

特性曲線法による一般化された熱弾性問題の解析*

須見 尚文*¹, 久保山 彰人*²Numerical Analysis of Generalized Thermoelastic Problems
by the Method of CharacteristicsNaobumi SUMI*³ and Akihito KUBOYAMA*³Department of Technology, Faculty of Education, Shizuoka University,
836 Oya, Shizuoka-shi, Shizuoka, 422-8529 Japan

At present two theories for the generalized thermoelastic problems are presented. The first theory proposed by Lord and Shulman (L-S theory) admits only one relaxation time: a relaxation time τ that modifies the classical Fourier law. The second one due to Green and Lindsay (G-L theory) involves two relaxation times in a thermoelastic process: a relaxation time τ_0 modifies the classical energy equation and another relaxation time τ_1 changes the Duhamel-Neumann's constitutive relations. This paper is concerned with the thermal and mechanical waves in an infinite plate subjected to impulsive heating on the surface of the plate. The formulation of the problems is based on the G-L theory and the solution are obtained by the method of characteristics. The numerical results are compared with the existing results obtained by the L-S theory. The influence of relaxation times of G-L theory on the thermal and mechanical waves are examined numerically, and the results are shown in figures.

Key Words: Thermal and Mechanical Waves, Generalized Thermoelasticity, L-S Theory, G-L Theory, Method of Characteristics

1. 緒 言

古典 Fourier の法則に基づく熱弾性理論によれば、熱伝導方程式が放物型で与えられるため、熱波の速度が無大となる。したがって、弾性体が熱的擾乱を受けるとその源から無限に離れた位置においても瞬間的にその影響を受けるという解を与える。この物理的、実験的な矛盾をなくすために、熱緩和時間の概念を導入したいくつかの一般化された熱弾性理論が提案されている。この内、Lord と Shulman の理論 (L-S 理論) は Fourier の法則に 1 個の緩和時間を導入したものであり、Green と Lindsay の理論 (G-L 理論) はエネルギー式と応力-ひずみ-温度関係式にそれぞれ 1 個の緩和時間を導入したものである。これらの理論における熱伝導方程式および運動方程式はそれぞれ双曲型となり、熱波および熱応力波の速度は有限となる。これまでに、一般化された熱弾性理論に基づいて多くの研究報告がなされており、Francis⁽¹⁾, Chandrasekharaiah⁽²⁾, Ignaczak⁽³⁾, Tamma ら^{(4),(5)} による展望、竹内と野

田⁽⁶⁾による解説等がなされている。

しかしながら、例えば L-S 理論における緩和時間 τ は非常に小さく、一般にガス体の 10^{-10} 秒から金属の材料の 10^{-14} 秒の値をとる。代表的材料に対する緩和時間は Francis⁽¹⁾ の論文等に記されているが、実験的に測定する方法については Mengi と Turhan⁽⁷⁾, 唐と荒木⁽⁸⁾ らにより提案されている。一方、G-L 理論における 2 つの緩和時間 τ_0, τ_1 はその物理的意味が不明瞭で、また現段階では 2 つの緩和時間は求められておらず、今後の研究に期待されている。このため、Noda ら⁽⁹⁾ は L-S 理論と G-L 理論に共通した基礎式を提案し、Furukawa ら⁽¹⁰⁾ はその基礎式を用いていくつかの一般化された熱弾性問題を解析しているが、数値計算は L-S 理論について行っている。

著者の一人は、これまでに L-S 理論に基づく種々の一般化された熱弾性問題を特性曲線法を用いて解析し^{(11),(12)}, 熱波と熱応力波の伝播挙動を解明した。本論文では、G-L 理論に基づく一般化された熱弾性問題を、特性曲線法を用いて解析する方法を提唱し、表面を衝撃的に加熱される無限平板の 1 次元熱波と熱応力波の伝ばを数値解析し、あわせて L-S 理論による解と

* 原稿受付 2003 年 2 月 14 日。

¹ 正員, 静岡大学教育学部 (〒422-8529 静岡市大谷 836)。² 学生員, 静岡大学大学院。

E-mail: einsumi@ipc.shizuoka.ac.jp

比較・検討することにより、G-L理論における2つの緩和時間について考察するものである。

2. 一般化された熱弾性理論

2-1 G-L理論による基礎式 GreenとLindsayの一般化された熱弾性理論によれば、均質・等方性弾性体に対する直角座標系の1次元動的熱弾性問題に対する基礎式は次式で与えられる。

(1) 運動方程式

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \rho \frac{\partial v}{\partial t}; \quad v = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1)$$

(2) 修正されたDuhamel-Neumannの構成方程式

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial t} = C_{11} \frac{\partial v}{\partial x} - \beta(\dot{T} + \tau_1 \frac{\partial \dot{T}}{\partial t}); \quad \dot{T} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2)$$

(3) 修正されたエネルギー式

$$\frac{\partial q}{\partial x} + \rho c_v(\dot{T} + \tau_0 \frac{\partial \dot{T}}{\partial t}) + T_0 \beta \frac{\partial v}{\partial x} = W \quad (3)$$

(4) Fourierの法則

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -k \frac{\partial \dot{T}}{\partial x} \quad (4)$$

ただし、 τ_0, τ_1 はG-L理論における2つの緩和時間であり、 $\tau_1 \geq \tau_0 \geq 0$ である。ここで、 x は直角座標、 t は時間、 σ_x は垂直応力、 u を変位とするととき $v = \partial u / \partial t$ である。さらに、 T を基準温度よりの温度変化として、 $\dot{T} = \partial T / \partial t$ とする。 q は熱流束、 W は内部熱発生量、 ρ は密度、 c_v は比熱、 k は熱伝導率、 T_0 は絶対基準温度である。また、 α を線膨張係数、 λ および μ をLaméの定数とするととき、 $C_{11} = (\lambda + 2\mu)$ 、 $\beta = (3\lambda + 2\mu)\alpha$ である。尚、式(1)~(4)においては、後述の特性曲線法を用いる関係上、粒子速度 v および温度の時間変化 \dot{T} を未知変数として用いている。

式(1),(2)より応力 σ_x を消去すれば

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial T}{\partial x} - \beta \tau_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial t} \quad (5)$$

一方、式(3),(4)から熱流速 q を消去すれば

$$\kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} + \tau_0 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \delta \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho c_v} W \quad (6)$$

ただし、 κ は温度伝導率、 c_L は膨張波の伝播速度、 δ は連成係数であり、それぞれ次式で定義される。

$$\kappa = \frac{k}{\rho c_v}, \quad c_L = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}, \quad \delta = \frac{\alpha^2 (3\lambda + 2\mu)^2 T_0}{\rho^2 c_v c_L^2} \quad (7)$$

式(5)の運動方程式および式(6)の熱伝導方程式は、それぞれ x と t を独立変数とする双曲型偏微分方程式

であり、したがって、熱(温度)波と熱応力波は有限の速度で伝播することになる。

さて、一般には積分変換等を用いて式(5),(6)を解析するケースが多いが、逆変換が困難で数値逆変換によって解を得なければならず、限られた時間域での解しか得られないケースが多い。これに対して、本論文での特性曲線法による解法は、 σ_x, v, q, \dot{T} に関する4元連立1階偏微分方程式(1)~(4)を用い、これを特性曲線に沿った常微分方程式(特性曲線方程式)に変換し、これを差分法して数値積分する方法をとる。このため、不連続性を含む波頭の位置を含めて解析を行うので波動の状況を詳しく知り得る利点があり、また σ_x, v, q, \dot{T} を直接の未知変数として扱うので境界条件の処理が簡単になる。

双曲型偏微分方程式に対する特性曲線および特性曲線方程式の誘導には種々の方法があるが、例えば方向微分法^{(11)~(14)}を用いれば、本問題に対する特性曲線は、次式に示す4本の直線群により与えられる。

$$\frac{dx}{dt} = (V_1, V_2, V_3, V_4) = (c_1, -c_1, c_2, -c_2) \quad (8)$$

ただし、 c_1, c_2 は2つの伝播速度であり、 $c_1 > c_2$ として

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1^2 \\ c_2^2 \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\kappa}{\tau_0} + c_L^2 + \delta c_L^2 \frac{\tau_1}{\tau_0} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{\kappa}{\tau_0} + c_L^2 + \delta c_L^2 \frac{\tau_1}{\tau_0} \right)^2 - 4 \frac{\kappa c_L^2}{\tau_0}} \right] \quad (9)$$

式(1)~(4)を用いれば、特性曲線 $dx/dt = V_i$ ($i = 1 \sim 4$)に沿う特性曲線方程式は、それぞれ次式の常微分方程式として与えられる。

$$l_1^{(i)} d\sigma_x - l_2^{(i)} dv + l_3^{(i)} dq + l_4^{(i)} d\dot{T} = l_5^{(i)} \dot{T} dt + l_6^{(i)} W dt, \quad (i = 1, 4) \quad (10)$$

ただし

$$\left. \begin{array}{l} l_1^{(i)} = 1, \quad l_2^{(i)} = \rho V_i, \quad l_3^{(i)} = \frac{\rho(c_L^2 - V_i^2)}{T_0 \beta V_i} \\ l_4^{(i)} = \frac{k \rho (c_L^2 - V_i^2)}{T_0 \beta \tau_0 V_i^2}, \quad l_6^{(i)} = \frac{\rho (c_L^2 - V_i^2)}{T_0 \beta} \\ l_5^{(i)} = -\beta - \frac{\rho^2 c_v (c_L^2 - V_i^2)}{T_0 \beta} \end{array} \right\} \quad (11)$$

したがって、後述の2.3節に示す方法により、式(10)を特性曲線に沿って離散化し、未知変数に関する4元連立1次方程式を解けば σ_x, v, q, \dot{T} が求められ、さらに \dot{T} を時間について積分することにより T が求められる。

2.2 L-S 理論による基礎式 Lord と Shulman による一般化された熱弾性問題に対する基礎式は

(1) 運動方程式

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \rho \frac{\partial v}{\partial t} \quad (12)$$

(2) Duhamel-Nuemann の構成方程式

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial t} = C_{11} \frac{\partial v}{\partial x} - \beta \frac{\partial T}{\partial t} \quad (13)$$

(3) エネルギー式

$$\frac{\partial q}{\partial x} + \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} + T_0 \beta \frac{\partial v}{\partial x} = W \quad (14)$$

(4) 修正された Fourier の法則

$$q + \tau \frac{\partial q}{\partial t} = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (15)$$

で与えられる。ただし、 τ は L-S 理論における緩和時間である。式 (15) は熱伝導理論における Cattaneo モデル⁽⁴⁾ として知られている。

式 (12) ~ (15) より、L-S 理論における運動方程式は

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial T}{\partial x} \quad (16)$$

熱伝導方程式は

$$\begin{aligned} \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} + \tau \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \delta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \tau \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} \right) \\ - \frac{1}{\rho c_v} \left(W + \tau \frac{\partial W}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

式 (16) および式 (17) は、それぞれ x と t を独立変数とする双曲型偏微分方程式であり、したがって熱波と熱応力波は有限の速度で伝播する。尚、L-S 理論による 2 つの伝播速度は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} c_1^2 \\ c_2^2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\kappa}{\tau} + c_L^2 + \delta c_L^2 \right) \right. \\ \left. \pm \sqrt{\left(\frac{\kappa}{\tau} + c_L^2 + \delta c_L^2 \right)^2 - 4 \frac{\kappa c_L^2}{\tau}} \right] \end{aligned} \quad (18)$$

式 (9) と式 (18) を比較すれば、 $\tau_0 = \tau_1 = \tau$ の場合、G-L 理論と L-S 理論の伝播速度 c_1, c_2 は一致するが、応力、温度等は異なった値を示すことになる。

2.3 特性曲線方程式の離散化 2.1 節の G-L 理論において、未知変数 σ_x, v, q, \dot{T} を求めるために、特性曲面 (x, t) を 2 直線 $dx/dt = \pm c_1$ により図 1 に示すような微小格子網に分割する。続いて、例えば図 1 に例示する平行四辺形格子 $DABC$ において、格子点 D を通り傾きが $\pm c_2$ の 2 本の特性曲線を引き、それぞ

れが AB, CB と交わる点を E, F とする。この時、点 E, F における関数値は点 A, B, C における既知量より内挿によって求める。微小格子間隔内で関数値の線形変化を仮定して、点 D を通る合計 4 本の特性曲線 AD, CD, ED および FD に沿って式 (10) を数値積分すれば、次式の離散化式が得られる。

$$\begin{aligned} l_1^{(i)} \sigma_{xD} - l_2^{(i)} v_D + l_3^{(i)} q_D + \left\{ l_4^{(i)} + \frac{1}{2} l_5^{(i)} \Delta t_i \right\} \dot{T}_D \\ = l_1^{(i)} \sigma_{xi} - l_2^{(i)} v_i + l_3^{(i)} q_i + \left\{ l_4^{(i)} - \frac{1}{2} l_5^{(i)} \Delta t_i \right\} \dot{T}_i \\ + \frac{1}{2} l_6^{(i)} (W_D + W_i) \Delta t_i, \quad (i = 1 \sim 4) \end{aligned} \quad (19)$$

ただし、下添え字 D のついた量は点 D での関数値を、下添え字 i のついた量は点 $i(A, C, E, F)$ における関数値を表わし、 Δt_i は点 D と点 i の時間差である。したがって、上式の未知変数 σ_x, v, q, \dot{T} に関する 4 元連立 1 次方程式を解けば、格子点 D における未知量が求められる。格子点での \dot{T} が求めれば、これを時間軸 BD に沿って積分すれば温度 T も得られる。

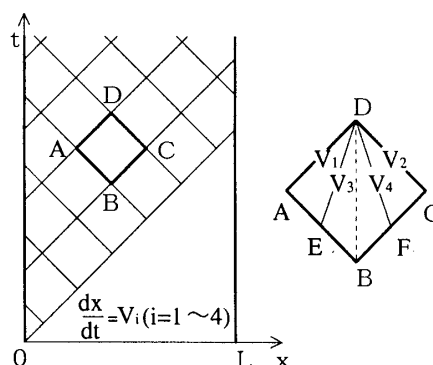


Fig.1 Characteristic network for infinite plate of thickness L

3. 数値計算

数値計算例として、表面 $x = 0$ が立上がり時間 t_p で一定温度までランプ加熱され、表面 $x = L$ は初期温度に保たれる板厚 L の無限平板の熱波と熱応力波を考える。内部熱発生 W は生じないものとし、温度 $T(x, t)$ の境界条件は

$$T(0, t) = Tc \begin{cases} t/t_p & t \leq t_p \\ 1 & t \geq t_p \end{cases} \quad (20)$$

$$T(L, t) = 0 \quad (21)$$

ただし、 Tc は表面 $x = 0$ での温度上昇である。また、力学的境界条件は両表面応力自由として

$$\sigma_x(0, t) = 0, \quad \sigma_x(L, t) = 0 \quad (22)$$

数値計算は 6061-T6 アルミニウム合金について行い、その $T_0 = 273[K]$ における物性値は (7)

$$\left. \begin{aligned} \rho &= 2700 [kg/m^3], & c_v &= 964 [J/kgK] \\ k &= 155 [W/mK], & \alpha &= 23.4 \times 10^{-6} [1/K] \\ \kappa &= 0.596 \times 10^{-4} [m^2/s], & \nu &= 0.33 \\ E &= 68.9 [Gpa], & c_L &= 6150 [m/s] \\ \delta &= 0.0248 \end{aligned} \right\} (23)$$

本論文では以下の無次元量を用いた.

$$\left. \begin{aligned} x^* &= \frac{x}{l}, & t^* &= \frac{c_L t}{l}, & T^* &= \frac{T}{T_c} \\ L^* &= \frac{l}{L}, & (c_1^*, c_2^*) &= \frac{c_1, c_2}{c_L} \\ \sigma_x^* &= \frac{\sigma_x}{\rho c_L^2 \alpha T_c}, & v^* &= \frac{v}{\alpha T_c c_L}, & q^* &= \frac{\kappa q}{k c_L T_c} \end{aligned} \right\} (24)$$

ただし l は代表長さである. 数値計算においては $l = 10^{-8}[m]$, $t_p = 10^{-12}[s]$, $L = 2 \times 10^{-8}[m]$ と取り, L-S 理論における緩和時間 $\tau = 10^{-12}[s]$ を基準として, G-L 理論における緩和時間 τ_0, τ_1 を種々変化させてその特性を吟味した.

図 2 は, $L^* = 2, t_p^* = 0.615$ で, $\tau^* = \tau_0^* = \tau_1^* = 0.615$ とした場合の位置 x^* および時間 t^* に対する温度変動 T^* を 3 次元的に示す. 図は熱が, 波動として伝ばし, 表面からの熱波の反射・干渉を明示している.

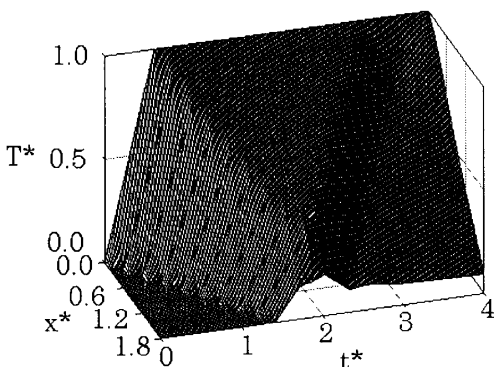


Fig.2 Temperature variation at various position x^* and time t^*

図 3 および図 4 は平板の各位置 x^* での T^* および σ_x^* の時間的変動を L-S 理論, G-L 理論の場合について比較している. この場合, 両理論における伝ば速度は等しく $c_1^* = 1.28, c_2^* = 0.98$ であり, 両理論の温度はほぼ同じ値をとった. また, 図 4 に示すように両理論での熱応力波の到達, 反射などの時間は同じとなるが, 実線で示す G-L 理論は波線で示す L-S 理論に比べ大きな応力値を示し, 温度勾配が不連続となる位置で急激な応力変動を示している.

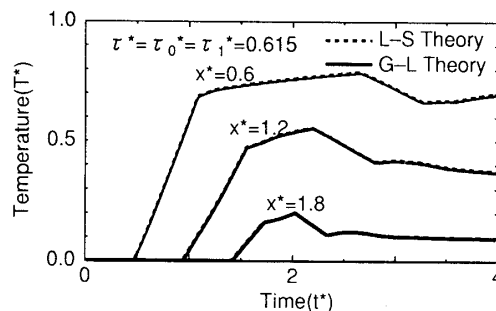


Fig.3 Time-dependence of T^* at various position x^* ($L^* = 2, t_p^* = 0.615$)

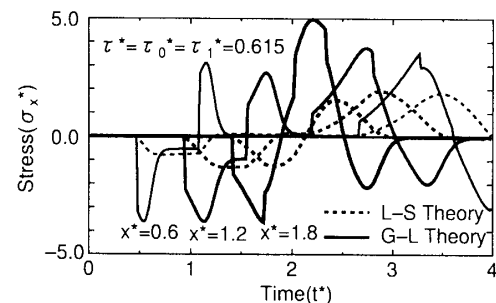


Fig.4 Time-dependence of σ_x^* at various position x^* ($L^* = 2, t_p^* = 0.615$)

図 5 および図 6 は緩和時間を $\tau^* = \tau_0^* = \tau_1^* = 0.0615$ とした場合の T^* および σ_x^* の時間的変動を示す. 図 3 と比較して図 5 の温度変動は滑らかとなり, 表面 $x^* = L$ からの熱の反射は見られず, 拡散による古典熱伝導論の温度変動に類似してくる. 図 4 と図 6 を比較して, 緩和時間が小さくなれば両理論が与える応力値は近接し, 古典熱弾性理論による値に近づく.

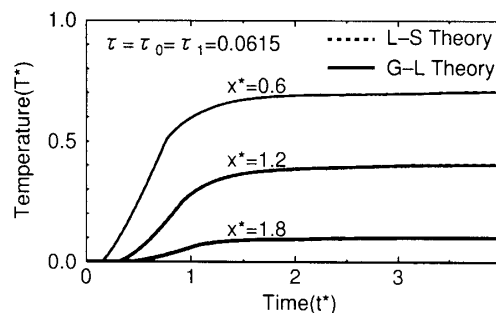


Fig.5 Time-dependence of T^* at various position x^* ($L^* = 2, t_p^* = 0.615$)

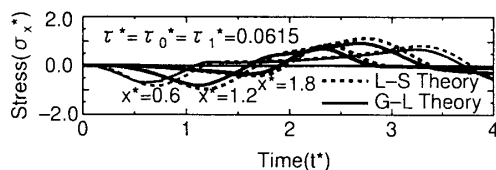


Fig.6 Time-dependence of σ_x^* at various position x^* ($L^* = 2, t_p^* = 0.615$)

図7および図8は、G-L理論において、 $x^* = 0.6$ の位置について $\tau_1^* = 0.615$ とし、 τ_0^* の値を変化させた場合の σ_x^* の時間的変動を示す。 τ_0^* の増加に伴い熱波と熱応力波の伝ば速度は遅くなり(式(9)参照)、熱の波動としての伝ばが顕著となり、表面での熱の反射による温度勾配の不連続性が顕著となる。これに対応して、温度勾配が不連続となる時間に急激な応力変動を示している。また、 $\tau_1^* = 0.0615$ である図6の $x^* = 0.6$ における σ_x^* と $\tau_1^* = 0.615$ である図8の σ_x^* を比較すれば、伝ば速度はほぼ等しいが、 τ_1^* が大きい後者は倍程度の応力変動を示している。

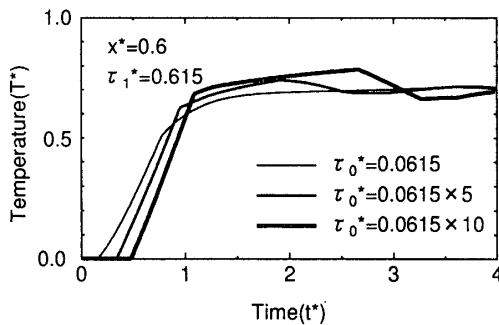


Fig.7 Time-dependence of T^* at $x^* = 0.6$ by G-L theory

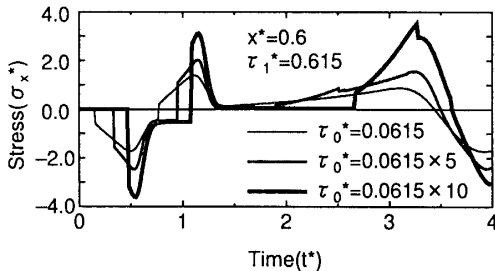


Fig.8 Time-dependence of σ_x^* at $x^* = 0.6$ by G-L theory

図9および図10は、G-L理論において、 $x^* = 0.6$ の位置について加熱の立ち上がり時間 tp^* の値を変化させた場合の T^* および σ_x^* の時間的変動を示す。 tp^* が小さくなるにつれステップ加熱に近くなり、急激な温度上昇に伴う熱の反射・干渉による影響も顕著になる。また、この場合も温度勾配が不連続な位置で応力変動が急激になる。

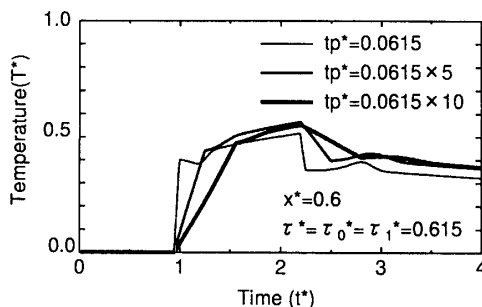


Fig.9 Time-dependence of T^* at $x^* = 0.6$ by G-L theory

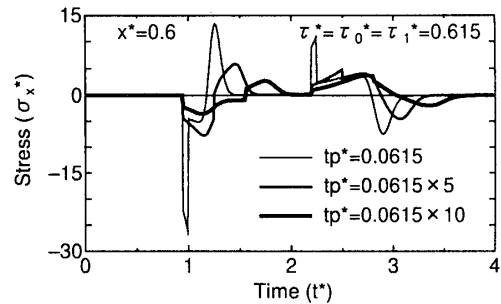


Fig.10 Time-dependence of σ_x^* at $x^* = 0.6$ by G-L theory

4. 結 言

本論文ではGreenとLindsayの理論に基づいた一般化された熱弾性問題の特性曲線法を用いた解析方法を確立した。数値解析例として表面をランプ加熱される無限平板の一次元の熱波と熱応力波を求め、LordとShulmanの理論に基づく解と比較し、G-L理論における2つの緩和時間について検討した。得られた結果は以下のように要約される。

- (1) G-L理論における2つの緩和時間(τ_0^* , τ_1^*)を、L-S理論における緩和時間 τ^* に等しくすると、両理論による熱波と熱応力波の速度は等しくなる。この場合、温度変動には大きな相違は見られないが、応力変動には大きな相違が生じる。すなわち、G-L理論は温度勾配が不連続となる位置で大きな応力変動を生じる。
- (2) 両理論において緩和時間の値が小さくなるにつれ、温度変動、応力変動は共に滑らかになり、古典熱弾性論による値に近づく。
- (3) G-L理論において、緩和時間 τ_0^* の増加に伴い熱の波動としての伝ばが顕著となり、温度勾配が不連続となる時間に急激な応力変動を示している。また、本研究で用いた6061-T6アルミニウムの連成係数 δ の値が非常に小さいため、 τ_1^* は熱波、熱応力波の速度にはあまり影響を与えないが、応力変動に大きな影響を与える。(式(9)および式(2)参照)
- (4) 立ち上がり時間 tp^* の値が小さくなるにつれ、ステップ加熱に近づき、温度上昇に伴う熱の反射、干渉による影響が顕著になり、温度勾配が不連続な位置で、応力変動が急激になる。

G-L理論における2つの緩和時間についてのデータは現段階では不明であるが、温度勾配が不連続となる位置でL-S理論より大きな応力変動を示す解を与えるので、それらの測定方法およびG-L理論が適用される物理現象に対する今後の研究が期待される。

また、本論文での特性曲線法を用いた解法によればG-L理論およびL-S理論に基づく一般化された熱弾性問題も同じアルゴリズムで解析できることを示した。

文 献

- (1) Francis, P. H., *J. Sound. Vib.*, **21**(1972), pp.181-192
- (2) Chandrashekharaiah, D. S., *Appl. Mech. Rev.*, **39**(1986), pp.355-376
- (3) Ignaczak, J., *Appl. Mech. Rev.*, **44**(1991), pp.375-382
- (4) Tamma, K. and Namburu R., *Appl. Mech. Rev.*, **50**, pp.514-551(1997)
- (5) Tamma, K and Zhou X., *J. Thermal Stresses*, **21**(1998), pp.405-449.
- (6) 竹内洋一郎著, 野田直剛増補, 熱応力, 日新出版(1981), p.381
- (7) Mengi, Y. and Turhan, D., *J. Appl. Mech.*, **45**(1978), pp.433-435
- (8) 唐 大偉, 荒木信幸, 機論, **62**-595, B(1998), pp.1136-1141
- (9) Noda, N., Furukawa, T. and Ashida, f., *J. Thermal Stresses*, **12**(1989), pp.385-402
- (10) 古川, 中西, 采山, 機論, **67**-656, A(2001), pp.651-658
- (11) 須見尚文, 機論, **64**-625, A(1998), pp.2257-2262
- (12) Sumi, N., *J. Thermal Stresses*, **24**(2001), pp.509-530
- (13) Sumi, N., *JSME International Journal*, **A**, **45**(2002), pp.146-152
- (14) 林 卓夫, 田中吉之助, 衝撃工学, 日刊工業新聞社(1988), p.259