

特性曲線法による傾斜機能材料の熱波および 熱応力波の伝ば挙動*

須 見 尚 文^{*1}

A Study of Thermal and Thermal Stress Waves in Functionally Graded Materials by the Method of Characteristics

Naobumi SUMI^{*2}

^{*2} Shizuoka University, Faculty of Education, Oya 836, Shizuoka, 422-8529 Japan

The present study involves propagation of thermal and thermal stress waves in a hollow circular cylinder of Functionally Graded Material (FGM) under laser-pulse heating. The FGM is regarded as a mixture of ceramic and metal phases, the volume fractions of which distribute continuously inside the material. The mathematical problem is one of the wave propagation in nonhomogeneous material. The formulation of the problem is based on the theory of coupled thermoelasticity along with the modified Fourier's law. A set of generalized equation is presented which governs the propagation of plane, cylindrical, and spherical waves in FGM. The solution is obtained by using the method of characteristics. Numerical results for the propagation of thermal and thermal stress waves in a PSZ (partially stabilized zirconia)/SUS304 (type 304 stainless steel) FGM hollow circular cylinder are presented in graphical form.

Key Words: Generalized Thermoelasticity, Dynamic Thermal Stresses, Characteristic Method Laser-Pulse Radiation, Wave Propagation

1. 結 言

「古典熱弾性理論」による熱波の速度が無窮大という物理的不合理性を克服するために展開された「一般化された熱弾性理論」によって数多くの熱波および熱応力波に関する解析が報告されている⁽¹⁾。しかしながら、これまでの研究の多くは、均質材料に対するものであり、不均質材料に対しては Mengi と Turhan の報告⁽²⁾、非線形材料に対しては Singh と Tran の報告⁽³⁾が見受けられる程度であり、解析対象も無限体や半無限体に限られているようである。

近年、傾斜機能材料(Functionally Graded Material; FGM)に代表される各種の不均質材料が創製されるようになり、また高速レーザ技術の発展に伴い極めて短い熱じょう乱が与えられ非フーリエ効果が工学および実際問題でも徐々に注目されるようになってきた。

著者は、前報⁽⁴⁾において均質有限平板の熱波および熱応力波の伝ば挙動を報告した。本論文ではこれを拡張して、高速レーザなどにより衝撃的に加熱を受ける

傾斜機能材料からなる平板、中空円筒および中空球に生じる熱波および熱応力波を、一般化された熱弾性理論に基づき統一的に定式化し、これを特性曲線法により数値解析する方法を示す。PSZ(部分安定化ジルコニア)と SUS 304(オーステナイト系ステンレス)を組成成分とする各種の傾斜機能円筒に対する数値計算を行い、加熱条件や組成分布が熱波および熱応力波の伝ば挙動に及ぼす影響を明らかにしている。

2. 解 析

2・1 基礎方程式および特性曲線方程式 一般化された熱弾性理論に基づく直角座標、円柱座標および球座標による一次元的熱弾性問題の基礎式は次式で与えられる。

(1) 運動方程式

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial r} + \frac{N(\sigma_1 - \sigma_2)}{r} = \rho \frac{\partial v}{\partial t} \dots\dots\dots (1)$$

(2) 構成方程式

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial r} + N\lambda \frac{v}{r} - \beta \frac{\partial T}{\partial t} \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial t} = \lambda \frac{\partial v}{\partial r} + N(\lambda + 2\mu) \frac{v}{r} - N(N-1)\mu \frac{v}{r} - \beta \frac{\partial T}{\partial t} \dots\dots\dots (3)$$

* 原稿受付 1998年12月25日。

^{*1} 正員、静岡大学教育学部(〒422 8529 静岡市大谷 836)。

E-mail: einsumi@ipc.shizuoka.ac.jp

(3) 修正されたフーリエの法則

$$\tau \frac{\partial q}{\partial t} + q = -k \frac{\partial T}{\partial r} \dots\dots\dots (4)$$

(4) 修正された熱伝導方程式

$$\frac{\partial q}{\partial r} + \frac{N}{r}q + \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} + T_0 \beta \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{N}{r}v \right) = W \dots\dots\dots (5)$$

ただし、 N は定数で、平板、円柱、球の問題に対して、それぞれ0,1,2の値を取る。また、 r は平板の問題に対しては表面からの垂直距離、円柱および球の問題に対しては中心からの半径を取る。 (σ_1, σ_2) は垂直応力、 u を変位とするととき $v = \partial u / \partial t$ は粒子速度、 T は基準温度よりの温度変化、 q は熱流束、 ρ は密度、 c_v は比熱、 k は熱伝導率、 τ は緩和時間、 T_0 は絶対基準温度、 W は内部熱発生量である。また、 α を線膨張係数、 λ および μ をラーメの定数とするととき、 $\beta = \alpha(3\lambda + 2\mu)$ である。不均質材料としての傾斜機能材料においては、これらの熱弾性定数はすべて座標 r の関数として変化する。

式(1)~(5)は r と t を独立変数とする $v, \sigma_1, \sigma_2, T, q$ に関する5元連立1階偏微分方程式であり双曲形である。基礎式が双曲形偏微分方程式で与えられる場合には特性曲線法が有効である。特性曲線法は、基礎偏微分方程式をこれと等価な特性曲線に沿う常微分方程式に変換し、これらを特性曲線に沿って数値積分して差分化し、逐次解を求める方法である。本問題に対する特性曲線および特性曲線方程式は以下のように誘導される。

式(1)~(5)を行列表示すれば

$$L[\omega] = A\omega_t + B\omega_r + C\omega = 0 \dots\dots\dots (6)$$

ここで、下添字は変数 t, r に関する偏微分を意味し、行列 ω, A, B, C はそれぞれ次式で与えられる。

$$\omega = \begin{bmatrix} v \\ \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ T \\ q \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho c_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -(\lambda + 2\mu) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta T_0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -\frac{N}{r}(\sigma_1 - \sigma_2) \\ -N\lambda \frac{v}{r} \\ -\{N(\lambda + 2\mu) - N(N-1)\} \frac{v}{r} \\ \beta T_0 \frac{N}{r}v + \frac{N}{r}q - W \\ q \end{bmatrix}$$

いま、関数 $\Phi(t, r) = \text{const.}$ が式(6)の特性曲面であるための条件は、 $A\Phi_t + B\Phi_r$ で定義される特性マトリックスの行列式が零になることであり、次式を得る。

$$\Phi_t [\Phi_t^2 - c_1^2 \Phi_r^2] [\Phi_t^2 - c_2^2 \Phi_r^2] = 0 \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 c_1, c_2 は、 $c_1 > c_2$ として

$$\begin{cases} c_1^2 \\ c_2^2 \end{cases} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\kappa}{\tau} + c_L^2 + \delta c_L^2 \right) \pm \sqrt{\left(c_L^2 + \delta c_L^2 + \frac{\kappa}{\tau} \right)^2 - 4 \frac{\kappa}{\tau} c_L^2} \right] \dots\dots\dots (8)$$

で与えられる二つの伝ば速度である。ただし、 κ は温度伝導率、 c_L は膨張波の伝ば速度、 δ は連成係数であり

$$\kappa = \frac{k}{\rho c_v}, \quad c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad \delta = \frac{\beta^2 T_0}{\rho c_v (\lambda + 2\mu)} \dots\dots\dots (9)$$

なお、非連成問題の場合 ($\delta = 0$)、 $c_1 = c_T = \sqrt{\kappa/\tau}$ 、 $c_2 = c_L$ となつて、 c_1 は熱波の伝ば速度 c_T に、 c_2 は膨張波の伝ば速度 c_L に一致する。また、緩和時間を考慮しない場合 ($\tau = 0$)、 $c_1 = \infty$ 、 $c_2 = \sqrt{1 + \delta} c_L$ となり、古典熱弾性理論による熱波の速度が無限大という結果に一致する。

式(7)より、本問題に適する特性曲線は次の5種類の曲線群 I_i ($i=1\sim 5$)により構成されることがわかる。

$$I_i : \frac{dr}{dt} = V_i \quad (i=1\sim 5)$$

$$(V_1, V_2, V_3, V_4, V_5) = (c_1, -c_1, c_2, -c_2, 0) \dots\dots\dots (10)$$

材料の不均質性により、速度 V_i ($i=1\sim 4$)は座標 r の関数として変化し、 $dr/dt = V_1(r)$ および $dr/dt = V_2(r)$ は特性曲面 (r, t) においてそれぞれ傾きが c_1 および $-c_1$ の曲線群、 $dr/dt = V_3(r)$ および $dr/dt = V_4(r)$ はそれぞれ傾きが c_2 および $-c_2$ の曲線群を構成する。 $dr/dt = V_5 = 0$ は t 軸に平行な直線である。

これらに対応する常微分方程式としての特性曲線方程式はそれぞれ次式のように誘導される。

$I_i : dr/dt = V_i$ ($i=1\sim 4$)に対して

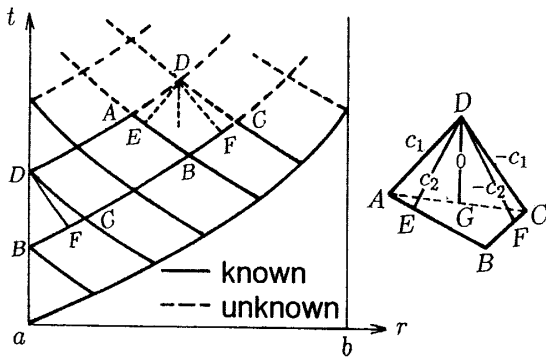


Fig. 1 Characteristic network for FGM cylinder with inner and outer radii a and b

$$\begin{aligned}
 & l_1^{(i)} d\sigma_1 - l_2^{(i)} dv + l_3^{(i)} dq + l_4^{(i)} dT \\
 & = l_5^{(i)} W dt - l_6^{(i)} q dt + l_7^{(i)} v dt - l_8^{(i)} (\sigma_1 - \sigma_2) dt \\
 & \dots\dots\dots (11)
 \end{aligned}$$

ただし

$$\left. \begin{aligned}
 l_1^{(i)} &= 1, \quad l_2^{(i)} = \rho V_i, \quad l_3^{(i)} = \frac{\rho(c_i^2 - V_i^2)}{T_0 \beta V_i} \\
 l_4^{(i)} &= \frac{k \rho (c_i^2 - V_i^2)}{T_0 \beta \tau V_i^2}, \quad l_5^{(i)} = \frac{\rho(c_i^2 - V_i^2)}{T_0 \beta} \\
 l_6^{(i)} &= \frac{\rho(c_i^2 - V_i^2)}{T_0 \beta V_i} \left(N \frac{V_i}{r} + \frac{1}{\tau} \right) \\
 l_7^{(i)} &= \frac{N}{r} \{ \lambda - \rho(c_i^2 - V_i^2) \}, \quad l_8^{(i)} = \frac{N}{r} V_i
 \end{aligned} \right\} \dots\dots (12)$$

また、 $I_5: dr/dt = V_5 = 0$ に対して次式となる。

$$l_1^{(5)} d\sigma_1 - l_2^{(5)} d\sigma_2 + l_3^{(5)} \frac{v}{r} dt - l_4^{(5)} dT = 0 \dots\dots (13)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned}
 l_1^{(5)} &= 1, \quad l_2^{(5)} = \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda}, \quad l_4^{(5)} = \frac{2\mu\beta}{\lambda} \\
 l_3^{(5)} &= N \left[\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda} \{ \lambda + 2\mu - (N-1)\mu \} - \lambda \right]
 \end{aligned} \right\} \dots\dots (14)$$

なお、非連成問題の場合 ($\delta = 0$)、式(12)の係数は以下のようなになる。

$I_i: dr/dt = V_i$ ($i = 1, 2$) に対して

$$\left. \begin{aligned}
 l_1^{(i)} &= 1, \quad l_2^{(i)} = \rho V_i, \quad l_3^{(i)} = \frac{\tau \beta V_i}{k - \rho c_v \tau V_i^2} \\
 l_4^{(i)} &= \frac{k \beta}{k - \rho c_v \tau V_i^2}, \quad l_5^{(i)} = \frac{\tau \beta V_i^2}{k - \rho c_v \tau V_i^2} \\
 l_6^{(i)} &= \frac{\tau \beta V_i}{k - \rho c_v \tau V_i^2} \left(N \frac{V_i}{r} + \frac{1}{\tau} \right) \\
 l_7^{(i)} &= \frac{N}{r} \lambda, \quad l_8^{(i)} = \frac{N}{r} V_i
 \end{aligned} \right\} \dots\dots (15)$$

$I_i: dr/dt = V_i$ ($i = 3, 4$) に対して

$$\left. \begin{aligned}
 l_1^{(i)} &= 0, \quad l_2^{(i)} = 0, \quad l_3^{(i)} = 1 \\
 l_4^{(i)} &= \rho c_v V_i, \quad l_5^{(i)} = V_i, \quad l_6^{(i)} = \left(N \frac{V_i}{r} + \frac{1}{\tau} \right) \\
 l_7^{(i)} &= 0, \quad l_8^{(i)} = 0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots (16)$$

Procedure for Determining Grid Point D

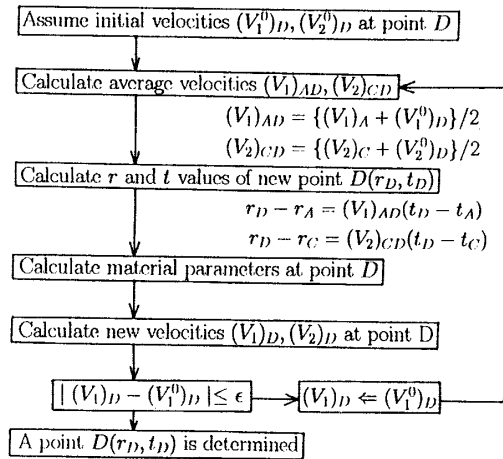


Fig. 2 Procedure for determining grid point D

内部熱発生のない場合 ($W = 0$)、Mengi と Turhan⁽²⁾⁽⁵⁾ は式(11)と同様な特性曲線方程式を誘導しているが、彼らの誘導式の温度に関する項には誤りがある。

2・2 特性曲線方程式の離散化 特性曲線方程式

(11)、(13)を特性曲線(10)に沿って積分して v , σ_1 , σ_2 , T , q を求めるために、まず特性曲面 (r, t) を二つの曲線 $dr/dt = \pm c_1$ により微小特性曲線格子網に分割する(図1)。均質材料の場合、速度 c_1 は一定であるので直線格子網となり、時間増分 Δt (あるいは Δr) を指定するとすべての格子点はあらかじめ知ることができる。しかしながら、不均質材料の場合、速度 c_1 は場所により変化し特性曲線は曲線となるので、格子点自身を未知として逐次決定しなければならない。本論文では図2に示すフローチャートにより、それまでの繰返し計算で既知の格子点 A, C での既知量を用いて格子点 D を繰返し計算で決定する。続いて、点 D を通り傾きが c_2 , $-c_2$ および零の3本の特性曲線を引き、それぞれが AB, BC および AC と交わる点を E, F および G とする。このとき、点 E, F, G における値は点 A, B, C における値より内挿によって求める。このとき、微小格子間隔内で関数値の線形変化を仮定して点 D を通る合計4本の特性曲線 AD (I_1)、CD (I_2)、ED (I_3) および FD (I_4) に沿って対応する特性曲線方程式(11)を数値積分して差分すれば次の4式が得られる。

$$\begin{aligned} & \{l_3^{(i)} + l_4^{(i)} + l_5^{(i)} \Delta t_i\} \sigma_{1D} - \{l_2^{(i)} + l_3^{(i)} + l_4^{(i)} \Delta t_i\} v_D + \{l_3^{(i)} + l_4^{(i)} + l_5^{(i)} \Delta t_i\} q_D + \{l_4^{(i)} + l_5^{(i)}\} T_D - l_5^{(i)} \Delta t_i \sigma_{2D} \\ & = \{l_3^{(i)} + l_4^{(i)} - l_5^{(i)} \Delta t_i\} \sigma_{1i} - \{l_2^{(i)} + l_3^{(i)} - l_4^{(i)} \Delta t_i\} v_i + \{l_3^{(i)} + l_4^{(i)} - l_5^{(i)} \Delta t_i\} q_i + \{l_4^{(i)} + l_5^{(i)}\} T_i + l_5^{(i)} \Delta t_i \sigma_{2i} \\ & + \{l_3^{(i)} W_D + l_4^{(i)} W_i\} \Delta t_i; \Delta t_i = t_D - t_i \dots \dots \dots (17) \end{aligned}$$

ただし、下添字 D および i の付いた量はそれぞれ点 D および点 A, C, E, F における量に対応する。また、式(13)を特性曲線 $GD(I_5)$ に沿って数値積分すれば次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \{l_3^{(5)} + l_4^{(5)}\} \sigma_{1D} - \{l_2^{(5)} + l_3^{(5)}\} \sigma_{2D} + \frac{l_3^{(5)}(t_D - t_C)}{r_D} v_D - \{l_4^{(5)} + l_5^{(5)}\} T_D = \{l_3^{(5)} + l_4^{(5)}\} \sigma_{1C} - \{l_2^{(5)} + l_3^{(5)}\} \sigma_{2C} \\ & - \frac{l_3^{(5)}(t_D - t_C)}{r_C} v_C - \{l_4^{(5)} + l_5^{(5)}\} T_C \dots \dots \dots (18) \end{aligned}$$

この結果、点 D での5個の未知数 $v_D, \sigma_{1D}, \sigma_{2D}, T_D, q_D$ は式(17), (18)の5元連立1次方程式を解くことにより逐次求められる。

3. 数値計算

3・1 傾斜機能材料の組成分布 数値計算は、高温側を耐熱環境性に優れているセラミック PSZ, 低温側を高強度の金属 SUS 304 とする内外半径 a, b の傾斜機能円筒 ($N=1$) が衝撃加熱を受ける場合について行った。この問題では σ_1 は半径方向の、 σ_2 は円周方向の垂直応力に対応する。

基準温度 $T_0=293[K]$ における PSZ と SUS 304 の物性値を以下に示す。

PSZ :

$$\left. \begin{aligned} \rho &= 6\,070[\text{kg/m}^3], \quad c_v = 467[\text{J/kgK}] \\ k &= 1.67[\text{W/mK}], \quad E = 211[\text{GPa}] \\ \alpha &= 2.93 \times 10^{-6}[1/\text{K}], \quad \nu = 0.33 \\ c_L &= 7\,177[\text{m/s}], \quad \delta = 0.001\,09 \end{aligned} \right\} \dots \dots (19)$$

SUS 304 :

$$\left. \begin{aligned} \rho &= 8\,000[\text{kg/m}^3], \quad c_v = 358[\text{J/kgK}] \\ k &= 16[\text{W/mK}], \quad E = 193[\text{GPa}] \\ \alpha &= 14.8 \times 10^{-6}[1/\text{K}], \quad \nu = 0.33 \\ c_L &= 5\,979[\text{m/s}], \quad \delta = 0.025\,3 \end{aligned} \right\} \dots \dots (20)$$

傾斜機能材料の組成分布として、SUS 304 の体積分率 V_m と PSZ の体積分率 $V_c = 1 - V_m$ を座標 r のべき乗で表現し、図3に示す $b^* = b/a = 2$ の3種類の傾斜機能円筒(1), (2), (3)およびSUS 304の均質円筒 ($V_m=1$) について数値計算を行った。

このような組成分布を持つ FGM の E, α, ν は球状粒子分散形複合材料に対する Mori-Tanaka の理論⁽⁶⁾ により、その他の熱弾性定数は線形複合則によって導出した。図4に下添字0を付けた SUS 304 の物性値で無次元化した傾斜機能円筒(1), (2), (3)の E, α, ρ, c_v, k の分布を示す。

3・2 無次元量と数値計算 本論文では、代表長さを内半径 a に取り、次式に示す上添字*の付いた無次元量を採用した。

$$\left. \begin{aligned} r^* &= \frac{r}{a}, \quad t^* = \frac{c_{L0} t}{a}, \quad T^* = \frac{T}{T_0} \\ (\sigma_1^*, \sigma_2^*) &= \frac{(\sigma_1, \sigma_2)}{\rho_0 c_{L0}^2 \alpha_0 T_0}, \quad v^* = \frac{v}{\alpha_0 T_0 c_{L0}} \\ q^* &= \frac{x_0 q}{k_0 c_{L0} T_0}, \quad W^* = \frac{W a}{\rho_0 c_{v0} c_{L0} T_0} \end{aligned} \right\} \dots (21)$$

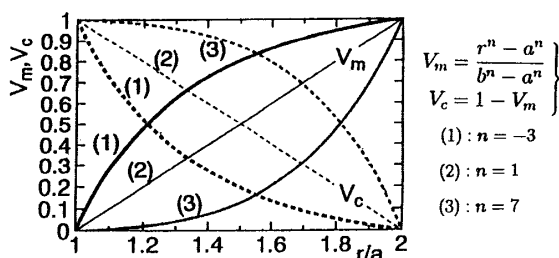


Fig. 3 Volume fractions V_m, V_c for FGM (1), (2), (3)

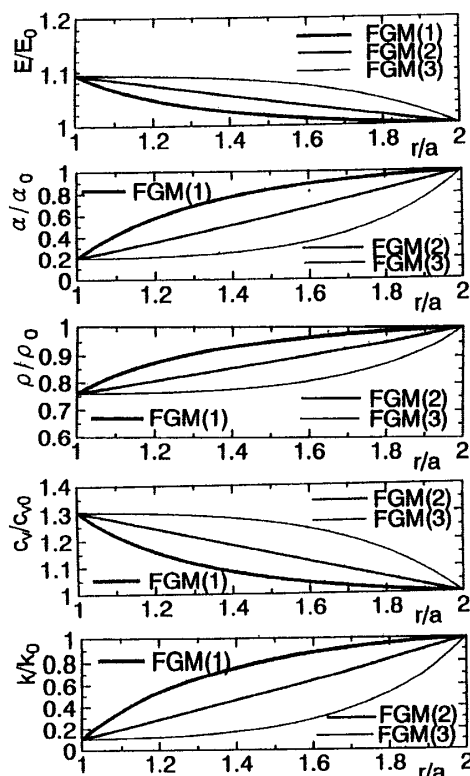


Fig. 4 Distribution of E, α, ρ, c_v and k for FGM (1), (2), (3)

$$\left. \begin{aligned} \rho^* &= \frac{\rho}{\rho_0}, & c_v^* &= \frac{c_v}{c_{v0}}, & k^* &= \frac{k}{k_0} \\ \tau^* &= \frac{c_{L0}\tau}{a}, & \lambda^* &= \frac{\lambda}{\lambda_0}, & \mu^* &= \frac{\mu}{\mu_0} \\ \alpha^* &= \frac{\alpha}{\alpha_0}, & \beta^* &= \frac{\beta}{\rho_0 c_{L0}^2 \alpha_0}, & T_0^* &= \frac{T_0 c_{L0}^2 \alpha_0^2}{c_{v0}} \\ (c_1^*, c_2^*) &= (c_1/c_{L0}, c_2/c_{L0}), & c_L^* &= c_L/c_{L0} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

ただし、下添字0を付けた諸量は基準とする SUS 304 の物性値であり、 c_{L0} は基準材料の膨張波の伝ば速度である。式(21)、(22)の無次元量を用いることは有次元基礎式の対応する物理量と

$$\left. \begin{aligned} \rho \rightarrow \rho^*, & c_v \rightarrow c_v^*, & \lambda \rightarrow \lambda^*, & \mu \rightarrow \mu^*, & \tau \rightarrow \tau^* \\ k \rightarrow \phi_0 k^*, & \kappa \rightarrow \phi_0 \kappa^*, & \beta \rightarrow \beta^*, & T_0 \rightarrow T_0^* \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

と置くことにほかならない。ただし、 ϕ は動的係数⁽⁷⁾あるいは慣性パラメータと呼ばれ、熱拡散が熱応力波に及ぼす影響の大きさを示すパラメータで、次式で定義される。

$$\phi = \frac{a/c_L}{a^2/\kappa} = \frac{\kappa}{c_L a} \dots\dots\dots (24)$$

表1に $a=10^{-8}$ [m] および 10^{-6} [m] とした場合の PSZ, SUS 304 およびアルミニウム合金の ϕ の値を例示する。

各種材料に対する緩和時間 τ は Francis⁽⁹⁾ により実験的に求められており、一般に $10^{-14} \sim 10^{-10}$ [s] の値を取る。これを $a=10^{-6}$ [m] とした SUS 304 の物性値で無次元化すれば、 $\tau^*=0.00006 \sim 0.6$ 程度の値となる。

数値計算においては、円筒は最初一様温度で無応力状態であると仮定し、円筒の内外半径比 $b^*=b/a=2$ と取り、円筒の内外表面は自由境界と仮定した。したがって、力学的境界条件は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1(1, t^*) &= 0 \\ \sigma_1(2, t^*) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

前述のように、均質材料の伝ば速度 c_1^*, c_2^* は一定で特性曲線は等間隔格子網を形成する。この場合、格子間隔の増減と解の収束条件の吟味より、格子間隔を $\Delta r^*=(b^*-1)/100=0.01$ と取ることで安定した解が得られた。一方、傾斜機能材料の伝ば速度 c_1^*, c_2^* は場所によって変化し、特性曲線は不等間隔格子網となる。この場合、格子点を決定するためのフローチャート(図2)における $t^*=0$ に対する初期格子間隔を $\Delta r^*=(b^*-1)/500=0.002$ と取った。このように小さな初期格子間隔を取ることで、以降は2~3回の繰返して各格子点を安定して決定することができた。

3.3 内面をランプ加熱される均質円筒 各種のパラメータが熱波および熱応力波に及ぼす影響を吟味

するために、内部熱発生がなく ($W^*=0$)、内面 $r^*=1$ が立上り時間 t_0^* で一定温度 $T^*=1$ までランプ加熱され、外面 $r^*=2$ は一定温度 $T^*=0$ に保たれる均質円筒 ($V_m=1$) について数値計算を行った。

温度の初期条件および境界条件は

$$\begin{aligned} T^*(r^*, 0) &= 0 \\ T^*(1, t^*) &= \begin{cases} t^*/t_0^*, & t^* \leq t_0^* \\ 1, & t^* \geq t_0^* \end{cases} \dots\dots\dots (26) \\ T^*(2, t^*) &= 0 \end{aligned}$$

図5は連成係数 δ をパラメータとした $r^*=1.0, 1.1, 1.3, 1.5$ における温度 T^* および半径方向応力 σ_1^* の時間的変動を示す。破線で示す $\delta=0$ は非連成の場合であり、実用材料の連成係数が0.1以下である⁽⁷⁾ことを考えれば、本問題に対しては連成項の影響は少ないことがわかる。本論文での一般化された熱弾性理論によれば、二つの伝ば速度は、 $\delta=0$ の場合 ($c_1^*=c_L^*=1.826, c_2^*=c_L^*=1.0$)、 $\delta=0.05$ の場合 ($c_1^*=1.845, c_2^*=0.99$)、 $\delta=0.1$ の場合 ($c_1^*=1.864, c_2^*=0.98$) となり、本問題では熱エネルギーのほとんどが熱波により伝ばされることを示している。古典熱弾性理論による結果とは異なり、図5の温度変動は熱も波動として

Table 1 Values of ϕ for PSZ and SUS 304

substance [unit]	ϕ $a = 10^{-8}$ [m]	ϕ $a = 10^{-6}$ [m]
PSZ	0.00821	0.000821
SUS304	0.0935	0.000935
Aluminum	0.969	0.00969

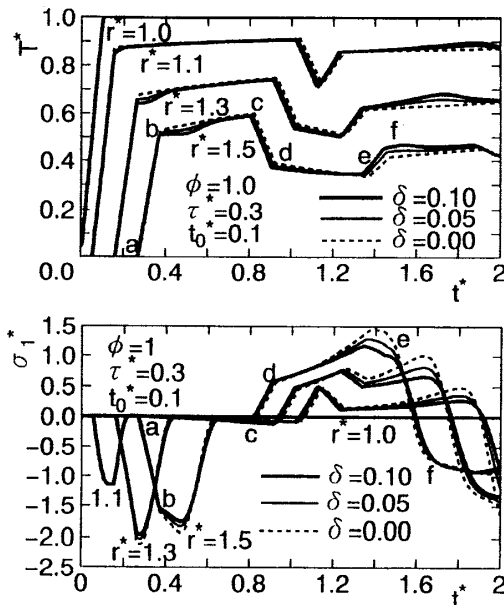


Fig. 5 Temperature T^* and stress σ_1^* for various values of coupling parameter δ

伝ばすることを示している。例えば非連成問題 ($\delta=0$) における $r^*=1.5$ の位置においては、点 a で示す $t^*=0.5 \div 1.826=0.274$ の時間に内面からの最初の熱波が到達し、加熱条件(26)に対応して点 b までは立上り時間 $t_0^*=0.1$ で直線的に、それ以降は緩やかに温度上昇する。しかし点 c で示す $t^*=1.5 \div 1.826=0.82$ の時間に外面から符号を変えた反射波が到達するので温度降下を生じ、点 d までは直線的に、それ以降は緩やかに温度降下をする。しかし点 e において再び内面から符号を変えた反射波が到達し、再び温度上昇を生じる。このように、円筒内部の各点では、内面で生じた熱波が内外表面で符号を変えて反射を繰返して到達するので、温度変動を生じる。外面からの反射波が通過し内面からの再反射波が到達する点 d, e 間の時間は内面に近い点ほど短いので、例えば $r^*=1.1$ の位置ではこの短時間の内に急激な温度降下と上昇を生じている。この状況は図 5 の応力 σ_1^* の時間変動においても同様である。例えば、円筒の $r^*=1.5$ の位置では最初は無応力状態であるが、点 a の時間に内面からの最初の圧縮の応力波が到達し急激な圧縮応力状態になるが、応力波の通過とともに応力は解放されていく。しかし点 c の時間に外面から反射波として引張りの応力波が到達・干渉して引張応力状態になる。以降、最初内面で生じた圧縮の応力波が外面、内面で符号を変えて反射波となって到達するので、円筒内部の各点では圧縮と引張りの応力状態が繰り返される。本問題の力学的境界条件は内外表面で応力自由 ($\sigma_1^*=0$) である

ので σ_1^* は円筒内部で最大値を取ることは他の熱応力問題におけると同じである。

図 6 は緩和時間 τ^* をパラメータとした T^* および σ_1^* の時間的変動を示す。図中の破線で示す $\tau^*=0$ は古典熱弾性論に基づく結果であり、表面に熱じょう乱を受けた瞬間から円筒内部の各点には温度変化を生じ、熱応力波の到達する以前にすでに圧縮応力状態にある結果を与えている。一般化された熱弾性理論による結果では、熱も波動として伝ばし、温度および熱応力分布は緩和時間に大きく依存することがわかる。

図 7 は慣性パラメータ ϕ をパラメータとした $r^*=1.1$ における T^* および $r^*=1.1, 1.3, 1.5$ における σ_1^* の時間的変動を示す。 $\phi=1.0$ の場合 ($c_1^*=c_T^*=1.826$, $c_2^*=c_L^*=1.0$), $\phi=0.1$ の場合 ($c_1^*=c_L^*=1.0$, $c_2^*=c_T^*=0.577$), $\phi=0.01$ の場合 ($c_1^*=1.0$, $c_2^*=0.183$) である。 $\phi=1.0$ の場合、外面からの反射波の影響で急激な温度降下と上昇が見られるが、 $\phi=0.1$ および $\phi=0.01$ の場合は図示した時間内 ($t^* \leq 2$) では反射波は到達せず、なだらかな温度上昇を続けている。熱が材料表面から内部に伝達される動的問題においては、温度および熱応力分布は ϕ の値に大きく依存する。本報での初期応答時間内では、 $\phi=0.01$ 程度になれば、熱はほとんど材料内部まで伝達されず、したがって生じる熱応力も非常に小さいことを示している。しかしながら、表 1 に例示するように、 ϕ の値は材料により大きく異なり、また対象とする問題の代表長さに依存するので、超高速レーザーの開発、ナノ・マイク

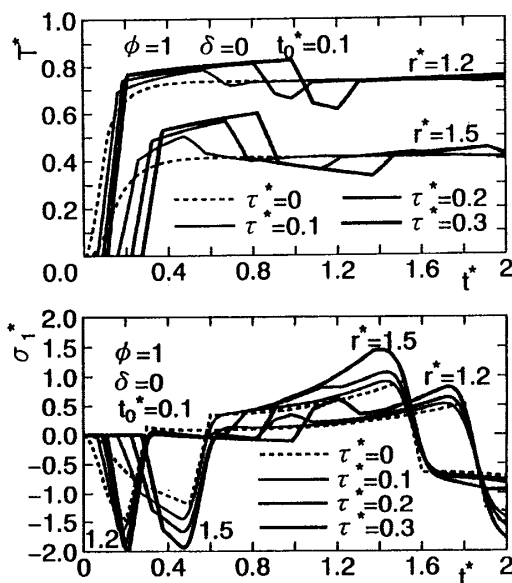


Fig. 6 Temperature T^* and stress σ_1^* for various values of relaxation time τ

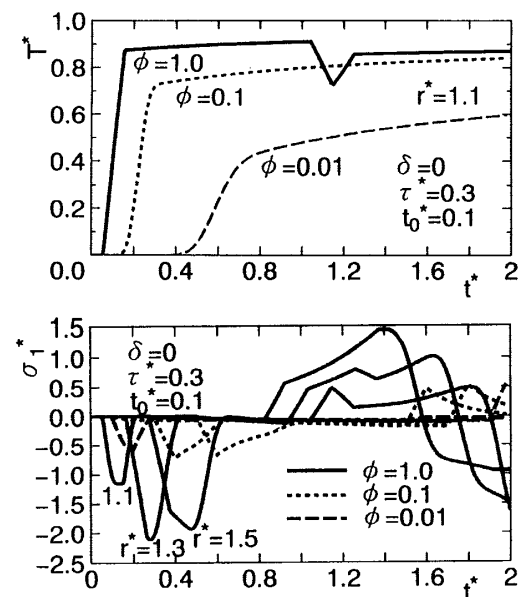


Fig. 7 Temperature T^* and stress σ_1^* for various values of inertia parameter ϕ

ロマンシング技術の実現が可能となる現在, ns, μm オーダの動的考察は有意義となると考える。

3.4 内部熱発生を受ける傾斜機能円筒 最初、一様温度で無応力状態にある傾斜機能円筒が、時間 $t^* = 0$ の瞬間に円筒内面から超高速レーザーパルスの照射・吸収を受け、内部発熱を生じる場合を考える。一般に超高速レーザーは、時間に関しては $t^* = 0$ を中心とするガウス分布に近いエネルギー形状をもち、それを媒質が吸収する r^* 方向には指数吸収則に従い分布するので、本論文ではレーザーの吸収による内部熱発生 W^* を次式で与える⁽⁸⁾。

$$W^* = \frac{I_0^*}{t_0^* l^*} \exp\left[-\frac{(r^*-1)}{l^*} - \left(\frac{t^*}{t_0^*}\right)^2\right],$$

$$I_0^* = \frac{I_0}{\rho_0 c v_0 T_0 a} \dots\dots\dots (27)$$

ただし、 I_0^* は単位面積当たりのレーザーの強さ、 t_0^* はレーザーのパルス特性時間、 l^* はレーザーの輻射エネルギーの吸収深さである。

温度の初期条件および境界条件は、

$$\left. \begin{aligned} T^*(r^*, 0) &= 0 \\ T^*(1, t^*) &= 0 \\ T^*(2, t^*) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

内部熱発生による熱波および熱応力波の伝ば特性を知るために、まず $\delta = 0.05$, $\tau^* = 0.5$, $t_0^* = 0.5$, $l^* = 0.2$, $I_0^* = 1$ とした均質円筒 ($W_m = 1$) について数値計算を行った。図8は $\phi = 0.1$ および $\phi = 0.001$ の場合について、 $t^* = 0.1 \sim 0.5$ における T^* および σ_1^* の分布を示

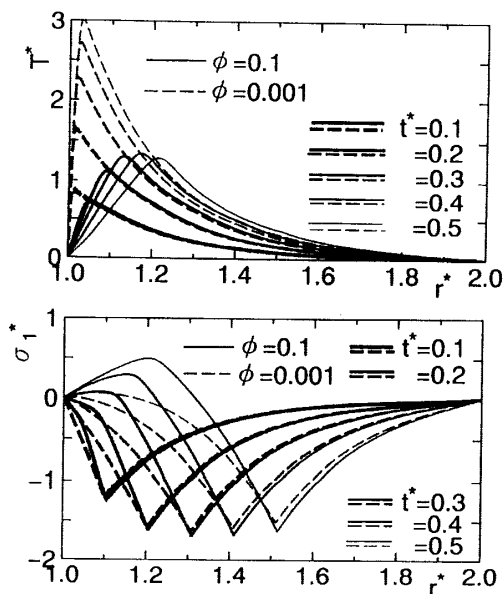


Fig. 8 Distribution of T^* and σ_1^* for $\phi = 0.1$ and $\phi = 0.001$ ($\delta = 0.05$, $\tau^* = 0.5$, $t_0^* = 0.5$, $I_0^* = 1$, $l^* = 0.2$)

す。同じ内部熱発生を受ける場合でも、 ϕ の値が大きいほうが熱が早く拡散し、内表面近くでは温度上昇は小さくなる。また、 ϕ の値が小さくなるにつれ温度の時間的変動は小さくなる。一方、円筒内面で生じた圧縮の熱応力波は時間経過とともに円筒内部に伝ばし、波頭の通過後圧縮応力は急速に解放されていく。3.3節で述べた表面をランプ加熱される場合と異なり、内部熱発生により生じた熱応力波は ϕ の値にあまり依存せず材料内部を伝ばする。

均質材料に対する上述の知見を基に傾斜機能円筒の熱波と熱応力波を数値計算した。図9は $\phi_0 = 0.000935$, $\delta_0 = 0.0258$, $\tau_0^* = 0.00598$, $t_0^* = 0.598$, $l^* = 0.2$, $I_0^* = 1.31$ とした場合の SUS 304 の均質材料および FGM(1), (2), (3) の σ_1^* および σ_2^* の時間的変動を比較する。この場合、代表長さを $a = 10^{-6}[\text{m}]$ とすれば、それぞれの無次元量は $\tau = 10^{-12}[\text{s}]$, $t_0 = 10^{-10}[\text{s}]$, $l = 0.2 \times 10^{-6}[\text{m}]$, $I_0 = 1[\text{kJ}/\text{m}^2]$ の物理量に対応する。なお、傾斜機能材料に対する緩和時間、内部熱発生に関するパラメータは未知のため、各材料に対して上記の同じ値を用いた。SUS 304 の均質材料に比べ、高温側に PSZ を多く含む傾斜機能円筒ほど熱応力緩和の効果が顕著に見られる。

4. 結 言

本論文では、超高速レーザーなどにより極めて短時間のうちに加熱を受ける傾斜機能材料からなる平板、円筒、中球などの一次元動的熱応力を、一般化された熱

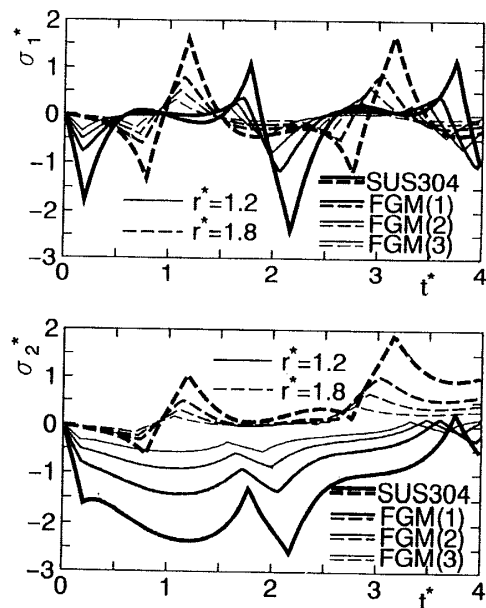


Fig. 9 Stresses σ_1^* and σ_2^* for various materials ($\phi_0 = 0.000935$, $\delta_0 = 0.0258$, $\tau_0^* = 0.00598$, $t_0^* = 0.598$, $l^* = 0.2$, $I_0^* = 1.31$)

弾性理論に基づき統一的に定式化した。数値解析には特性曲線法を用い、熱波と熱応力波に関する曲線となる特性曲線群に沿って特性曲線方程式を積分して離散化する数値解法を確立した。表面をランプ加熱される場合、あるいは内部発熱を受ける場合の SUS 304 の均質円筒および PSZ と SUS 304 を組成成分とする傾斜機能円筒に対して数値計算を行った。結果、緩和時間の温度および熱応力に及ぼす影響は大きく、高速レーザー照射を受ける極めて薄い材料では緩和時間を考慮した解析が必要なことがわかった。また、セラミックは耐熱環境性に優れているので高温側に多くのセラミックを含む傾斜機能材料は、動的熱応力緩和に有効であることがわかった。最後に、本研究は文部省科学研究費の補助のもとに行われたことを記し、謝意を表

す。

文 献

- (1) Chandrasekharaiah, D. S., *Appl. Mech. Rev.*, **39** (1986), 355-376.
- (2) Mengi, Y. and Turhan, D., *J. Appl. Math. Phys.*, **29** (1987), 561-576.
- (3) Singh, M. C. and Tran, D. V. D., *J. Thermal Stresses*, **17** (1994), 21-44.
- (4) 須見尚文, *機論*, **64**-625, A (1998), 2257-2262.
- (5) Mengi, Y. and Turhan, D., *J. Appl. Mech.*, **45** (1978), 433-435.
- (6) Mura, T., *Micromechanics of defects in solids*, 2nd ed., (1987), 394, Martinus Nijhoff.
- (7) 竹内洋一郎, 熱応力, (1981), 325, 日新出版.
- (8) 唐大偉・荒木信幸, *機論*, **62**-604, B (1996), 4183-4188.
- (9) Francis, P. H., *J. Sound Vib.*, **21** (1972), 181-192.