5．中 1「平面図形」の実践

(1)　授業の概要

中 1 の単元「平面図形」において，4(1)で述べた

「最短経路の作図」の教材を扱った実践を行った.

なお，授業の分析は，授業を撮影したビデオ映像，個人追究時に記述したワークシート（追究用紙），授業後の感想等をもとに行った.

① **単元計画**

単元計画は表2の通りであり，本時は第9時である.なお，作図の指導計画では瀬山(2014)を参考にしている.

表 2　「平面図形」の単元計画

1 2	【作図について知る】 ・麻の葉文様の作図を通して，作図のルールを理解する. ・麻の葉模様の中にある正多角形や平行四辺形などの図形，平行や垂直といった２直線の関係を見いだす.
3	【作図ルールの省略】 ・『コンパスの針を浮かせたら閉じなければならない』という作図のルールを省略するために，ルールを守って同じ図を作図する方法と，その根拠を考察する.
4 5 6	【垂直二等分線，角の二等分線，垂線の作図】 ・麻の葉文様の正三角形の内側の 3 本の線分が，正三角形の角や辺に対してどのような性質をもつか理解する. ・垂直二等分線，角の二等分線，垂線の作図方法を理解する. ・垂直二等分線，角の二等分線，垂線の作図手順が正しいことを，コンパスの性質とひし形，たこ形の性質を用いて考える.
7	【最短距離の作図①】 ・点から点までの最短経路が直線であることを発展させて，点から直線を経由して点までの最短経路の作図方法とその根拠を考察する.
8	【最短距離の作図②】 ・前時の課題を発展させ，点から川岸が平行な川を垂直に渡って点までの最短経路の作図と，その根拠を考察する.
9 (本時)	【最短距離の作図③】 ・前時，前々時の課題を発展させ，川の本数を２本に増やし，2 本の川が平行の時と平行ではない時について点から川を渡って点までの最短経路の作図と，その根拠を考察する.
10	【最短距離の作図④】 ・前時の２本の川が平行でないときの最短経路の作図について，その根拠を理解する.
11 12 13	【等積変形】 ・四角形の面積を，長さを計る本数をなるべく少なく求める方法を考える. ・等積変形を用いて，四角形と面積が等しい三角形を作図する方法を理解する. ・四角形の面積を，等積変形によって長さを１本だけ計って求める.
14 15 16	【図形の移動】 ・図形の回転移動，平行移動，対称移動の意味と，その作図方法を理解する. ・図形の移動を通して，対応する辺や角の関係など，移動前後の図形の関係について理解する. ・麻の葉文様の１つの二等辺三角形を移動させて重ねられる図形について，種類ごとに塗り分ける活動を通して特徴を見いだす.
17	単元のまとめ

② **本時の実施時期**：2022 年 12 月

③ **対象生徒**：国立大学附属中学校 1 年生 36 名

④ **授業の目標**：間に 2 本の川を渡った 2 点間の最短経路の作図について，根拠を明らかにして正しく作図することができる.

(2)　授業展開と生徒の反応

①　課題の提示

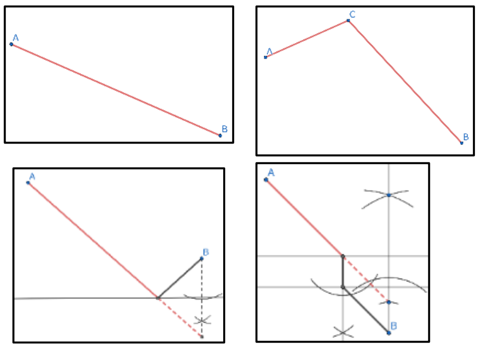


図 21　前時，前々時に提示した図形

前時，前々時の図形（図 21）を提示し，最短経路の作図方法について確認した.

前時の課題からの発展課題として，点と点の間の条件を変えるよう生徒に呼びかけ，川の本数を 2 本に増やした課題を提示した.

点Aから川を 2 本渡って点Bまでの最短経路を作図しよう．ただし，川は最短距離に渡らなければならない.

川 2 本が平行の場合は生徒から挙げられたが，平行でない場合も考えられるため，教師から問い返すことで生徒も気づき，平行ではない場合もあることを考えられていた.（図 22）

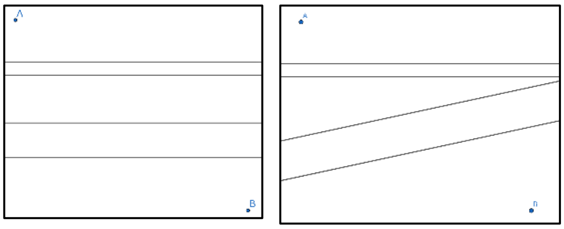


図 22　本時の課題の図

② 個人追究

前時で紙を折って川幅分をなくせば最短経路の橋以外の部分を直線でかけることがクラス全体で共有できていたため，比較的多くの生徒が紙を折る活動に取り組んでいた（図 23）．また，下の川幅分を点Ｂから移動し，上の川幅分を点Ａから移動して直線で結ぼうとしている考えも見られた（図 24）一方で，前時の考え方④のような，点Ｂを点Ａ側に移す方法で作図しようとしている生徒は，点Ｂをどこに移動させればいいのかがわからず，最短でない経路になってしまっている作図（図 25 左），川 2 本と間の部分を合わせた大きな 1 本の川として作図している（図 25 右）様子も見られた．

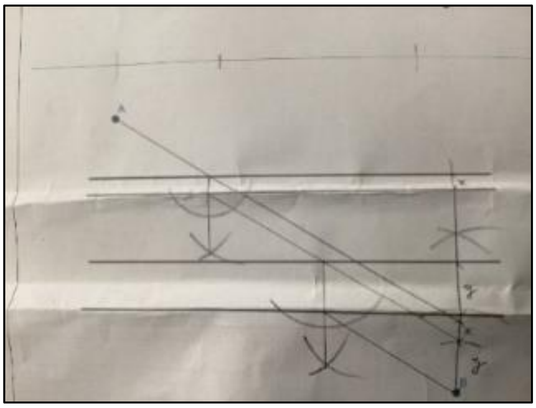


図 23　生徒の考え方ア（正答）

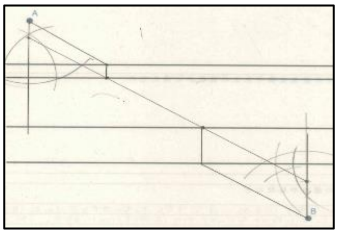


図 24　生徒の考え方イ（正答）

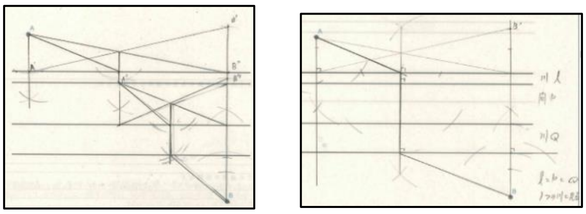


図 25　生徒の考え方ウ，エ（誤答）

このような前時までの考え方から類推して作図する生徒の姿が見られた背景として，前時までの学習課題や全体追究で使用した図を Google Classroom に掲載し，生徒たちが必要に応じて見られるようにしたことも要因の 1 つとして挙げられる．

また，以上の考え方ア～エ以外に，前時の方法から作図方法を類推することができず，点Ａと点Ｂをそのまま結んで川との交点で橋を架けたり（図 26 左），川 1 本分のみ点Ｂを上に動かしたり（図 26 右）して経路としている生徒の姿も見られた．

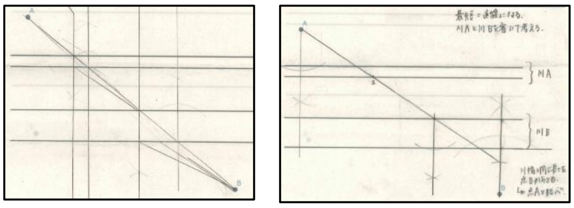


図 26　生徒の考え方オ，カ（誤答）

③ 小集団追究

小集団追究では，個々の作図方法を共有することから始めたが，考え方①のように紙を折ってから考え始めた生徒以外は，どの作図方法が正しいのか判断に困っている様子だった．そのため，自分の経路が最短になっているか，折って確かめるように伝えると，折ったときの最短経路と比較して自分が考えた経路が最短になっていないことに気付く生徒が多かった．

紙を折って最短経路が視覚的にわかった生徒は，前時と同様に，紙を折らずにその経路を作図する方法を考えていった．点Ａから 1 本目の川までは，点Ｂを 2 本の川幅の合計分上に移動させて点Ａと直線で結べば得られたが，1 本目の川と 2 本目の川の間の部分をどこと直線で結べばいいのかわからず，試行錯誤を続ける小集団もあった．そのうち，1 本目の川を渡り終えた所から点Ｂまでの経路は，前時の学習課題と同じ形になっていることに気づき，残りの経路の正確な作図方法を理解できた生徒が増え，作図に加えて根拠となる書き込みをする生徒の姿も見られた．（図 27）

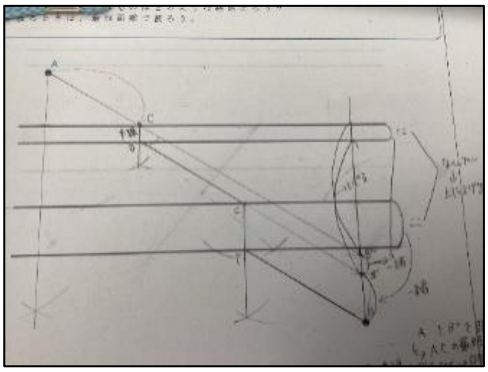


図 27　生徒の考え方キ

④ 全体追究

全体追究では，授業者が指名した生徒に追究用紙を Google Classroom 上にアップさせ，プロジェクタで教室前方に提示しながら発表させた．前時の学習課題の作図手順と同様に，平行四辺形を作ることで直線と正しい経路の橋以外の部分の長さが等しくなることを確認できた．

2 本の川が平行になる場合は以上のような展開で取り組むことができたが，同時進行した 2 本の川が平行でない場合はボリュームが大きくあまり取り扱うことができなかった．2 つの場合を並列に取り扱ってほしいという授業者の願いもあり，終末で平行でない場合の作図方法も生徒の図（図 28）を提示して紹介し，授業を終えた．

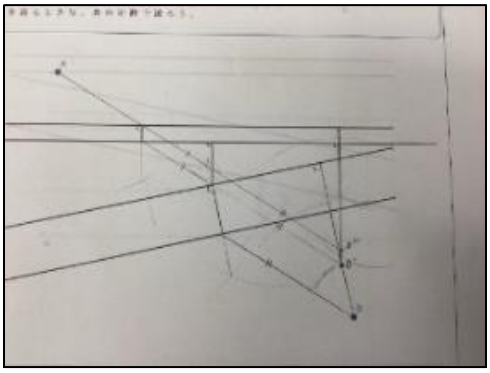


図 28　川２本が平行でない場合の生徒の考え方

(3)　授業の考察

第 9 時の実践を通して，「統合的・発展的な考察」を促す視点から，次の点を指摘することができる．

本時は，授業者は発展的な考え方『[E1]問題の条件を変える』ことを意図し、点から点までの最短経路から、間に点を経由する→直線を経由する→直線を２本平行に与え川を渡る→川の本数を変える、という流れの中で生徒自身が発展的な考え方を自然にできるような導入場面を構築した。また、生徒が学習課題に取り組む中で、紙を折って道筋を考えたり、点 B の位置を垂線上に移動させたりするなど、前時の川が１本の場合と同様の方法で作図しようとすることで、統合的な考え方②『拡張による統合』が現れるような学習課題を設定した。

生徒は、前時の川１本を渡る場合の最短経路からどのような発展ができるかを考えた．教師から課題を提示するのではなく，生徒自身が発展的な考えをもって川を 2 本に増やす課題を生み出していた．本時の中では生徒が個々に発展的に考える場面はなかった．しかし，生徒の振り返りからは，「川が 3 本になっても同じように作図できるか試してみたい」「川 1 本を渡ること，直線を経由することが両方あったらどんな風に作図したらいいのだろう」など，より発展した課題へ取り組みたいという強い意欲がみられた．これらの表れから，発展的な考え方のうち，『[E1]問題の条件を変えること』を、生徒たちが自発的に起こせていたことが読み取れる．また，生徒の考え方を見てみると，多くの生徒が，直線が最短になることや，紙を折った時に点 B がどこへ移動するかなど，前時までの考えを活用していた．このような生徒の表れから，統合的な考え方②『拡張による統合』の考え方をつかって、既習事項を活用できることが読み取れた．

これらのことから，本教材は，統合的・発展的な考察を促す上で，有効であったと考える．

６．中 3「相似な図形」の実践

(1)　授業の概要

中 3 の単元「相似な図形」について，4(2)で述べた「図形の折り返し」の教材を扱った実践を行った．

なお，授業の分析は，授業を撮影したビデオ映像，個人追究時に記述したワークシート（追究用紙），授業後の感想等をもとに行った．

①　単元計画

単元計画は表 3 の通りで，本時は第 24 時である．

表 3　単元計画

時間	学習内容
1 2	**【相似な図形について】** ・航空写真から，敷地面積を求め，相似の意味について理解する． ・相似な図形同士を比較し，相似な図形の特徴や性質を理解する．
2 3 4	**【三角形の相似条件】** ・様々な方法で，相似な三角形を作図し，その作図が三角形のどの要素を利用しているか考え，分類分けを行い，相似条件を導く． ・相似な三角形の作図方法が何の要素を基にしているか説明する．
5	**【相似な三角形を作る①】** ・三角形に補助線を1本引いて，相似な三角形を作る．さらに，なぜ相似になるかを説明する．
6 7	**【相似な三角形を作る②】** ・三角形に補助線を2本引いて，相似な三角形を作る．さらに，なぜ相似になるかを説明する．
8 9	**【相似な三角形の問題を作る】** ・相似な三角形の証明問題と，証明したことによってわかること（長さや角度等）を利用した問題を作る．
10	**【相似の考えを利用して校舎の高さを測る】** ・三角形の相似や縮図を利用して体育館の高さ，校舎の高さ（2F&3F）を求める方法を考え，実際にその方法で求めてみる．またその方法が正しいか検証する．
11 12	**【平行線と比の定理】** ・平行線と比の定理がどんな場合でも言えることを証明する．また，そのことを説明する．

13	**【線分 AB の三等分線】** ・線分ABを三等分する作図方法について考える．また，その方法について正しいかどうか検証する．
14 15	**【比と平行線の定理・中点連結定理】** ・三角形の 2 辺を等しい比に分ける線分について考え，比と平行線の定理を導く．また比と平行線の定理から，中点連結定理を導く．
16 17	**【四角形の 4 つの辺の中点を結んだ図形】** ・四角形の 4 つの辺の中点を結んだ図形がどんな図形になるか考える．また，条件を変えた場合どうなるか考え，説明する．
18 19	**【三角形の角の二等分線と辺の比の性質】** ・三角形の角の二等分線と辺の比の性質について考え，説明する．
20 21	**【面積比・表面積比・体積比】** ・相似な図形の面積比・相似な立体の表面積比や体積比を求め，その性質について考える．
22 23 (本時) 24	**【図形を折り返して相似を考える】** ・図形を折り返したことからできる相似な三角形について考える．また条件を変えた場合どうなるか考え，導いた結論を説明する．
25	**【四則演算の作図】** ・相似な図形の性質を利用して，a と b という長さから四則演算の結果を作図する方法を考える．
26	**【近似値】** ・誤差や有効数字を，具体的な例を基に考え，その表し方を知る．
27	単元のまとめ

② **本時の実施時期**：2022 年 11 月

③ **対象生徒**：国立大学附属中学校 3 年生 34 名

④ **授業の目標**：課題を自ら発展させて，図形を折り返す活動を通して，相似な三角形の関係について統合的に考えることができる．

(2) 授業展開と生徒の反応

① 課題 I の提示

課題Iは念頭操作だけではわかりにくいものであるため，実際に紙を配布し，操作活動をさせて，課題把握を行なった．この場面で「1 回だけ折り返す」についても確認した．折り返した図を画用紙で提示し，どの三角形が相似なのかを把握した．重なった部分については，考えないことも確認した．これにより，追究途中での生徒の混乱は見られず，個人で課題解決に集中することができた．

【課題 I 】
①長方形を 1 回だけ折って
相似な三角形を
②2 つつくってみよう．

② 課題 I の個人追究

大きく分けて，4 パターンの考えが出されていた．図 29 は，個人追究の中で出された生徒の考えを，画用紙によって全体で共有したものである．

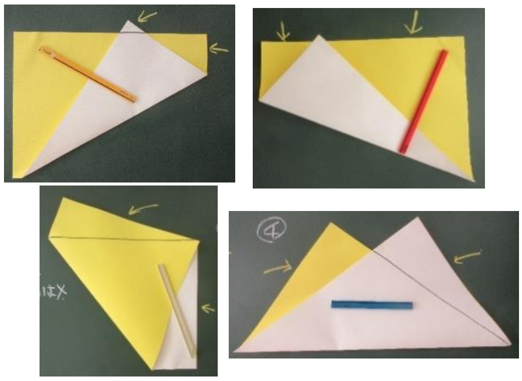


図 29 全体共有した画用紙

ほとんどの生徒がこの 4 パターンを考えついていた．次に 2 つの三角形同士が相似かどうかを証明する活動へと入っていった．ある程度証明が書けた様子を見て，小集団追究へと移った．

③課題 I の小集団追究

主には，お互いの証明方法を確認する時間となった．自分とは違う場合でも証明することができることを確認していた．

④課題 I の全体追究

全体追究では，多くの生徒が行っていた 2 つの証明方法の確認を行った．以下はその 2 つの証明である．

【図 25 左上の証明】
△EFG と△DHG において
対頂角が等しいので，
∠EGF＝∠DGH ①
∠FEG＝∠HDG＝90° ②
①，②より
2 組の角がそれぞれ等しいので
△EFG∽△DHG

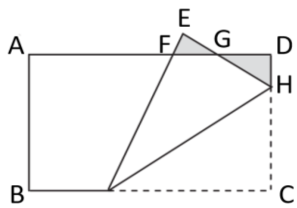


図 30 生徒の証明方法ク

【図 25 右上の証明】
△ABE と△DEF において
仮定より∠BAE＝∠EDF＝90°①
また∠BEF＝90°　　②
外角より
∠BAE＋∠ABE＝∠BED③
∠BED＝∠BEF＋∠DEF④
②，③，④より
∠ABE＝∠DEF　⑤
①，⑤より
2 組の角がそれぞれ等しいので，
△ABE∽△DEF

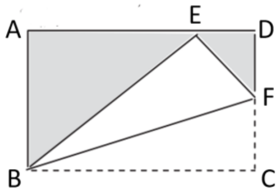


図 31　生徒の証明方法ケ

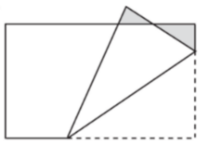
また，図 29 の下 2 つは，「相似」であると同時に「合同」であることも確認した．4 パターンの証明を確認した後，図 30 は，「等しい角と対頂角」による証明，図 31 は「等しい角と外角」による証明を名付けた．

課題Iに取り組む中で，相似な三角形が 3 つの場合や 4 つの場合があることに気づいていたため，この課題Iを発展させて考えるためにはどうしたら良いかと生徒に聞いたところ，次のような考えが出てきた．

・長方形を違う図形にする．
・2 回以上折る．
・相似な三角形を 3 つ以上つくる．

それらの考えをきっかけにして，課題Ⅱを次のように設定した．

【課題Ⅱ】
「①長方形を 1 回だけ折って
相似な三角形を
②２つつくってみよう．」の
①や②の部分を発展させて
図形の性質について考えよう．



課題Ⅱは，1 回折ることは変えずに，「折り返す図形」と「相似な三角形の数」に着目して，自分で変化させて図形の性質や決まりを見つける活動とし，個人追究へと入っていった．

②　課題Ⅱの個人追究

課題Ⅰを考える中で，相似な三角形が 3 つや 4 つができることに気付いていたため，多くの生徒がまず「相似な三角形の数」に着目して，課題Ⅱを変化させていた．

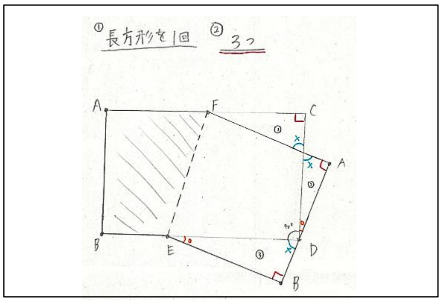


図 32　生徒の考えコ

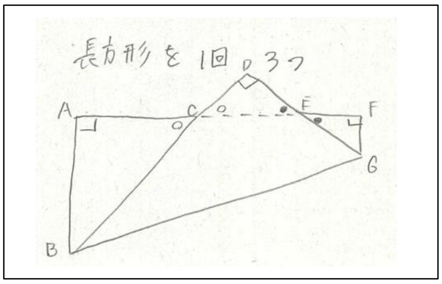


図 33　生徒の考えサ

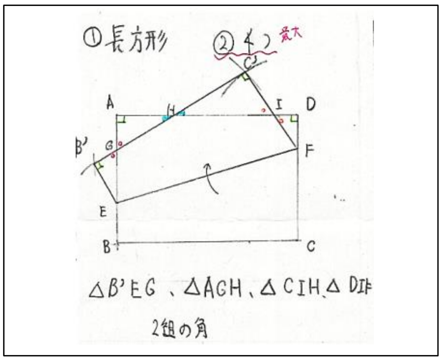


図 34　生徒の考えシ

相似な三角形の数を変化させることに関しては，図 32 から図 33 のように折り返している様子が見られた．

図 32 に関しては，課題Iの証明方法の「等しい角と外角」によって 3 つの三角形が相似であることが言えると説明していた．図 33 と図 34 については，課題Iの証明方法の「等しい角と対頂角」によって三角形の相似が言えると説明し，「同じ方法で証明できる」という統合的な結論を得ていた．

次に，「折り返す図形」に着目して変化させていた生徒も多くいた．また，生徒の様子を見ると「折り返す図形」だけでなく，「相似な三角形の数」にも着目して図形の性質を見つけようとしている生徒が多くいた．

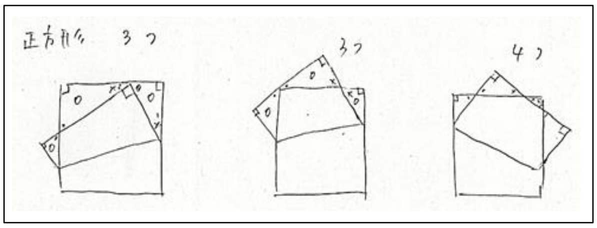


図 35　生徒の考えス

図 35 のように，まずは正方形で考えている生徒も多くいた．正方形は，長方形と同じように考えることができると結論を導いていた．ただし，「2 つ」はできないという予想を立てていた生徒もいた．

そして，次にほとんどの生徒が「正五角形」の折り返しについて考えていた．「等しい角」がないと証明することができないことを理解しており，「正五角形」を折り返して考えていた．「正五角形」に関しては，図 32 のように「相似な三角形」が 5 つの場合から，4 つ，3 つと減らして考えている生徒が多かった．

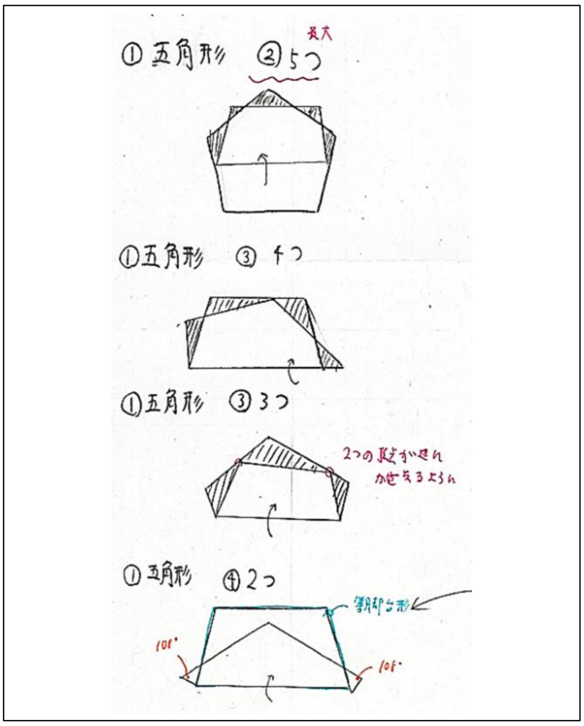


図 36　生徒の考えセ

正五角形は相似な三角形が「2 つ」まであるのか「3 つ」までしかないのかで生徒の考えが別れていた．図 36 は，「2 つ」の時まで考えている生徒の考えである．「2 つ」の場合は三角形同士が離れているため，証明が困難であると感じていた．そうした疑問を含めて，図形の性質や法則などが説明できそうになってきた様子を見て，小集団追究へと切り替えた．

③　課題Ⅱの小集団追究

個人追究で考えたことが正しいのかどうか確認をしていた．多くのグループで，正五角形について検討しており，相似な三角形の数が「2 つ」までなのか「3 つ」までなのかを議論しているグループもあった．

また，長方形や正五角形を考えたことから，「正 n 角形」の場合について考えているグループもあった．正 n 角形の場合，最大いくつの相似な三角形ができるのかを予想し，検討しているグループも見られた．以下の図 37 はそのことに関する生徒の記述である．

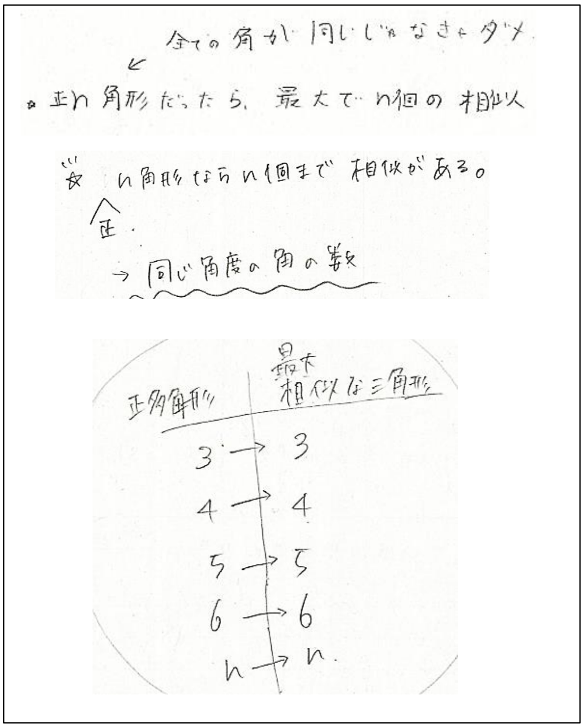


図 37　生徒の考えソ

④　課題Ⅱの全体追究

様々な考えが出てきていたが，多くのグループで検討されていた「正五角形」について，あるグループに発表させた．

そのグループは，「正五角形は1回折り返して最大5 個の相似な三角形をつくることができる」と説明し，証明についても課題Iと同じように「等しい角と対頂角」によって説明できると結論付けていた．この結論から，「正 n 角形は1回折り返して，最大 n 個の相似な三角形ができる」と予想できることについても触れていた．多くの小集団内で，正 n 角形についてその予想がされていたため，納得している生徒が多くいたと言える．

一方で最小についても考えており，正五角形では相似な三角形が「3 つまでしかない」と結論を導いていた．しかし全体で説明していく中で，生徒同士のやりとりから「2 つ」まであることに気付いていった．また，「2 つ」の場合も証明する必要性があることを確認し，どう証明するかがさらなる検討事項となった．ここで授業を終えたため，次時では，2 つの場合について証明し，課題Iと同じ証明方法（「等しい角と対頂角」，「等しい角と外角」）で説明できることを確認して，統合的な結論の 1 つとした．

(3)　授業の考察

第 24 時の実践を通して，「統合的・発展的な考察」を促す視点から，次の点を指摘することができる．

本時の授業は，「長方形を 1 回折り返して 2 つの相似な三角形をつくる」という課題から，「折り返す図形」と「相似な三角形の数」に着目して，自ら課題を

発展させて図形の性質や決まりを考えていく授業展開であった．これは，『[E1]問題の条件を変えること』をねらいとして行った課題であり，生徒の発言から発展する展開や，問題の一部を変えることによって，生徒が自ら折り返し図形の新たな性質や法則について考えている様子が見られた．

授業後の生徒の振り返りからは「どんな図形であっても，折り返した時に，その図形に等しい角度があった場合，それを利用して相似を証明できるという共通点があり，統合できると分かった」と書かれており，統合的に考察した結果，折り返した時に出来る相似な三角形は課題Ⅰの時と同じ証明方法で説明できるという興味深い結果が得られた．これは統合的な考え方②『拡張による統合』であると言える．長方形の場合に言えたことが，正五角形になっても言えることや相似な三角形が2つの時も5つの時も同様に証明することができることは，はじめの形式を一般化し共通の観点を見出したと言える．また，正n角形の場合や最大いくつの相似な三角形ができるのか，について考えている生徒もいた．長方形や正五角形を考えることを通して，正n角形で言えることを考えていったのである．こうした考察も，統合的な考え方②『拡張による統合』であると見とることができる．

これらのことから，本教材は，統合的・発展的な考察を促す上で，有効であったと考える．

7．今後の課題

今後の課題として，次の3点を挙げる．

(1)　中学校の図形指導について，さらに「統合的・発展的な考察」を促す教材を開発して実践すること．特に，「平面図形」だけではなく，「立体図形」においても，教材開発と実践を行い，図形指導の在り方を追究すること．

(2)　図形以外の領域でも「統合的・発展的な考察」を促す教材の開発・実践を行い，中学校3年間を通した指導の在り方を追究すること．

(3)　特に「統合」については，中島(1982)を参考に，分類分けを進め，明確にしていくこと．

＜引用・参考文献＞

飯島康之(2021)．ICTで変わる数学的探究　次世代の学びを成功に導く7つの条件．明治図書，78-84

小畑裕(2010)．数・式の性質に気付かせる発問．教育科学数学教育，635，10-15．明治図書．

加藤健二・杉山篤史・熊倉啓之(2018)．統合的・発展的な考え方の育成を重視した中学校数学科における図形指導．静岡大学教育実践総合センター紀要，28，97-106．https://doi.org/10.14945/00024664

加藤健二・杉山篤史・熊倉啓之(2020)．中学校数学科における統合的・発展的な考察を促す図形指導．静岡大学教育実践総合センター紀要，30，244-253．https://doi.org/10.14945/00027127

加藤健二・杉山篤史・熊倉啓之(2021)．中学校数学科における統合的・発展的な考察を促す図形指導：「多角形の直角の個数」と「ボロノイ図」の教材開発と実践．静岡大学教育実践総合センター紀要，31，315-324．https://doi.org/10.14945/00027931

片桐重男(1988)．数学的な考え方の具体化．明治図書．

河村泰宏(2011)．２学期末テスト―問題の具体例と作問のポイント 3 年．教育科学数学教育．明治図書 650，84-85.

神原一之(2016)．最短距離問題．教育科学数学教育，明治図書，703，48-51．

菊池兵一(1997)．統合的，発展的に考察する．新しい算数研究，313，6-9，東洋館．

熊倉啓之(2011)．数学的な思考力・表現力を鍛える授業 24．明治図書．

瀬山士郎(2014)．数学のかんどころ 27　コンパスと定規の幾何学　作図のたのしみ．共立出版，1-8．

杉山篤史，美澤将史，柗元新一郎，山田耕三(2022)．中学校数学科における統合的・発展的な考察を促す図形指導:「図形の性質の調べ方」と「三平方の定理」．静岡大学教育実践総合センター紀要，32，379-390．http://doi.org/10.14945/00028728

鈴木直・加藤健二・熊倉啓之(2016)．発展的な考え方の育成を重視した中学校数学科における図形の指導．静岡大学教育実践総合センター紀要，25，43-52．https://doi.org/10.14945/00009430

鈴木直・加藤健二・熊倉啓之(2017)．統合的・発展的に考える活動を重視した中学校数学科における図形指導．静岡大学教育実践総合センター紀要，26，45-54．https://doi.org/10.14945/00010138

髙橋健二(2004)．正n/m角形の内角の和を求めよう，明治図書・数学教育，557，76-81.

中島健三(2015)．算数・数学教育と数学的な考え方とその進展のための考察（復刻版）.東洋館出版社．（原著出版 1982 年）

中山征樹(2020)．水汲み問題をめぐって．岡山大学算数・数学学会誌パピルス．27，1-10．

橋本吉貴(2001)．算数・数学科における「発展的な考え方」に関する考察．日本数学教育学会誌，83(9)，10-17．https://doi.org/10.32296/jjsme.83.9_10

福田允(2009)．学校数学における発展的な考え方の指導に関する一考察-「式を読む」ことに着目して-．日本数学教育学会第 42 回数学教育論文発表会論文集，181-186．

藤本義明(2008)．『数学作りの授業』のための題材例

（その 1），愛媛大学教育学部紀要，55，79-92.
前田琢磨(2001)．ループによる星形多角形の内角の和の公式，日本数学教育学会誌，83(7)，2-9.