

2008

日本機械学会論文集(A編)
66巻651号(2000-11)

論文 No. 99-1611

非線形弾性材料の熱波と熱応力波の伝ば解析*

須見 尚 文*¹

Thermal and Thermal Stress Waves in Nonlinear Elastic Solids

Naobumi SUMI*²*² Shizuoka University, Faculty of Education, Oya 836, Shizuoka, Shizuoka 422-8529 Japan

This paper is concerned with the thermal and thermal stress waves in nonlinear elastic solids subjected to the impulsive heating. The formulation of the problem is based on the generalized theory of thermoelasticity proposed by Lord and Shulman. A set of generalized equation which governs the propagation of plane, cylindrical and spherical waves in nonlinear elastic solids is presented. The solutions are obtained by using the characteristic method. Numerical results for the propagation of thermal and thermal stress waves in nonlinear elastic plates are presented in the graphical form.

Key Words: Thermal Stress, Stress Wave, Numerical Analysis, Nonlinear Elastic Solids Generalized Thermoelasticity, Characteristic Method

1. 緒 言

「古典熱弾性理論」によれば、弾性体が熱的擾乱を受けるとその源から無限に離れた位置でも瞬間にその影響を受ける。このことは、その理論の基になる熱伝導方程式が放物形であり、熱波の速度が無限大であることに起因する。近年、この物理的、実験的な矛盾をなくすために、熱の緩和時間の概念を導入して、古典熱弾性理論を修正したいくつかの「一般化された熱弾性理論」が提案されている^{(1)~(3)}が、LordとShulmanの理論とGreenとLindsayの理論が有名である。前者はFourierの法則を修正し一つの緩和時間を導入したものであり、後者はエネルギー式と構成方程式に二つの緩和時間を導入したものであり、これらの一般化された熱弾性理論における熱伝導方程式は双曲形となり、熱波の速度は有限となる。

従来、機械構造物に用いられる材料の代表寸法は比較的大きく、また実用材料の緩和時間は非常に小さいので、多くの実際問題では緩和時間は無視できるものとされていた。しかしながら、近年、ナノ・マイクロ

マシニング技術の実現が可能となり、ナノ・マイクロ秒のパルス時間をもつ超高速レーザや高周波マイクロ波などの技術が発達してきた。このような非常に薄い材料に極めて早い熱擾乱が与えられた場合には、熱の緩和過程を含む双曲形熱伝導方程式を扱う必要性が工学および実際問題でも徐々に問題となるようになってきている^{(4)~(6)}。

これまでに、一般化された熱弾性理論に基づいて多くの理論的、数値的な研究がなされているが、研究の多くは均質材料に対するものであり、不均質材料に対してはMengiとTurhan⁽⁷⁾、須見⁽⁸⁾の報告、非線形弾性材料に対してはSinghとTran⁽⁹⁾の報告が見受けられる程度である。

著者は、これまでに特性曲線法を用いて均質材料⁽¹⁰⁾および傾斜機能材料⁽⁸⁾の熱波と熱応力波の伝ば挙動を報告している。本論文では、これまでの解法の非線形弾性材料への拡張として、超高速レーザなどの照射・吸収を受けて衝撃的に内部発熱を受ける非線形弾性材料からなる有限平板、中空円筒、中空球などに生じる熱波と熱応力波を、熱の緩和時間および温度場とひずみ場の連成を考慮した一般化された熱弾性理論により定式化し、これを特性曲線法により数値解析する解法を示す。非線形弾性平板に対する数値計算を行う

* 原稿受付 1999年12月2日。

*¹ 正員、静岡大学教育学部 (☎ 422-8529 静岡市大谷 836)。
E-mail: einsumi@ipc.shizuoka.ac.jp

ことにより、熱波および熱応力波の伝ば挙動を明らかにしている。

2. 解 析

2・1 基礎方程式 本論文では、非線形弾性材料の構成方程式の誘導において次項を仮定する。

- (1) 材料は均質で等方性である。
- (2) 熱ひずみは温度変化に対して線形である。また、弾性定数および熱物性値は温度および場所に依存せず一定である。
- (3) 弾性ひずみは応力に対して非線形である。

本論文では、構成方程式の決定において、単軸の応力-ひずみ関係式として次式を仮定する。

$$\epsilon_t = \frac{\sigma_t}{E} \left\{ 1 + \xi^* \left| \frac{\sigma_t}{\sigma_0} \right|^{(n-1)} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ただし、 ϵ_t , σ_t は単軸引張試験における弾性ひずみ、応力であり、 E , ξ^* , σ_0 は正値の定数、 n は非線形性のパラメータである。式(1)は構造解析において Ramberg-Osgood 則としてよく利用され、圧縮応力-ひずみ線図は引張応力-ひずみ線図と点対称をなし、応力 $\sigma_t = 0$ で線形弾性材料の縦弾性係数 E と同じこう配をもつ。なお、 $\xi^* = 0$ および $n = 1$ の場合は、それぞれ縦弾性係数が E および $E/(1 + \xi^*)$ の線形弾性材料に対応する。

さて、Lord と Shulman の一般化された熱弾性理論に従えば、このような非線形弾性材料からなる有限平板、中空円筒、中空球などの一次元動的熱弾性問題に対する基礎式は次式で与えることができる。

- (1) 運動方程式

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial r} + \frac{N(\sigma_1 - \sigma_2)}{r} = \rho \frac{\partial v}{\partial t} \dots\dots\dots (2)$$

- (2) 構成方程式

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial t} = C_{11}(\sigma_1) \frac{\partial v}{\partial r} + N C_{12}(\sigma_1) \frac{v}{r} - \beta_1(\sigma_1) \frac{\partial T}{\partial t} \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial t} = C_{21}(\sigma_2) \frac{\partial v}{\partial r} + N C_{22}(\sigma_2) \frac{v}{r} - N(N-1) C_{23}(\sigma_2) \frac{v}{r} - \beta_2(\sigma_2) \frac{\partial T}{\partial t} \dots\dots\dots (4)$$

- (3) 修正された Fourier の法則

$$\left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) q = -k \frac{\partial T}{\partial r} \dots\dots\dots (5)$$

- (4) 温度場とひずみ場の連成を考慮したエネルギー保存則

$$\frac{\partial q}{\partial r} + N \frac{q}{r} + \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} + T_0 \beta_1(\sigma_1) \frac{\partial v}{\partial r} + N T_0 \beta_2(\sigma_2) \frac{v}{r} = W \dots\dots\dots (6)$$

ただし、 N は定数で、平板、中空円筒、中空球の問題に対して、それぞれ 0, 1, 2 の値を取る。また、 r は空間座標で、平板の問題に対しては表面からの垂直方向座標、中空円筒および中空球の問題に対しては中心からの半径とする。 (σ_1, σ_2) は垂直応力、 u を r 方向の変位とすると $v = \partial u / \partial t$ は粒子速度、 T は基準温度よりの温度変化、 q は熱流速、 W は内部熱発生量、 ρ は密度、 c_v は比熱、 k は熱伝導率、 τ は緩和時間、 T_0 は絶対基準温度である。また、 α を線膨張係数、 λ および μ をラーメの定数とし、 η_1 および η_2 を

$$\left. \begin{aligned} \eta_1(\sigma_1) &= 1 / \left(1 + \xi^* n \left| \frac{\sigma_1}{\sigma_0} \right|^{(n-1)} \right) \\ \eta_2(\sigma_2) &= 1 / \left(1 + \xi^* n \left| \frac{\sigma_2}{\sigma_0} \right|^{(n-1)} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

と置くと

$$\left. \begin{aligned} C_{11} &= (\lambda + 2\mu) \eta_1, & C_{12} &= \lambda \eta_1 \\ C_{21} &= \lambda \eta_2, & C_{22} &= (\lambda + 2\mu) \eta_2, & C_{23} &= \mu \eta_2 \\ \beta_1 &= \alpha(3\lambda + 2\mu) \eta_1, & \beta_2 &= \alpha(3\lambda + 2\mu) \eta_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

であり、これらの係数は応力 σ_1 または σ_2 の関数として変化する。

式(5)は、熱伝導における Fourier の法則に熱流速の緩和時間 τ を導入することにより修正されたもので、Maxwell-Cattaneo 則とも呼ばれている⁽⁶⁾。これまでにさまざまな材料についての緩和時間 τ が求められており、一般に 10^{-10} s から 10^{-14} s の範囲の値を取る⁽¹¹⁾。

式(6)は、弾性体の状態がひずみ成分と温度変化の状態変数で一義的に定められるものと仮定⁽¹⁾して誘導したものであり、線形弾性材料($\xi^* = 0$, すなわち $\eta_1 = \eta_2 = 1$)に対しては従来の結果⁽⁸⁾と一致する。他方、Singh と Tran⁽⁹⁾ は弾性体の状態を応力成分と温度変化の状態変数と仮定してエネルギー一を誘導しているが、彼らの結果は線形弾性材料に対しては従来の結果と一致しない。

- 2・2 特性曲線および特性曲線方程式 式(2)

~(6)は $v, \sigma_1, \sigma_2, T, q$ に関する準線形⁽¹⁾の双曲形5元連立偏微分方程式である。基礎式が双曲形偏微分方程式で与えられる場合には特性曲線法が有効である。特性曲線および特性曲線方程式の誘導は以下のようである。

式(2)~(6)を行列表示すれば

$$L[\omega] = A^t \omega_t + A^r \omega_r + C = 0 \dots\dots\dots (9)$$

ここで、下添字 t および r はその量についての偏微分を表す。未知数のベクトル ω および行列 A^t, A^r, C は

$$\omega = [v, \sigma_1, \sigma_2, T, q]^T \dots\dots\dots(10)$$

$$A^t = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 & \rho c_v & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(11)$$

$$A^r = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -C_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k & 0 \\ T_0 \beta_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(12)$$

$$C = \begin{bmatrix} -\frac{N}{r}[\sigma_1 - \sigma_2] \\ -NC_{12} \frac{v}{r} \\ \{-NC_{22} + N(N-1)C_{23}\} \frac{v}{r} \\ q \\ NT_0 \beta_2 \frac{v}{r} + N \frac{q}{r} - W \end{bmatrix} \dots\dots\dots(13)$$

いま、関数 $\Phi(t, r) = \text{const.}$ が式(9)の特性曲線であるための条件は $A = A^t \Phi_t + A^r \Phi_r$ で定義される特性マトリックス A の行列式が零になることであり、次式が得られる。

$$\Phi_t [\Phi_t^2 - c_1^2 \Phi_r^2] [\Phi_r^2 - c_2^2 \Phi_t^2] = 0 \dots\dots\dots(14)$$

ここで、 $c_1(\sigma_1)$, $c_2(\sigma_1)$ は、 $c_1 > c_2$ として

$$\begin{cases} c_1^2 \\ c_2^2 \end{cases} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\kappa}{\tau} + c_L^2 \eta_1 + \delta c_L^2 \eta_1^2 \right) \pm \sqrt{\left(\frac{\kappa}{\tau} + c_L^2 \eta_1 + \delta c_L^2 \eta_1^2 \right)^2 - 4 \frac{\kappa c_L^2 \eta_1}{\tau}} \right] \dots\dots(15)$$

ただし、 κ は温度伝導率、 c_L は膨張波の伝ば速度、 δ は連成係数であり、次式で定義される。

$$\kappa = \frac{k}{\rho c_v}, \quad c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad \delta = \frac{\alpha^2 (3\lambda + 2\mu)^2 T_0}{\rho^2 c_v c_L^2} \dots\dots\dots(16)$$

なお、非連成問題の場合 ($\delta = 0$)、 $c_1 = \sqrt{\eta_1} c_L$, $c_2 = \sqrt{\kappa/\tau}$ となり、 c_2 は熱波の伝ば速度 c_T に一致する。一方、緩和時間を考慮しない場合 ($\tau = 0$)、 $c_1 = \sqrt{\eta_1 + \delta \eta_1^2} c_L$, $c_2 = \infty$ となり、古典熱弾性理論による熱波の速度が無限大という結果に一致する。

したがって、式(14)より本問題に対する特性曲線は次式に示す五つの曲線群により与えられることになる。

$$\frac{dr}{dt} = V_i, \quad (i=1 \sim 5) \dots\dots\dots(17)$$

ただし、

$$V_1 = c_1, \quad V_2 = -c_1, \quad V_3 = c_2, \quad V_4 = -c_2, \quad V_5 = 0 \dots\dots\dots(18)$$

すなわち、 $(r-t)$ 平面において、 $dr/dt = V_1$ および $dr/dt = V_2$ は傾きが c_1 および $-c_1$ の特性曲線群を形成し、 $dr/dt = V_3$ および $dr/dt = V_4$ は傾きが c_2 および $-c_2$ の曲線群を形成する。残りの $dr/dt = V_5$ は t 軸に平行な直線群となる。

これらの特性曲線に沿って双曲形の基礎偏微分方程式は常微分方程式に変換でき、これを特性曲線方程式と呼ぶ。すなわち、本問題に対する常微分方程式としての特性曲線方程式は、式(2)~(6)および式(17)を用いれば、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} & dr/dt = V_i, \quad (i=1 \sim 4) \text{ に沿って} \\ & l_1^{(i)} d\sigma_1 - l_2^{(i)} dv + l_3^{(i)} dq + l_4^{(i)} dT \\ & = l_5^{(i)} W dt - l_6^{(i)} q dt + l_7^{(i)} v dt - l_8^{(i)} (\sigma_1 - \sigma_2) dt \end{aligned} \dots\dots\dots(19)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} l_1^{(i)} &= 1, \quad l_2^{(i)} = \rho V_i, \quad l_3^{(i)} = \frac{(C_{11} - \rho V_i^2)}{T_0 \beta_1 V_i} \\ l_4^{(i)} &= \frac{k(C_{11} - \rho V_i^2)}{T_0 \beta_1 \tau V_i^2}, \quad l_5^{(i)} = \frac{(C_{11} - \rho V_i^2)}{T_0 \beta_1} \\ l_6^{(i)} &= \frac{(C_{11} - \rho V_i^2)}{T_0 \beta_1 V_i} \left(N \frac{V_i}{r} + \frac{1}{\tau} \right), \quad l_8^{(i)} = \frac{N}{r} V_i \\ l_7^{(i)} &= \frac{N}{r} \left\{ C_{12} - \frac{\beta_2}{\beta_1} (C_{11} - \rho V_i^2) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(20)$$

$dr/dt = V_5 = 0$ に沿って

$$l_1^{(5)} d\sigma_1 - l_2^{(5)} d\sigma_2 + l_3^{(5)} \frac{v}{r} dt - l_4^{(5)} dT = 0 \dots\dots(21)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} l_1^{(5)} &= 1, \quad l_2^{(5)} = \frac{C_{11}}{C_{21}}, \quad l_4^{(5)} = \frac{C_{11}}{C_{21}} \beta_2 - \beta_1 \\ l_3^{(5)} &= N \left[\frac{C_{11}}{C_{21}} (C_{22} - (N-1)C_{23}) - C_{12} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(22)$$

なお、非連成問題の場合 ($\delta = 0$)、式(19)の係数は $dr/dt = V_i$, ($i=1, 2$) に沿って

$$\left. \begin{aligned} l_1^{(i)} &= 1, \quad l_2^{(i)} = \rho V_i, \quad l_3^{(i)} = \frac{\tau \beta_1 V_i}{k - \rho c_v \tau V_i^2} \\ l_4^{(i)} &= \frac{k \beta_1}{k - \rho c_v \tau V_i^2}, \quad l_5^{(i)} = \frac{\tau \beta_1 V_i^2}{k - \rho c_v \tau V_i^2} \\ l_6^{(i)} &= \frac{\tau \beta_1 V_i}{k - \rho c_v \tau V_i^2} \left(N \frac{V_i}{r} + \frac{1}{\tau} \right) \\ l_7^{(i)} &= \frac{N}{r} C_{12}, \quad l_8^{(i)} = \frac{N}{r} V_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(23)$$

$dr/dt = V_i$, ($i=3, 4$) に沿って

$$\left. \begin{aligned} l_1^{(i)} &= 0, l_2^{(i)} = 0, l_3^{(i)} = 1 \\ l_4^{(i)} &= \rho c_v V_i, l_5^{(i)} = V_i \\ l_6^{(i)} &= \left(N \frac{V_i}{r} + \frac{1}{\tau} \right), l_7^{(i)} = 0, l_8^{(i)} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (24)$$

2.3 特性曲線方程式の離散化 特性曲線法による解析手順は以下のものである。まず特性曲面 ($r-t$) を二つの曲線 $dr/dt = \pm c_1$ により微小特性曲線格子網に分割する (図1参照)。線形材料の場合、速度 c_1 は一定であるので直線格子網となり、時間増分 Δt (あるいは Δr) を指定するとすべての格子点はあらかじめ知ることができる。しかしながら、非線形材料の場合、速度 c_1 は応力 σ_1 の関数として変化するので曲線格子網となって格子点自身も未知となる。したがって、本論文では図2に示すフローチャートにより、それまでの繰返し計算で既知の実線で示す特性曲線上の格子点 A, C での既知量を用いて、破線で示す特性曲線上の未知の格子点 D を繰返し計算で決定する。続いて、点 D を通り傾きが $c_2, -c_2$ および 0 の3本の特性曲線を引き、それぞれが AB, BC および AC と交わる点を E, F および G とする。このとき、点 E, F, G における関数値は点 A, B, C における既知量より内挿によって求める。このとき、これらの微小格子間隔内で関数値の線形変化を仮定して、点 D を通る特性曲線に沿って成立する式(19)を点 A から点 D, C から D, E から D, F から D まで、さらに式(21)を点 G から D まで数値積分すれば、点 D での5個の未知数 $v_D, \sigma_{1D}, \sigma_{2D}, T_D, q_D$ に対する5個の差分方程式が得られ、これを解くことにより各格子点での解が逐次求められる。

なお、弾性体の境界上の点においては特性曲線 AD, ED あるいは CD, FD が存在せず、未知量を求めるための有効な特性曲線数が2個減少し、差分方程式の数は3個となるが、そこにおいては熱および力学的境界条件より5個の未知量の内の2個(例えば、温度と応

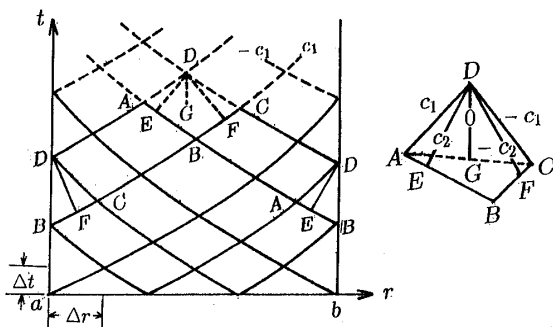


Fig. 1 Characteristic network for numerical calculation

力)が規定されるので、残りの3個の未知量はこの3個の差分方程式を解くことにより求められる。

3. 数値計算

3.1 問題の呈示と無次元量 数値計算例として、最初、一様温度で無応力状態にある厚さ L の非線形弾性平板が、時間 $t=0$ の瞬間にその表面 $x=0$ から超高速レーザーパルスの照射を受け、表面をランプ加熱される場合および内部熱発生を受ける場合に生じる熱波と熱応力波を考える。この場合、前述の基礎式において $N=0$ であり、未知量は v, σ_x, T, q の4個となる。

平板の力学的境界条件は、両表面は応力自由として $\sigma_x(0, t)=0, \sigma_x(L, t)=0 \dots\dots (25)$

非線形弾性材料としては 6061-T 6 アルミニウム合金を用い、その基準温度 $T_0=293[K]$ における物性値は

$$\left. \begin{aligned} \rho &= 2700 [\text{kg/m}^3], c_v = 964 [\text{J/kgK}] \\ k &= 155 [\text{W/mK}], \alpha = 23.4 \times 10^{-6} [1/\text{K}] \\ \nu &= 0.33, E = 68.9 [\text{GPa}] \\ c_L &= 6150 [\text{m/s}], \delta = 0.0248 \end{aligned} \right\} \dots (26)$$

これらの物性値は温度に依存しないものとする。本論文では、 l を代表長さとして次の無次元量を用

A Procedure for Determining Grid Point D

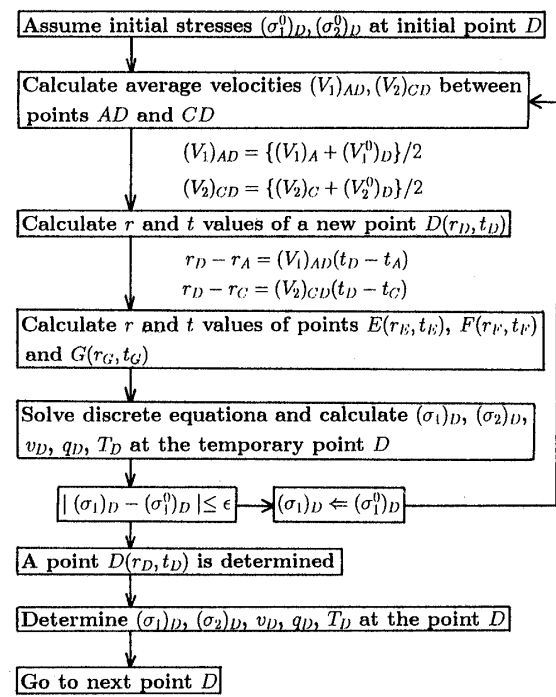


Fig. 2 Numerical procedure for determining the grid points

いた。

$$\left. \begin{aligned} x^* &= \frac{x}{l}, \quad t^* = \frac{c_L t}{l}, \quad T^* = \frac{T}{T_0} \\ \sigma_x^* &= \frac{\sigma_x}{\rho c_L^2 a T_0}, \quad v^* = \frac{v}{a T_0 c_L}, \quad q^* = \frac{\kappa q}{k c_L T_0} \\ W^* &= \frac{Wl}{\rho c_v c_L T_0}, \quad L^* = \frac{L}{l} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(27)$$

また、式(1)、(10)および式(11)における無次元量は

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_t^*, \sigma_0^*) &= \left(\frac{\sigma_t}{\rho c_L^2 a T_0}, \frac{\sigma_0}{\rho c_L^2 a T_0} \right), \quad \varepsilon_t^* = \frac{\varepsilon_t}{a T_0} \\ (c_1^*, c_2^*) &= \left(\frac{c_1}{c_L}, \frac{c_2}{c_L} \right), \quad \kappa^* = \frac{\kappa}{l c_L} = \frac{l/c_L}{l^2/\kappa} = \phi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(28)$$

ただし、 ϕ は慣性パラメータ⁽⁸⁾であり、熱応力波の伝ばに関する特性時間と熱拡散に関する特性時間の比で定義される。

図3に $\xi^*=0.2$, $\sigma_0^*=1.0$, $n=2$ および3の非線形弾性材料の応力-ひずみ線図を示す。図中の破線は $\xi^*=0$ の線形弾性材料に対応する。 n の変化による線図は、 $\sigma_t^* = \sigma_0^*$ で交差し、 σ_0^* が小さくなるにつれ、また ξ^* が大きくなるにつれて線形弾性材料のそれよりずれが大きくなる。

前述のように、 $\xi^*=0$ の線形弾性材料の場合、伝ば速度 c_1^* および c_2^* は一定で特性曲線は等間隔直線格子網を形成する。この場合は、格子間隔の増減と解の収束状況の吟味により、格子間隔を $\Delta x^* = L^*/100$ と

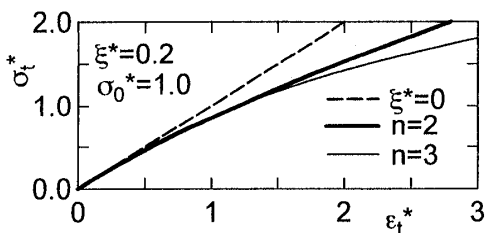


Fig. 3 Stress-strain relation used in the calculation

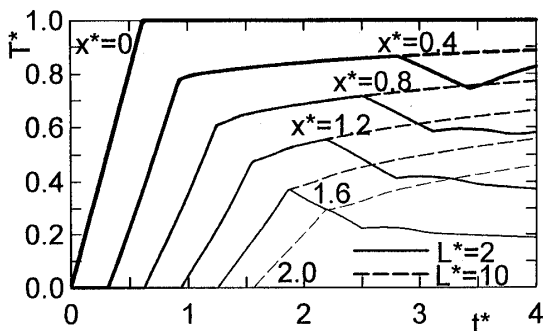


Fig. 4 Time variations of T^* at various stations x^* of the linear elastic plate ($\xi^*=0$)

取ることで安定した解が得られた。一方、非線形弾性材料の場合、 c_1^* , c_2^* は位置によって変化し、特性曲線は不等間隔格子網となる。この場合、格子点を決定するためのフローチャート図2において、 $t^*=0$ の初期格子間隔を $\Delta x^* = L^*/500$ と取った。このように小さな初期格子間隔を取ることで、以降は2~3回の繰返しで各格子点を安定して決定することができた。

3.2 表面をランプ加熱される非線形弾性平板

まず、内部熱発生がなく ($W=0$)、初期温度 T_0 に保たれた平板の表面 $x=0$ が立上り時間 t_b でランプ加熱されて温度 T_c だけ温度上昇し、他表面 $x=L$ は初期温度に保たれる場合を考える。

基準温度よりの温度変化 T に対する境界条件は

$$T(0, t) = \begin{cases} T_c \frac{t}{t_b}, & t \leq t_b \\ T_c, & t \geq t_b \end{cases} \dots\dots\dots(29)$$

$$T(L, t) = 0$$

ただし、 T_c は表面 $x=0$ における基準温度よりの温度上昇である。

数値計算においては、 $T_c = T_0$ とし、代表長さを $l = 10^{-8}$ [m]、緩和時間を $\tau = 10^{-12}$ [s]、立上り時間を $t_b = 10^{-12}$ [s] と取り、平板の厚さが $L = (2, 10) \times 10^{-8}$ [m] の2種類の場合について解を得た。この場合、対応する無次元量は $\phi = 0.969$, $\delta = 0.0248$, $\tau^* = t_b^* = 0.615$, $L^* = (2, 10)$ となり、 $\xi^*=0$ の場合の二つの無次元伝ば速度は $c_1^* = 1.28$, $c_2^* = 0.98$ となる。

熱波と熱応力波の基本的伝ば特性を把握するために、 $\xi^*=0$ の線形弾性平板の温度 T^* および熱応力 σ_x^* の時間的変動を位置 x^* をパラメータとして図4および図5に示す。これらの図において、実線は $L^*=2$ 、破線は $L^*=10$ の場合に対応する。図4より、平板の各位置では、熱波が到達するまでは初期温度 $T^*=0$ に保たれるが、 $t^* = x^*/c_1^*$ の時間に表面 $x^*=0$ からの最初の熱波が到達し、最初は t_b^* の時間の立上り

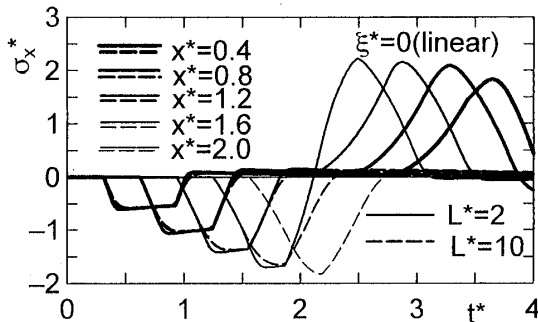


Fig. 5 Time variations of σ_x^* at various stations x^* of the linear elastic plate ($\xi^*=0$)

で直線的に、その後は熱拡散によりなだらかに温度上昇を生じるが、 $t^*=(2L^*-x^*)/c^*$ の時間に表面 $x^*=L^*$ から反射波としての熱波が到達して温度は下降する(熱流速 q^* は増加する)。その後は、両表面 $x^*=0, L^*$ からの反射波が到達・干渉するために、温度(および熱流速)は振動しながら定常値に近づく。なお、 $L^*=10$ の平板では図示した $t^*=4$ の時間内では反射波は到達せず、したがって $L^*=2$ の場合のように温度(および熱流速)は振動しない。 $\tau^*=0$ の古典熱弾性理論による解析では、熱伝導方程式は放物形となり、熱は拡散現象により伝達され温度の波動現象は見られないが、緩和時間を考慮した本解析では、熱も波動現象として伝ばすることを示している。

このような状況は図5の熱応力 σ_x^* の変動においても同じである。すなわち、平板の各位置では、熱応力波が到達するまでは初期無応力状態に保たれるが、表面 $x^*=0$ からの最初の熱応力波の到達とともに急激な圧縮応力状態となり、応力波の通過とともに圧縮応力は解放されていく。その後、他表面 $x^*=L^*$ からの反射波としての引張りの応力波が到達して引張応力状態になる。以後、応力波の両表面からの反射と干渉により圧縮と引張りの応力状態が交互に繰返される。なお、 $L^*=10$ の平板では図示した $t^*=4$ の時間内では反射波は到達せず、半無限体の場合と同様の応力状態を示している。図6は $\xi^*=0.2, \sigma_0^*=1.0, n=2$ の非線

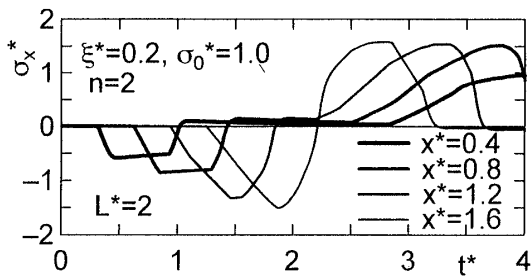


Fig. 6 Time variations of σ_x^* at various stations x^* of the non-linear elastic plate

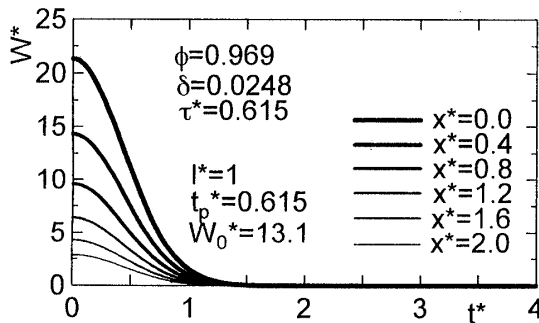


Fig. 7 Profile of heat generation W^* for various values of position x^*

形弾性平板の熱応力 σ_x^* の時間的変動を位置 x^* をパラメータとして示す。図5と比較して材料の非線形性を考慮すれば応力値は緩和されている。

3・3 内部熱発生を受ける非線形弾性平板 一般に、超高速レーザー光が入射されると、吸収深さ l が $l \ll 10^{-6}$ [m]でレーザーパワーは吸収され、内部発熱により温度上昇し、レーザー強度 w は $10^{14} \sim 10^{15}$ [W/m²]以上で吸収は顕著になる⁽¹²⁾。この場合、超高速レーザーは時間とともにガウス分布状のエネルギー形状をもち、それを媒質が吸収する深さ方向 x には指数吸収則に従って分布することが多い。したがって、本論文ではレーザーの吸収による内部熱発生 W を次式で与え

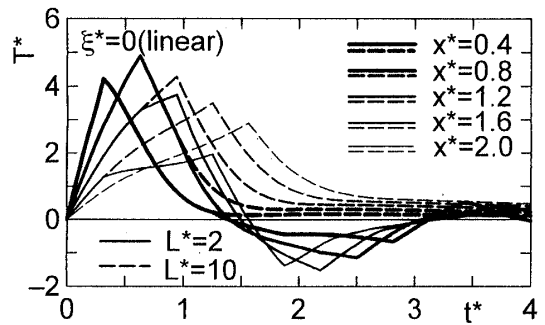


Fig. 8 Time variations of T^* at various stations x^* of the linear elastic plate ($\xi^*=0$)

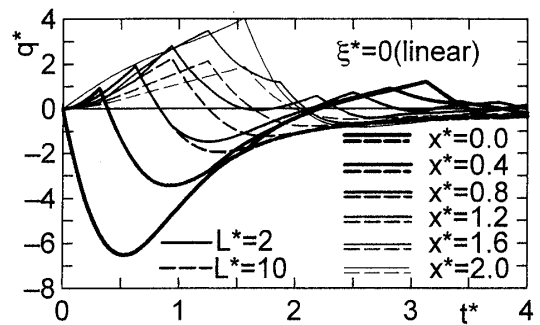


Fig. 9 Time variations of q^* at various stations x^* of the linear elastic plate ($\xi^*=0$)

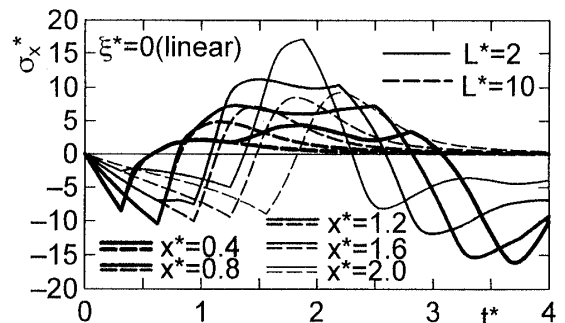


Fig. 10 Time variations of σ_x^* at various stations x^* of the linear elastic plate ($\xi^*=0$)

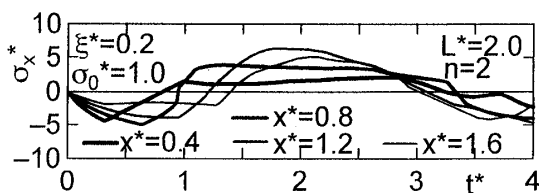


Fig. 11 Time variations of σ_x^* at various stations x^* of the non-linear elastic plate

る⁽⁶⁾。

$$W = \frac{W_0}{t_p l} \exp\left[-\frac{x}{l} - \left(\frac{t}{t_p}\right)^2\right], \quad W_0 = wt_p \quad \dots (30)$$

ただし、 W_0 は単位面積当たりのレーザーの強さ、 t_p はレーザーのパルス特性時間、 w はレーザーのパワー密度、 l はレーザーの輻射エネルギーの吸収深さである。

本論文では、衝撃的に生じる内部発熱による熱波と熱応力波の基本的伝ば特性を把握するために、両表面は初期一定温度に保たれるものとして、温度の境界条件を次式で与える。

$$T(0, t) = 0, \quad T(L, t) = 0 \quad \dots (31)$$

一般に、金属材料の吸収深さ l は 10^{-8} [m] 程度⁽¹³⁾ であるので、 $l = 10^{-8}$ [m] とし、これを代表長さとした。また、緩和時間 τ 、パルス時間 t_p および板厚 L は 3・2 節と同じとし、レーザーの強さを $W_0 = 100$ [J/m²] とした。この場合、対応する無次元量は $W_0^* = W_0 / \rho c_v T_0 l = 13.1$ となる。

図 7 に平板の内部熱発生量 W^* の時間的変動を位置 x^* をパラメータとして示す。 $\xi^* = 0$ の線形平板の温度 T^* 、熱流速 q^* および熱応力 σ_x^* の時間的変動を位置 x^* をパラメータとしてそれぞれ図 8、9 および図 10 に示す。 $L^* = 2$ の場合、両表面からの反射波の影響で温度 T^* および熱流速 q^* は正負の値で大きく振動しながら初期値 0 に近づいていく。また、熱応力 σ_x^* は熱応力波が自由境界で符号を変えて反射してくるので引張り、圧縮の応力状態が繰返される。これに対し $L^* = 10$ の場合、図示した $t^* = 4$ の時間内では反射波が到達しないので、温度および熱流速はその初期値 0 にだだらかに減衰していく。また、熱応力 σ_x^* は波頭が平板内部に伝ばしていく様子を示している。図 11 は $L^* = 2$ の非線形弾性平板 ($\xi^* = 0.2$, $\sigma_0^* = 1.0$, $n = 2$) の熱応力 σ_x^* の時間的変動を位置 x^* をパラメータとして示す。図 10 の線形材料の場合と比較して、非線形性が大きくなるにつれ、熱応力は緩和されていく。一方、温度分布はあまり非線形性に関係せず、線形材料の場合とほぼ同じ時間的変動を示す。

本論文では、非線形弾性材料として連成係数が $\delta =$

0.0248 のアルミニウム合金を用いた。その他の材料 (連成係数) に対する数値計算は実行していないが、実用材料の連成係数も 0.1 よりかなり小さい⁽¹⁾。一般に、熱波と熱応力波の伝ば挙動には緩和時間 τ や慣性パラメータ ϕ の影響が大きく、著者の前報⁽¹⁴⁾ の傾斜機能材料に対する数値例が示すように、本問題では連成項の影響は少ないと推察される。

4. 結 言

本論文では、衝撃的に加熱を受ける非線形弾性材料に生じる熱波と熱応力波を、Lord と Shulman の一般化された熱弾性理論により定式化し、これを特性曲線法で数値解析する解法を示した。数値計算例として、表面をランプ加熱される場合および内部熱発生を生じる場合の非線形弾性平板に対する解を得た。材料の非線形性により、特性曲線は曲線格子網を形成し格子点自身を未知として決定しなければならないが、繰返し計算における初期差分格子間隔を小さく取ることにより、数回の繰返し計算で安定した解を得ることができた。

本解法は、応力、粒子速度、熱流速および温度を直接の未知数とし、これらに関する双曲形 1 階連立偏微分方程式を特性曲線法を用いて差分解析するため、任意の非線形性、不均質性さらには材料定数の温度依存性を示す材料から成る平板、円筒、中空球などの熱波と熱応力波も同一のアルゴリズムで求めることができる。

文 献

- (1) 竹内洋一郎(野田直剛増補), 熱応力, (1981), 381, 日新出版.
- (2) Chandrashekharaiah, D. S., *Appl. Mech. Rev.*, **39**(1986), 355-376.
- (3) Hetnarski, R. B. and Ignaczak, J. I., *Proc. Thermal Stresses '99*, (1999), 11-17, Cracow, Poland.
- (4) 唐大偉・荒木信幸, 機論, **62**-595, B(1996), 1136-1141.
- (5) 唐大偉・荒木信幸, 機論, **62**-604, B(1996), 4183-4188.
- (6) Tamma, K. K. and Zhou, X., *J. Thermal Stresses*, **21**(1998), 405-449.
- (7) Mengi, Y. and Turhan, D., *J. Appl. Math. Pyhs.*, **29**(1978), 561-576.
- (8) 須見尚文, 機論, **65**-638, A(1999), 2169-2176.
- (9) Singh, M. C. and Tran, D. V. D., *J. Thermal Stresses*, **17**-1(1994), 21-44.
- (10) 須見尚文, 機論, **64**-625, A(1998), 2257-2262.
- (11) Francis, P. H., *J. Sound. Vib.*, **21**(1972), 181-192.
- (12) 小原實・荒井恒憲・緑川克美, レーザー応用工学, (1998), 59, コロナ社.
- (13) Galka, A. and Wojnar, R., *J. Thermal Stresses*, **18**(1995), 113-140.
- (14) 須見尚文, 機論, **65**-638, A(1999), 2169-2176.