

圧電セラミックス平板の一般化された電気熱弾性波動の数値解析*

須見 尚 文*¹Numerical Analyses for Piezothermoelastic Wave Propagations
in Piezoelectric PlatesNaobumi SUMI*²*² Faculty of Education, Shizuoka University, 836 Oya, Shizuoka-shi, Shizuoka, 422-8529 Japan

This paper is concerned with the numerical treatment of one-spatial dimensional generalized piezothermoelastic wave propagations in piezoelectric plates subjected to thermo-electro-mechanical loadings. The governing equations are based on the coupled generalized theory of piezothermoelasticity along with the modified Fourier law. The governing equations are expressed by a set of first-order partial differential equations with particle velocity, stress, electric field intensity, heat flux and temperature as the unknown variables. The solutions are obtained numerically by the method of characteristics. The numerical calculations are carried out for PZT-4 and non-piezoelectric plates subjected to ramp-type surface heating and internal heat generation by the laser-pulse heating.

Key Words: Piezothermoelastic Waves, Generalized Piezothermoelasticity, Method of Characteristics, PZT-4 Plate, Laser-Pulse Heating

1. 緒 言

21世紀は「ナノ・マイクロテクノロジーの時代」と期待され、高効率エネルギー変換のための各種の材料の研究・開発が進められている。なかでも、圧電セラミックスは電気場と熱弾性場間に連成効果をも有し、誘電分極とは別に機械的応力によっても分極を起こす物質である。そのため、センサー材料、アクチュエータ材料として注目されており、ナノ・マイクロオーダーの厚さの圧電素子の実用化も視野に入れられている。一方、ナノ・マイクロ秒のパルス特性時間を持つ超高速レーザや超音波機器の開発と相まって、このような超薄膜の圧電材料が衝撃的な熱・電気・機械的負荷を受ける場合、電気熱弾性場における慣性項、温度場とひずみ場の連成、さらに温度場における緩和時間を考慮した電気熱弾性波動解析が必要となる。

本論文では、厚さ方向に異方性主軸を有する圧電セラミックス平板の1次元の一般化された電気熱弾性波動問題を、特性曲線法^{(1)~(4)}を用いて数値解析する方法を示し、超高速レーザ等の照射・吸収を受け(1)表面をランプ加熱される場合、および(2)内部発熱を生

じる場合のPZT-4平板およびPZT-4と同じ熱弾性定数を持つ非圧電性平板に対する数値解析を行い、電気熱弾性波の伝播挙動を明らかにしている。

2. 解 析

2.1 軸対称な電気熱弾性波動に関する基礎式 円柱座標 (r, θ, z) を用いれば、結晶族 $6mm$ に属する圧電材料の軸対称な電気熱弾性波動に関する基礎式は次式で与えられる^{(5)~(7)}。

(a) 運動方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} &= \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1)$$

(b) 熱電気弾性場の構成方程式

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= c_{11}\epsilon_{rr} + c_{12}\epsilon_{\theta\theta} + c_{13}\epsilon_{zz} - e_1 E_z - \beta_1 T \\ \sigma_{\theta\theta} &= c_{12}\epsilon_{rr} + c_{11}\epsilon_{\theta\theta} + c_{13}\epsilon_{zz} - e_1 E_z - \beta_1 T \\ \sigma_{zz} &= c_{13}\epsilon_{rr} + c_{13}\epsilon_{\theta\theta} + c_{33}\epsilon_{zz} - e_3 E_z - \beta_3 T \\ \sigma_{zr} &= c_{44}\epsilon_{zr} - e_4 E_r \end{aligned} \quad (2)$$

(c) 電気場の構成方程式

$$\begin{aligned} D_r &= e_4 \epsilon_{zr} + \eta_1 E_r \\ D_z &= e_1 \epsilon_{rr} + e_1 \epsilon_{\theta\theta} + e_3 \epsilon_{zz} + \eta_3 E_z + p_3 T \end{aligned} \quad (3)$$

* 原稿受付 2003年12月19日。

*¹ 正員, 静岡大学教育学部(〒422-8529 静岡市大谷 836)。

E-mail: einsumi@ipc.shizuoka.ac.jp

(d) 電束密度の連続条件式

$$\frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{\partial D_z}{\partial z} + \frac{D_r}{r} = 0 \quad (4)$$

(e) 修正された Fourier の法則

$$\begin{aligned} \tau_1 \frac{\partial q_r}{\partial t} + q_r &= -k_1 \frac{\partial T}{\partial r} \\ \tau_3 \frac{\partial q_z}{\partial t} + q_z &= -k_3 \frac{\partial T}{\partial z} \end{aligned} \quad (5)$$

(f) 温度場とひずみ場の連成を考慮したエネルギー式

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_r}{\partial r} + \frac{q_r}{r} + \frac{\partial q_z}{\partial z} + \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} \\ + T_0 \left(\beta_1 \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial t} + \beta_2 \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial t} + \beta_3 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial t} \right) = W \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 σ_{ij} は応力、 ϵ_{ij} はひずみ、 E_i は電界の強さ、 D_i は電気変位、 q_i は熱流速、 T は温度変化である。また、 ρ は密度、 c_{ij} は弾性係数、 e_i は圧電係数、 η_i は誘電率、 p_i は焦電率、 β_i は熱弾性係数、 τ_i は熱の緩和時間^{(8)~(10)}、 k_i は熱伝導率、 c_v は比熱、 T_0 は絶対基準温度、 W は内部発熱量である。

2.2 1次元の電気熱弾性波動に対する基礎式

一般に、レーザ照射等を受ける圧電材料に生じる電気熱弾性波の伝ばは局所的なものである。ここでは r 軸方向の変化は無視して、図1に示すように z 軸方向にのみ変化する熱的・電氣的・力学的負荷が作用する無限平板の1次元の波動問題を考える。

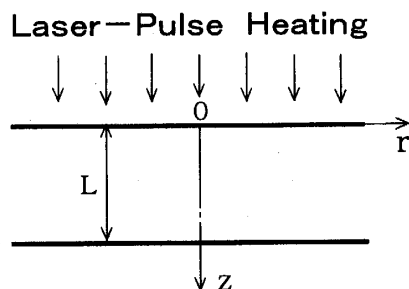


Fig.1 Piezoelectric plate

この場合、

$$u_r = 0, \quad u_z = u_z(z, t), \quad E_r = 0, \quad D_r = 0 \quad (7)$$

したがって

$$\epsilon_{rr} = \epsilon_{\theta\theta} = \epsilon_{zr} = 0, \quad \sigma_{zr} = 0 \quad (8)$$

この場合、 $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta}$ である。また、電気変位 D_z は時間だけの関数となり、例えば平板の表面上で時間に無関係に D_z が規定される場合、 D_z はその一定値となる。したがって、式(7)、(8)を考慮すれば、平板の1次元問

題では未知変数は $u_z, \sigma_{zz}, E_z, q_z, T$ の5個になる。変位 u_z の代わりに粒子速度 $v = \partial u_z / \partial t$ を導入し、さらに式(2)、(3)を時間 t で偏微分して用いれば、未知変数 $v, \sigma_{zz}, E_z, q_z, T$ に関して次式の連立1階偏微分方程式が成立する。

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} - \rho \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} - c_{33} \frac{\partial v}{\partial z} + e_3 \frac{\partial E_z}{\partial t} + \beta_3 \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (10)$$

$$e_3 \frac{\partial v}{\partial z} + \eta_3 \frac{\partial E_z}{\partial t} + p_3 \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (11)$$

$$\tau_3 \frac{\partial q_z}{\partial t} + k_3 \frac{\partial T}{\partial z} = -q_z \quad (12)$$

$$\frac{\partial q_z}{\partial z} + \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} + T_0 \beta_3 \frac{\partial v}{\partial z} = W \quad (13)$$

式(12)、(13)より q_z を消去すれば熱伝導方程式が得られ、式(10)、(11)を式(9)に代入すれば変位の運動方程式が得られるが、それぞれは二独立変数(空間 z と時間 t)に関する双曲型偏微分方程式となり、したがって電気熱弾性応答は波動としての伝ば挙動を示すことになる。

2.3 特性曲線および特性曲線方程式 双曲型偏微分方程式の理論に従えば、 $(z-t)$ 平面において温度、電界、応力等は連続であるが、それらの導関数は不連続となり得る曲線が存在する。このような曲線を特性曲線と呼び、この特性曲線に沿って成立する未知変数に関する関係式を特性曲線方程式と呼ぶ。数値解法としての特性曲線法は、特性曲線に沿って成立する微分方程式を差分して数値積分する方法である。

特性曲線および特性曲線方程式は以下のように誘導される。いま、 $(z-t)$ 平面において関数 $v, \sigma_{zz}, E_z, q_z, T$ が連続であるならば、これらは全微分形で表現される。

$$dv = \frac{\partial v}{\partial z} dz + \frac{\partial v}{\partial t} dt \quad (14)$$

$$d\sigma_z = \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} dt \quad (15)$$

$$dE_z = \frac{\partial E_z}{\partial z} dz + \frac{\partial E_z}{\partial t} dt \quad (16)$$

$$dq_z = \frac{\partial q_z}{\partial z} dz + \frac{\partial q_z}{\partial t} dt \quad (17)$$

$$dT = \frac{\partial T}{\partial z} dz + \frac{\partial T}{\partial t} dt \quad (18)$$

もし、これらの関数の偏導関数に不連続性を有するものとすれば、このことは偏導関数 $\partial v/\partial t, \partial v/\partial z, \partial \sigma_{zz}/\partial t, \partial \sigma_{zz}/\partial z, \partial E_z/\partial t, \partial E_z/\partial z, \partial q_z/\partial t, \partial q_z/\partial z, \partial T/\partial t, \partial T/\partial z$ がある特定の方向 (特性曲線) に沿って不定 (indeterminate) になることである。これら 10 個の導関数を未知変数と考えれば、式 (9) ~ (13) および式 (14) ~ (18) は次式の連立 1 次方程式として記述することができる。

$$AX = B \quad (19)$$

ここで、行列 A 、ベクトル X および B は

$$A = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_{33} & 1 & 0 & e_3 & 0 & 0 & 0 & \beta_3 & 0 \\ 0 & -e_3 & 0 & 0 & -\eta_3 & 0 & 0 & 0 & -p_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_3 & 0 & 0 & k_3 \\ 0 & T_0\beta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \rho c_v & 0 \\ dt & dz & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dt & dz & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & dt & dz & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & dt & dz & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & dt & dz \end{bmatrix}$$

$$X = \left[\frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t}, \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}, \frac{\partial E_z}{\partial t}, \frac{\partial E_z}{\partial z}, \frac{\partial q_z}{\partial t}, \frac{\partial q_z}{\partial z}, \frac{\partial T}{\partial t}, \frac{\partial T}{\partial z} \right]^T$$

$$B = [0, 0, 0, -q_z, W, dv, d\sigma_{zz}, dE_z, dq_z, dT]^T$$

ただし、上添字 T は行列の転置を意味する。連立 1 次方程式 (19) の解は Cramer の公式によって記述でき、例えば $\partial v/\partial t$ は次式で与えられる。

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{|D_1|}{|A|} \quad (20)$$

ここで、行列 D_1 は行列 A の第 1 列を列ベクトル B で置き換えたものである。したがって、式 (20) の分母、分子がともに零になる場合、導関数 $\partial v/\partial t$ は不定となる。行列式 $|A| = 0$ を実行すれば、次式が得られる。

$$dz \left[\left(\frac{dz}{dt} \right)^4 - \left\{ \frac{c_{33}}{\rho} + \frac{k_3}{\rho c_v \tau_3} + \frac{T_0 \beta_3 (\beta_3 \eta_3 - e_3 p_3)}{\rho^2 c_v \eta_3} + \frac{e_3^2}{\rho \eta_3} \right\} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{k_3 (e_3^2 + c_{33} \eta_3)}{\rho^2 c_v \tau_3 \eta_3} \right] = 0 \quad (21)$$

一般性を失うことなく $c_1 \geq c_2$ として、式 (21) の 5 個の根 dz/dt を $\pm c_1, \pm c_2, 0$ と表現すれば、本問題に対す

る特性曲線は次式の 5 種類の曲線 I_i で与えられることになる。

$$\frac{dz}{dt} = V_i = (c_1, -c_1, c_2, -c_2, 0), \quad (i = 1 \sim 5) \quad (22)$$

ここで、曲線 I_1, I_3 は導関数の不連続量が $(z-t)$ 平面内で速度 c_1, c_2 で右方向に、曲線 I_2, I_4 は速度 $-c_1, -c_2$ で左方向に伝ばすることを示す。また、 I_5 は z が一定な特性曲線上の条件を与える。

特性曲線 (22) に対応する特性曲線方程式は、以下のよう求められる。 $dz = V_j dt, (j = 1 \sim 4)$ と置いて、行列式 $|D_1| = 0$ を実行すれば次式が得られる。

$$dz^2 [\eta_3 (k_3 - \rho c_v \tau_3 V_j^2) d\sigma_{zz} - \rho V_j \eta_3 (k_3 - \rho c_v \tau_3 V_j^2) dv + \tau_3 V_j (\beta_3 \eta_3 - e_3 p_3) dq_z + k_3 (\beta_3 \eta_3 - e_3 p_3) dT + V_j (\beta_3 \eta_3 - e_3 p_3) q_z dt - \tau_3 V_j^2 (\beta_3 \eta_3 - e_3 p_3) W dt] = 0 \quad (23)$$

したがって上式を整理すれば、特性曲線 $I_j : dz/dt = V_j, (j = 1 \sim 4)$ に沿って次式の常微分関係式 (特性曲線方程式) が成立する。

$$l_1^{(j)} d\sigma_{zz} + l_2^{(j)} dv + l_3^{(j)} dq_z + l_4^{(j)} dT = l_5^{(j)} q_z dt + l_6^{(j)} W dt, \quad (j = 1 \sim 4) \quad (24)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} l_1^{(j)} &= 1, & l_2^{(j)} &= -\rho V_j, & l_4^{(j)} &= l_3^{(j)} \frac{k_3}{\tau_3 V_j} \\ l_3^{(j)} &= \frac{\tau_3 V_j (\beta_3 \eta_3 - e_3 p_3)}{\eta_3 (k_3 - \rho c_v \tau_3 V_j^2)} \\ l_5^{(j)} &= -l_3^{(j)} \frac{1}{\tau_3}, & l_6^{(j)} &= l_3^{(j)} V_j \end{aligned} \right\}$$

尚、このことを他の未知変数 $\partial v/\partial z, \partial \sigma_{zz}/\partial t, \partial \sigma_{zz}/\partial z, \dots$ 等について実行しても式 (24) と同じ結果が得られる。

しかしながら、 $I_5 : dz/dt = 0$ に沿った特性曲線方程式は、 dz が式 (20) の分母 (21)、分子 (23) に共通項として現れるので、式 (20) より求めることが出来ない。この場合、式 (10)、(11) より $\partial v/\partial z$ を消去すれば、次式が得られる。

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} + \left(\frac{c_{33} \eta_3}{e_3} + e_3 \right) \frac{\partial E_z}{\partial t} + \left(\frac{c_{33} p_3}{e_3} + \beta_3 \right) \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (25)$$

したがって、 $dz = 0$ 、すなわち $I_5 : dz/dt = V_5 = 0$ に沿っての特性曲線方程式は次式のように表現される。

$$l_1^{(5)} d\sigma_{zz} + l_2^{(5)} dE_z + l_3^{(5)} dT = 0 \quad (26)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} l_1^{(5)} &= 1, & l_2^{(5)} &= \frac{c_{33}\eta_3}{e_3} + e_3 \\ l_3^{(5)} &= \frac{c_{33}p_3}{e_3} + \beta_3 \end{aligned} \right\}$$

2.4 特性曲線方程式の離散化と解析手順 前述のように、特性曲線法による解法では、式(9)～(13)の偏微分方程式を解く代わりに、式(24)、(26)の常微分方程式を特性曲線に沿って数値積分して解くことに帰着される。その解析手順は以下のようである。まず、図2に示すように特性曲面を2つの曲線 $dz/dt = \pm c_1$ により微小な平行四辺形の格子網に分割する。均質材料の場合、速度 c_1 は一定であるので直線格子網となり、時間増分 Δt (あるいは Δz) を指定すると全ての格子点の位置はあらかじめ知ることが出来る。続いて、例えば図2に例示する格子 $DABC$ において、点 D を通り傾きが $\pm c_2$ の特性曲線を引き、それぞれが AB および BC と交わる点を E および F とする。このとき、点 E, F における未知変数の値は点 A, B, C における既知量より内挿によって求められる。微小格子間で関数値の線形変化を仮定して、式(24)を点 A から D 、点 C から D 、点 E から D 、点 F から D まで数値積分し、さらに式(26)を点 B から D まで数値積分して離散化すれば、次式に示す5個の離散化方程式が得られる。

$$\begin{aligned} l_1^{(j)}\sigma_D + l_2^{(j)}v_D + \left\{ l_3^{(j)} - l_5^{(j)}\frac{\Delta t_j}{2} \right\} q_D + l_4^{(j)}T_D \\ = l_1^{(j)}\sigma_j + l_2^{(j)}v_j + \left\{ l_3^{(j)} + l_5^{(j)}\frac{\Delta t_j}{2} \right\} q_j + l_4^{(j)}T_j \\ + l_6^{(j)}\frac{\Delta t_j}{2}(W_D + W_j), \quad (j=1\sim 4) \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} l_1^{(5)}\sigma_D + l_2^{(5)}E_D + l_3^{(5)}T_D \\ = l_1^{(5)}\sigma_B + l_2^{(5)}E_B + l_3^{(5)}T_B \end{aligned} \quad (28)$$

ただし、下添字 D, j のついた諸量 ($\sigma_D, \sigma_i, \dots$ 等) は、それぞれ下添字のついた格子点での応力等の値を示し、 $j=1, 2, 3, 4$ に対しそれぞれ点 A, C, E, F が対応するものとする。また、 $\Delta t_j = t_D - t_j$ である。したがって、平板内部の格子点 D での5個の未知変数 $v, \sigma_{zz}, E_z, q_z, T$ は、式(27)、(28)の5元連立1次方程式を解くことにより、隣接する格子点 A, C, E, F および B における既知量を用いて求められる。

尚、境界上の点に対しては、5個の未知変数の内の2個が境界条件として規定される。したがって残りの3変数は、 $z=0$ 上の点に対しては特性曲線 CD, FD, BD に沿った離散化方程式、 $z=L$ 上の点に対しては特性曲線 AD, ED, BD に沿った離散化方程式を用いることにより、3元連立1次方程式の解として得られる。

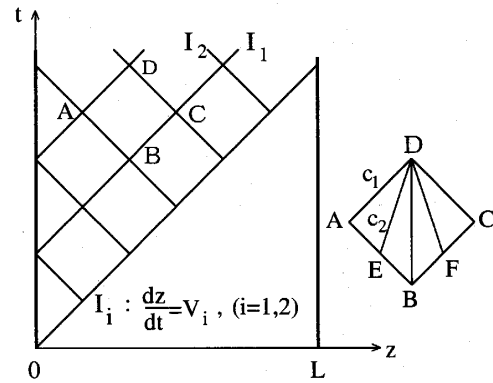


Fig.2 Characteristic network for numerical procedure

3. 数値計算

数値計算例として、図1に示す厚さ L の圧電平板が、時間 $t=0$ の瞬間から超高速レーザーパルスの照射を受けて(1)表面をランプ加熱される場合、(2)内部熱発生を生じる場合を考える。

平板の両表面に外力が作用しないものとすれば、力学的境界条件は

$$\sigma_{zz}(0, t) = 0, \quad \sigma_{zz}(L, t) = 0 \quad (29)$$

数値計算は次の物性値を持つ圧電セラミックス PZT-4 平板および PZT-4 と同じ熱弾性物性値を持つ非圧電性平板 ($\eta_3 = e_3 = p_3 = 0$) について実行した。

$$\begin{aligned} \rho &= 7500 \text{ kg/m}^3, & c_v &= 420 \text{ J/kg K} \\ k_3 &= 2.1 \text{ W/mK}, & c_{33} &= 115 \times 10^9 \text{ N/m}^2 \\ \beta_3 &= 3.6 \times 10^6 \text{ N/Km}^2, & \eta_3 &= 5.62 \times 10^{-9} \text{ C}^2/\text{Nm}^2 \\ e_3 &= 15.1 \text{ C/m}^2, & p_3 &= -2.12 \times 10^{-4} \text{ C/Km}^2 \\ Y_z &= 64.5 \times 10^9 \text{ N/m}^2, & \alpha_z &= 0.9 \times 10^{-5} \text{ 1/K} \\ d_z &= 289 \times 10^{-12} \text{ C/N}, & c_z &= 3570 \text{ m/s} \end{aligned}$$

ただし、 Y_z は縦弾性係数、 α_z は線膨張係数、 d_z は焦電率、 c_z は膨張波の伝ば速度である。また、無次元量として次式を採用した。

$$\begin{aligned} z^* &= \frac{z}{l}, & t^* &= \frac{c_z t}{l}, & \sigma_{zz}^* &= \frac{\sigma_{zz}}{Y_z \alpha_z T_0} \\ v^* &= \frac{v}{\alpha_z T_0 c_z}, & E_z^* &= \frac{d_z E_z}{\alpha_z T_0}, & T^* &= \frac{T}{T_0} \\ c_{33}^* &= \frac{c_{33}}{Y_z}, & \beta_3^* &= \frac{\beta_3}{Y_z \alpha_z}, & e_3^* &= \frac{e_3}{Y_z d_z} \\ \eta_3^* &= \frac{\eta_3}{Y_z d_z^2}, & p_3^* &= \frac{p_3}{Y_z d_z \alpha_z} \end{aligned}$$

ただし、 l は代表長さである。

3.1 表面をランプ加熱される場合 図1に示す圧電平板がレーザーなどの照射を受けて、表面 $z=0$ が立上がり時間 t_p で一定温度までランプ加熱され、表

面 $z = L$ が初期一定温度 0 に保たれる場合を考える。この場合、温度の境界条件は

$$T(0, t) = \begin{cases} T_c \cdot t/t_p, & t \leq t_p \\ T_c, & t \geq t_p \end{cases}, \quad T(L, t) = 0 \quad (30)$$

ただし、 T_c は表面 $z = 0$ での温度上昇である。

数値計算においては、 $l = 10^{-8} \text{m}$, $L = 10^{-8} \text{m}$, $t_p = 10^{-12} \text{s}$, $T_c = T_0$ とした。熱伝導における緩和時間は幾つかの材料について求められており、一般にガス体の 10^{-10}s から金属の 10^{-14}s 程度の値を取ると言われている^{(8)~(10)}。しかしながら、PZT-4 に対する緩和時間は文献等で得ることが出来なかったため、本論文では $\tau_3 = \tau = (10^{-14}, 10^{-12}, 10^{-11}) \text{s}$ と仮定した。この場合、無次元量ではそれぞれ $L^* = 1.0$, $t_p^* = 0.357$, $\tau^* = (0.00357, 0.357, 3.57)$ となる。

図 3 および図 4 は、 τ^* を変化させた場合の $z^* = 0.1$ での T^* および σ_{zz}^* の時間的変動を示す。

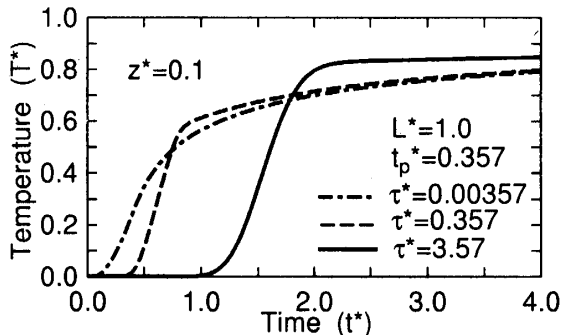


Fig.3 Time variations of T^* for various values of τ^*

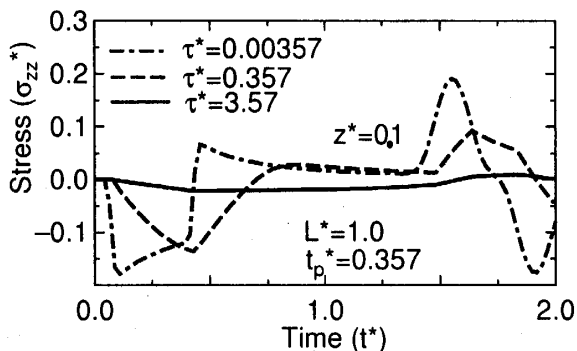


Fig.4 Time variations of σ_{zz}^* for various values of τ^*

$\tau^* = 0$ に対応する古典理論では熱波の速度は無限大となり、熱は拡散により伝播するが、本論文での一般化された理論によれば τ^* が増加するにつれ熱波の伝ば速度が遅くなり、熱の波動としての伝ばが顕著になる。図 4 より、圧電材料 PZT-4 は τ^* の増加とともに波頭における応力変化がなだらかになり、応力値の絶対値は小さくなる。尚、 $\tau^* = 0.00357$ は古典理論による解とも一致する。

図 5 は、 $\tau^* = 0.357$ の場合の PZT-4 平板と、PZT-4 と同じ熱弾性物性値を持つが圧電効果を示さない ($e_3 = p_3 = \eta_3 = 0$) 非圧電性平板の σ_{zz}^* の時間変動を比較している。図中の波線は非圧電性平板に対応する。PZT-4 は非圧電性平板と比較して、波の伝ば速度は大きくなるが応力の絶対値は小さくなっている。

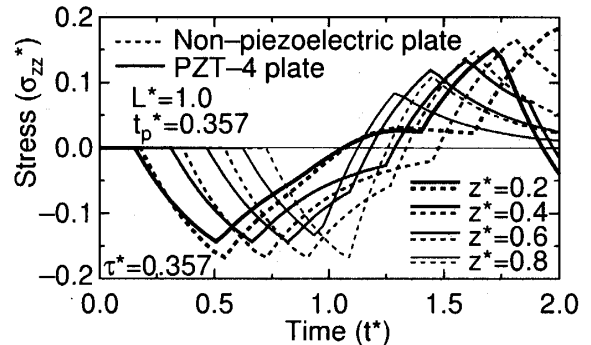


Fig.5 Comparison of σ_{zz}^* for PZT-4 plate and non-piezoelectric plate

3.2 内部熱発生を生じる場合

超高速レーザー

のふく射エネルギーの吸収により内部熱発生を生じる場合、発熱量 W は次式で与えられる^{(11),(12)}。

$$W(z, t) = \frac{I_0}{t_0 d} \exp \left[-\frac{z}{d} - \left(\frac{t}{t_0} \right)^2 \right] \quad (31)$$

ただし、 I_0 は単位面積あたりのレーザーの強さ、 t_0 はレーザーのパルス特性時間、 d はレーザーのふく射エネルギー吸収深さである。この場合、表面 $z = 0$ は断熱、表面 $z = L$ は初期一定温度 $T = 0$ に保たれるとすれば、温度場の境界条件は

$$q_z(0, t) = 0, \quad T(L, t) = 0 \quad (32)$$

数値計算においては、 $l = 10^{-6} \text{m}$, $L = 10^{-6} \text{m}$, $d = (0.1, 0.5) \times 10^{-6} \text{m}$, $I_0 = 1 \text{kJ/m}^2$, $t_0 = 10^{-10} \text{s}$, $\tau_3 = 10^{-12} \text{s}$ と取った。この場合、対応する無次元量は $L^* = 1$, $d^* = (0.1, 0.5)$, $I_0^* = 1.08$, $t_0^* = 0.357$, $\tau^* = 0.00357$ となる。

図 6 および図 7 は $d^* = 0.1$ とした場合、図 8 および図 9 は $d^* = 0.5$ の場合の各時間に於ける W^* および T^* の分布を示す。エネルギーの吸収深さ d が小さい場合、平板の表面近傍だけに内部発熱を生じ、表面付近に大きな温度上昇を生じている(図 6,7 参照)。 d^* が大きくなると、平板全体に内部発熱が生じ、内部発熱量および温度上昇はともに小さくなり、それらの分布はなだらかになる(図 8,9 参照)。

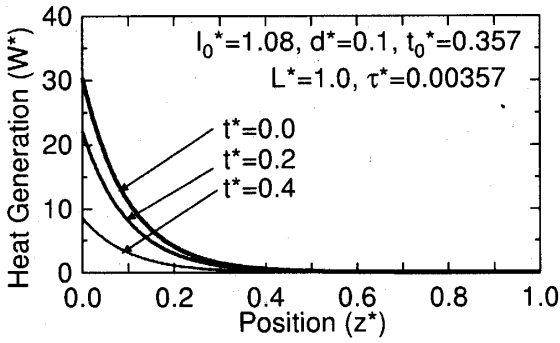


Fig.6 Distribution of W^* at various times t^*

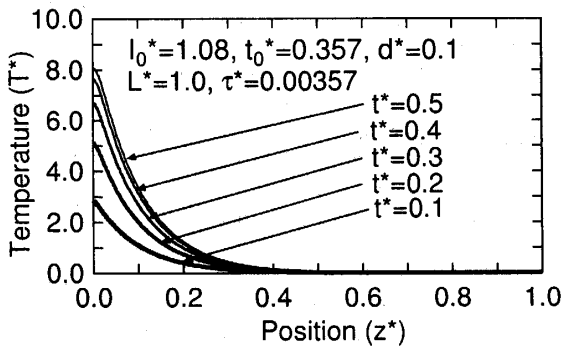


Fig.7 Distribution of T^* at various times t^*

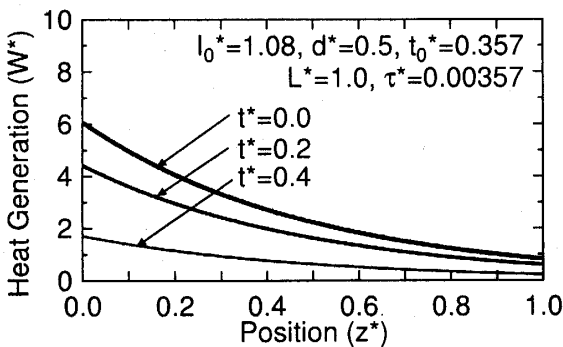


Fig.8 Distribution of W^* at various times t^*

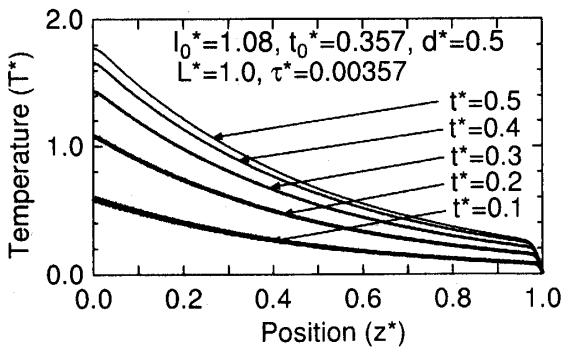


Fig.9 Distribution of T^* at various times t^*

図 10 および図 11 は、 $d^* = 0.1$ および $d^* = 0.5$ の場合の平板内部の各位置における σ_{zz}^* の時間変動を示す。図中の波線は非圧電性平板 ($e_3 = p_3 = \eta_3 = 0$) に対応する。いずれの場合も、平板の上面近傍で生じた応力波は時間の経過と共に平板内部に伝ばし、下面で反射して符号を反転した反射波となって再び平板内部に伝ばし、以後、圧縮、引張の応力変動を示す。

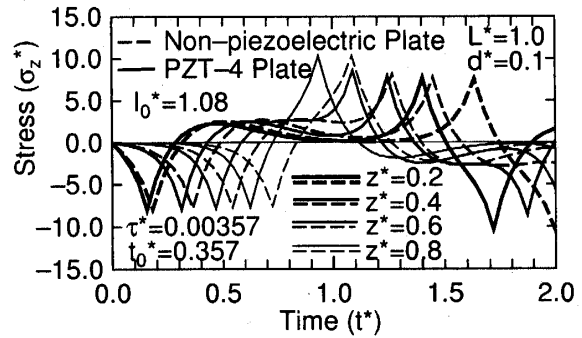


Fig.10 Time-dependence of σ_{zz}^* at various positions z^*

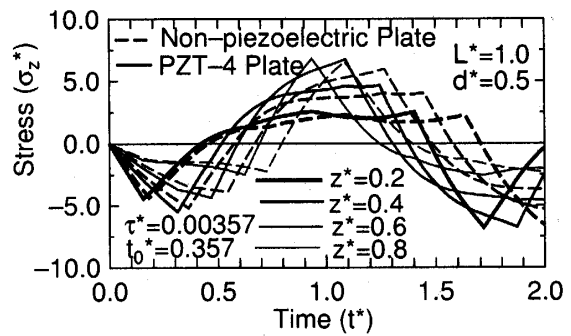


Fig.11 Time-dependence of σ_{zz}^* at various positions z^*

図 12 および図 13 は、 $d^* = 0.1$ および $d^* = 0.5$ の場合の電界の強さ E_z^* の時間的変動を示す。電界も鋭い波頭を形成した波動として伝ばすることを示している。

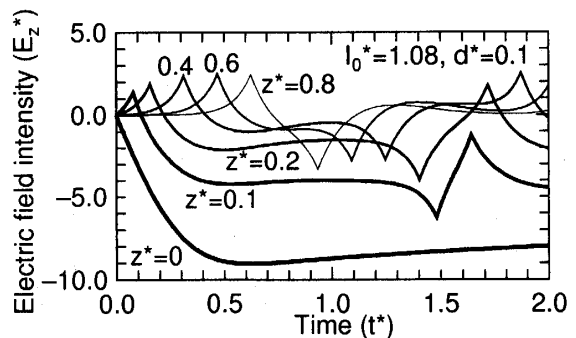
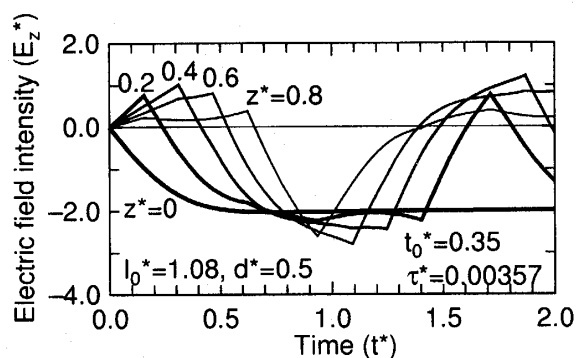


Fig.12 Time variations of E_z^* at various positions z^*

Fig.13 Time variations of E_z^* at various positions z^*

4. 結 言

本論文では、圧電セラミックスの1次元の一般化された電気熱弾性波動問題を例にとり、これを特性曲線法で解析する方法を示した。特性曲線法では、不連続量が伝播する特性曲線に沿って成立する常微分方程式を差分して数値積分する方法であるので、解析が簡単で汎用性があり、波頭の伝播の状況を詳しく知り得る利点がある。数値計算例が示すように、衝撃的に表面を加熱されたり、内部熱発生を生じる非常に薄い圧電材料では温度および電気弾性応答は波動としての伝ば挙動を示す。尚、本論文では均質材料を取り扱ったが、傾斜機能材料に代表される不均質材料や、構成式が非線形性を示す材料に対しても同様に取り扱うことが出来る。

References

- (1) 林 卓夫, 田中吉之助, 衝撃工学, 日刊工業新聞社 (1988), p.259
- (2) Mengi, Y. and Turhan, D., *J. Appl. Mech.*, **45**(1978), pp.433-435
- (3) Sumi, N., *J. Thermal Stresses*, **24**(2001), pp.509-530
- (4) Sumi, N., *JSME International Journal, A*, **45**(2002), pp.146-152
- (5) Ashida, F., Tauchert, T. R. and Noda, N., *Int. J. Engng. Sci.*, **31**(1993), pp.373-384
- (6) Ashida, F. and Tauchert, T. R., *Acta Mechanica*, **145**(2000), pp.127-134
- (7) Ashida, F. and Tauchert, T. R., *Int. J. Solids Structures*, **38**(2001), pp.4960-4985
- (8) Francis, P. H., *J. Sound. Vib.*, **21**(1972), pp.181-192
- (9) Chandrashekharaiah, D. S., *Appl. Mech. Rev.*, **39**(1986), pp.355-376
- (10) Tamma, K. and Namburu R., *Appl. Mech. Rev.*, **50**, pp.514-551(1997)
- (11) 唐 大偉, 荒木信幸, 機論, **62**-595, B(1998), pp.1136-1141
- (12) Tang, D. W. and Araki, N., *Int. J. Heat and Mass Transfer*, **42**(1999), pp.855-869