

数学科授業案：教科で育みたい人間像
「論理的かつ客観的に解決にあたる人」

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2023-03-17 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 西谷, 聡一郎 メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/10297/00029491

数 学 科 授 業 案

教科で育みたい人間像 「論理的かつ客観的に解決にあたる人」

授業者 西谷 聡一郎

- 1 日 時 令和4年10月14日（金） 第1時 10：20～11：10
- 2 学 級 1年D組（1年D組教室）
- 3 題材名 写真に潜む数学を探ろう

4 本題材で願う学び

遠近法を利用した不思議な写真に潜む、伴って変わる様々な数量を実験で得たデータをもとに、表・式・グラフを相互に関連づけながら数量関係を整理する活動を通して、比例・反比例とみなすことで変化や対応をとらえたり、何を定数とするかによって数量関係が比例にも反比例にもなったりすることに気づき、比例や反比例の関係をとらえ直すことができる。
(学習指導要領との関連：C(1)比例、反比例 イ(ア)(イ))

5 題材観

(1) これまでの子どもの学び

①算数とのつながり

本題材で扱う内容は小学校では、小学校4年生から6年生の間で「C変化と関係」という領域の中で扱われている。子どもたちは変化のようすを表や式、折れ線グラフを用いて表したり、変化の特徴を読み取ったり、伴って変わる二つの数量を見いだして、それらの関係に注目し、変化や対応の特徴を考察してきている。また、比例の関係を用いて問題を解決してきており、反比例は比例の理解を促すためのものとして位置づいている。

中学校では、「C関数」という領域名で、小学校で学んだことを土台として、具体的な事象に存在する中から伴って変わる二つの数量の変化や対応の仕方に着目し、関数関係について意味を理解していく。比例、反比例にかかわる日常の事象は数多く存在する。この二つの数量関係を表・式・グラフの特徴に合わせて表現していくことで、算数で培ってきた学習を中学校の内容へとつなげていきたい。

②本質的な理解をめざして

中学校で数学を学ぶにあたり、これまでの授業では一つ一つの当たり前を見つめ直し、解釈を他人に対して説明するということが大切にしてきた。例えば、中学校で初めて学習することとなる負の数については、引く数が負の数の場合の減法とはどのようなことなのか、負の数同士の積がなぜ正の数なのか、など、計算処理をすることはできるが、なぜその計算過程になっているのか不明確になっているものなどについて見つめ直してきた。多くの解釈を聞く中で、子どもたちはこれまでの算数や数学の概念を再構築し、理解をより本質的なものとしていく。本題材でも、比例、反比例について複数の視点からの解釈で本質的な理解をめざ

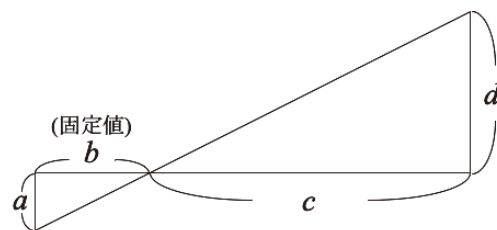
していきたい。

(2) 写真に潜む比例・反比例

写真を撮るときにどのようなことを考えながら撮っているだろうか。「インスタ映え」という言葉があるように、より見映えのいい写真となるために、配置や構図などを考えて撮ることもあるだろう。スマホなどで手軽に撮れる写真は、我々の生活の中でとても身近なものであると言える。

本題材は、そのような日々の生活の中に存在する「写真を撮る」という行為を数学的な見方ととらえる。あるものをカメラで撮るとき、ここには複数の数量関係が存在する。被写体の大きさとカメラからの距離、被写体の大きさと写真に写る大きさ、写真に写る大きさとカメラからの距離などである。これらは感覚的にわかっているものの、実際どのような関係があるか理解した上で写真を撮っているという人は多くない。

では、どのような数量関係が潜んでいるのだろうか。写真を撮るときに潜む数量関係を簡易的に図1のように表す。



- a 写真に写る大きさ
- b 単焦点レンズの焦点距離（固定値）
- c カメラから被写体までの距離
- d 被写体の大きさ

図1 写真を撮ることに潜む数量関係の模式図

①写真に写る大きさを定数とする

図1の a を定数とすると、 c と d の数量関係が見えてくる。

このとき、 $a:b=d:c$

$$bd = ac$$

$$d = \frac{a}{b}c \quad \left(\frac{a}{b} \text{は定数}\right)$$

つまり、カメラから被写体までの距離と被写体の大きさには比例の関係があるということを見いだすことができるのである。

②被写体までの距離を定数とする

次に、図1の c を定数とすると、 a と d の数量関係が見えてくる。

このとき、 $a:b=d:c$

$$ac = bd$$

$$a = \frac{b}{c}d \quad \left(\frac{b}{c} \text{は定数}\right)$$

つまり、被写体の大きさと写真に写る大きさには比例の関係があるということを見いだすことができるのである。

③被写体の大きさを定数とする

最後に、図1の d を定数とすると、 a と c の数量関係が見えてくる。

このとき、 $a:b=d:c$

$$ac = bd$$

$$a = \frac{bd}{c} \quad (bd \text{は定数})$$

つまり、カメラから被写体までの距離と写真に写る大きさには反比例の関係があるということを見いだすことができるのである。

④データをどのようにみなすか

①～③のようにして、子どもたちは数量関係をとらえていく。小学校段階で扱われている、伴って変わる数量は比例や反比例としてとらえやすいものが多く、その変化や対応のようすは表や言葉で表した式などでまとめることが容易であった。しかし、中学校段階では、数値に規則性が見えにくい実験などによってデータを集めることもあり、伴って変わる数量の変化と対

応がとらえにくくなる場合もある。そこで、数値間の幅があったり、ばらつきがあったりする実験値を、表・式・グラフを互いに関連づけながらわかりやすくまとめることで、伴って変わる数量を比例・反比例とみなして考えることができるようになる。みなして考えることで、伴って変わる数量に関係性を見だし、データの考察などができるようになる。また、データを客観的に表現できる幅が広がったことで、より多くの根拠をもとに「みなす」ということについて考えることができるようになったとも言えるだろう。

写真を撮ることに潜む数量関係を感覚的にわかっているからこそ、実験を通してデータを集め、得られた数値の関係をどのようにみなすのかで、感覚的であったものが数学的にとらえられるようになり、①～③の関係も明らかになっていこう。つまり、みなすことでものの見方がより豊かになると言える。

(3) 写真を教材として扱う可能性

(2)①～③の $a \sim d$ の数量関係を見たとき、写真を撮るという行為は変わらないものの、何を変数とし、何を定数とするのかによって比例・反比例の関係が変わってくるというところに本題材の魅力がある。これまでの比例・反比例の教材には、変数として考えるものを指定されているものが多く、自分で変数・定数を選びながら変化と対応を考えていくものは少ない。しかし、写真を撮るときにかかわる数値の中で、一つの数値を定数としたとき、残りの数量にはどのような関係があるのかということについて、実験で集めたデータをもとに、表・式・グラフを関連づけて考えることで、変数や定数とするものによって比例にも反比例にもなり得ることがあると気づくことができる。すると、比例と反比例の関係を一体として考えられるようになり、変化と対応を幅広く考えるようになる。その際、比例と反比例の意味や考え方などをもう一度とらえ直したり、そもそも関数とは何かについても振り返ったりする姿が見られるだろう。

また、反比例の利用の場面では、歯車に関するもの、電子レンジに関するもの、ランドルト環に関するものなどがよく扱われる内容であるが、身近な事象の中で反比例としてとらえて考えるものが少ないため、教材化が難しくイメージがもちにくい。そこで、写真を撮るという身近な事象から比例や反比例をとらえ、新たな教材として考えることも本題材を扱う価値である。

(4) 本題材で願う子どもの姿

本題材では、子どもたちが写真を撮ることに潜む数量の変化や対応を、実験で得られたデータそのもののや

数学科授業案

表・式・グラフそれぞれにまとめたものから見だし
ていく。その中で、子どもたちは変化が一定でない結
果に対し、どのような関係を見いだせばよいのか悩む
ことになるだろう。そこで、データを表やグラフを用
いて整理し、数量関係を比例や反比例とみなして考え
ることで、データに関係性を見だししていく姿を期待
したい。その中では、納得がいくまでデータを取り直
し、根拠となるものをより確実にしようとする姿も見
られるだろう。

また、子どもたちはそれぞれの数量関係を独立して
比例や反比例とみなして考えていくが、それらを俯瞰
（みかん）してみることで、一体的にとらえていくと、相互に関
係している数量があることに気づくだろう。そこから、
子どもたちが固定するものによって比例にも反比例に
もなるものがあることに驚きを感じたり、おもしろみ
を感じたりするような姿を期待したい。

さらに、複数の変化や対応に迫ることで、子どもた
ちは、比例では変化の割合が一定であることに対して、
反比例は一定ではないことに気づいたり、実験を行っ
ていない範囲においても変化や対応を追うことで、実
験外の数値についても推測をすることができるように
なったりするだろう。また、データを表やグラフにし
て整理して考えることで、これまで比例になりそうだ

と予想していた子どもが、「実は曲線になりそうだ」と
反比例として考えを改めて関係性をとらえ直したり、
その関係性を式で表したりすることで、小学校で得た
比例・反比例の知識を更に拡張する姿を期待したい。

このような姿が本題材で見られると、身近な事象に
は他にも比例や反比例とみなせるものがあるかもしれ
ないと、次なる別の数量関係に着目するようになるだ
ろう。すると、月や太陽のようなスケールの大きいも
ので遠近法を利用して写真を撮りたくなる子どももい
るかもしれない。さらには、その過程では、どのよう
な関係が潜んでいるのかと、伴って変わる数量を確か
めてみたくなったり、どのようにしたら撮ることがで
きるのかと、表・式・グラフといった根拠をもとに数
学的な見方ととらえ、数量関係に迫ることで、写真
を撮る方法がわかったりするだろう。これらのように、
本題材を通じて、身近に存在する事象を解明するた
めに数学を使おうとする姿が見られたら素敵である。

身近な事象を数学的な見方ととらえたり、数学的な
見方ととらえたものを身近な事象に当てはめてみたり
することを繰り返していくことで、数学をより身近な
ものと感じ、親しみのあるものとしてくれることを願
う。

6 題材構想（全10時間）

- (1) 不思議な写真に潜む数学について考えよう（1時間）
- (2) カメラからの距離と被写体の大きさの関係を探ろう（3時間）
- (3) 写真を撮ることに隠された他の数量関係を分析しよう（3時間）
- (4) 不思議な写真を分析して、数量関係を確かめよう（2時間）
- (5) 比例・反比例とは何か振り返ろう（1時間）

7 題材構想にあたって

日常的な事象と数学的な事象を往還することで、比
例と反比例の定義や関数そのものの定義についてとら
え直しができるような題材を構想した。本題材では、
遠近法を利用した写真をいくつか見せることを単元の
出会いとする。中学校では比例・反比例に負の数が加
わることで数の概念が拡張されたり、文字式を用いて
表すことでより比例・反比例を一般化してとらえたり
するようになる。また、座標の概念を知ることによって正の
数だけではなく、負の数の範囲までグラフがかけると
いうことを知ることができる。

ここでは、まず不思議な写真に隠された、伴って変
わる数量関係について数学的に考えていきたい。写真
を目にした子どもたちは写真の撮り方に着目し、疑問
をもっていこう。授業者は「どのような関係がわ

かれば同じような写真が撮れるだろう」と問いかけ、
伴って変わる数量関係について焦点化していく。その
中で、カメラからの距離と被写体の大きさの関係につ
いてまずは考え、日常の事象を数学化していく。

日常の事象を数学化していくとき、大切なのは伴っ
て変わる関係を数理的にとらえ、どのようにみなして
いくかである。本題材で扱うデータは実験によるもの
であるため、ばらつきのあるものとなるだろう。その
ようなデータを、表やグラフをもとにデータを整理し
ていく子どもたちは、変化の仕方の関係性を見いだす
ことに悩みながらも、変化の仕方に注目することで比
例のような関係を見いだすだろう。その際、授業者は
子どもたちに数量関係をどのようにみなしていくのか
について、表・式・グラフが相互に関連づけるように

問い返したい。問い返すことで子どもたちは比例や反比例をより深くとらえ直していく。

また、感覚的に近くのは大きく写り、遠くのは小さく写るといふこの関係が、傾きが負の比例の関係なのではないかと予想する子どももいるだろう。実験を行いながら、グラフにまとめたとき、変化の仕方がこれまでと違うことを視覚的にとらえることができるようになり、この関係をどのようにみなすのかという議論に発展することで、もう一度比例と反比例の定義や関数そのものの定義についてもとらえ直しを図ることができるだろう。こうして日常的な事象と数学的な事象を往還することで、理解がより深まっていくことを期待している。

(1) 不思議な写真に潜む数学について考えよう

(1 時間)

遠近法を利用したいくつかの写真(図2)を子どもに見せ、単元の出会いとす。



図2 遠近法を利用した写真の一例

ここでは、まず不思議な写真に隠された、伴って変わる数量関係について考えていきたい。

写真を見た子どもたちは、「どのように撮ったのだろう」「カメラからどれくらい離れて撮っているのだろう」と撮り方に着目するだろう。ここでは、数学的に写真に迫るため、授業者は「どのような関係がわかれば同じような写真が撮れるだろう」と問いかけ、伴って変わる数量関係について焦点化していく。子どもたちからは「カメラからの距離と実物の大きさに関係があるだろう」「写真に写る大きさと実物の大きさの関係がわかることが必要だ」など様々なものが挙がるのが予想される。その中でも、「写真に写る大きさを同じにするには何がわかれば撮れるだろうか」と問いかけることで、複数挙がる関係の中でもまずはカメラからの距離と被写体の大きさの関係について考えるようにしたい。

(2) カメラからの距離と被写体の大きさの関係を探ろう (3 時間)

前時でカメラからの距離と被写体の大きさの関係について調べていくものを焦点化したため、二つの被写体におけるこれらの数量関係について考える。その際、写真に写る大きさについては子どもと対話をする中で、大きさを固定した方がカメラからの距離と被写体の大きさの二つの関係が見えやすくなることを共有する。その後、大きさの変わらない被写体をいくつか用意し、画面上の大きさを変えないようにそのときのカメラからの距離を調べていくような実験を始めたい。そうすることで、各班で得られた実験値を共有することが可能となり、複数のデータから関係性を見いだすことが可能となるからである。

実験を行い、得られた数値を表でまとめていく。このとき、子どもたちがまとめた表はカメラからの距離を x としていたり、被写体の大きさを x としていたりするものとなっているだろう。ここから子どもたちは「どちらが x でどちらが y になるのだろうか」という疑問を抱くだろう。ここで、関数とは何かという定義に立ち返り、関数について理解を深めていくはずである。さらに2数を表で統一した方法で表したとき、子どもたちは「変化の仕方がバラバラだ」「関係をどのように見いだしたらいいのだろうか」と悩むだろう。逆に、「変化の仕方が似た数値になっているから比例としてもいいのではないか」「変化の仕方を、平均をとって考えると、近い数字になっているから比例としてもいいのではないか」と比例とみなしてよいととらえる子どももいるだろう。しかし、比例とみなすには根拠が足りず、共通の理解とならないことが予想されるため、表だけではなく、グラフを用いて比例と言えそうなのかを全体で考えていく。

すると、グラフにおいても子どもたちは「とった点にはなんとなくきまりがありそうだ」と気づき、「比例として考えれば関係性を見いだせそうだ」と比例として考えることに議論が進んでいくだろう。この中で、「みなす」ということについて、考えを深めたい。子どもたちは「みなさないはこの先議論にならない」「みなすことで2数の関係に対応させることができる」「得たデータの平均を取るなら比例としてもいいのではないか」「みなすのであって、正確な比例ではないから誤差が生じるのではないかなど、みなすとは何なのか、どのようにみなせるのか、比例と判断してもいいのか、などについて語り合い、「みなす」ことについての意味や価値について共有していくことになるだろう。

また、二つの被写体について実験をしていたが、「写真に写る大きさを固定したら、二つの被写体の関係は

同じ表にまとめることができるのではないか」と、どちらにも同様な比例の関係を見いだすことにより、写真を撮ることに潜む数量関係を調べるには、二つの被写体を別々に調べる必要はなく、片方を調べればその関係を見いだすことができるということにも気づくことができるだろう。

全体でカメラからの距離と被写体の大きさの数量関係を比例とみなして確認すると、自然と他の数量関係にも注目していこう。そこで、次時ではカメラからの距離と写真上の大きさの関係、写真上の大きさと被写体の大きさの関係を同様に探っていくことになる。

(3) 写真を撮ることに隠された他の数量関係を分析しよう (3時間)

前時で見通しを立てた他の数量について、同様に実験をし、得られたデータをもとに関係を探っていく。写真上の大きさと被写体の大きさの関係については、前時で調べた2数と同様の表ができることや感覚的なものから、比例の関係になるのではないかと見当をつけて考え進めることになるだろう。グラフでとらえたり、式で表したりしてみなしていくことで、関係性は確かなものになっていくだろう。

カメラからの距離と写真上の大きさの関係についても子どもたちは、「カメラからの距離と写真上の大きさも比例の関係になっているだろう」「近くのは大きく写り、遠くのは小さく写るから、右下がりの比例の関係なのではないか」とこれまでの実験と同様に比例として考えることが予想される。しかし、実験をして表(表1)にまとめてみると、変化の仕方がこれまでと異なっているため、予想が覆され、この関係により興味を示すだろう。

表1 カメラからの距離と写真上の大きさをまとめた表の一例

カメラからの距離 (m)	3	4	5	6	7	8	9	10
写真上の大きさ (cm)	6.5	4.7	3.7	3.1	2.7	2.4	2.1	1.9

これまでの学習と同様に、グラフ(図3)に表すと、「変化の仕方がこれまでと違う」と気づきやすくなり、この関係をどのようにみなすのかという議論に発展するだろう。

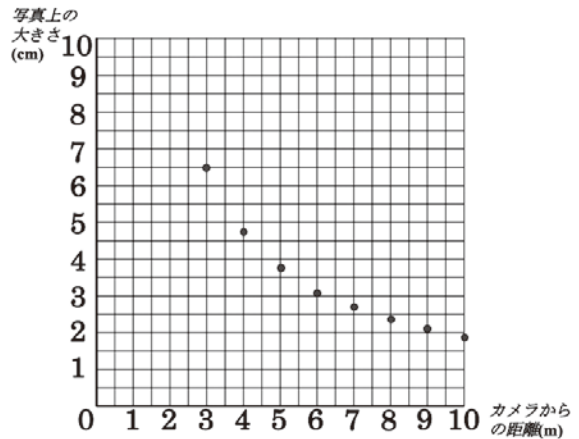


図3 カメラからの距離と写真上の大きさをまとめたグラフの一例

ここで、傾きを負とした比例のグラフもしくは1次関数のグラフ(中学1年生では未習であるため、比例でも反比例でもない別の関数として考えるはずである)ととらえた場合、距離を大きくしていくと、いずれ写る大きさが負の数になってしまう場所が出てくるという矛盾点に気づいていこう。子どもたちはこの矛盾点を解消していくために2数の変化や対応をとらえ直していくことで、2数の関係が直線的なものではなく、曲線的なものになりそうだと考えることで、反比例とみなしていくことになるだろう。

子どもたちが3つの数量関係をそれぞれ分析し、比例や反比例とみなして考えたあと、授業者は「写真にはどのような数量関係が潜んでいたのか」と問い直す。子どもたちはそれぞれの数量関係が比例や反比例とみなせる関係にあったと発言するだろう。また、複数の数量関係に着目し、「同じものが比例にも反比例にもなっている」「三つの数量関係には、何を定数とするかによって比例となったり反比例になったりする関係が潜んでいる」と答えるような子どももいるだろう。これまで比例と反比例を別々なものとしてとらえていた子どもたちが、写真を撮ることに潜む数量関係を追究したことによって3つの変数がある場合、何を定数とするかによって比例にも反比例にもなると、比例と反比例の関係を一体としてとらえ直す姿を期待したい。

(4) 不思議な写真を分析して、数量関係を確かめよう (2時間)

これまで写真を撮ることに潜む数量関係を、実験を通して見いだしてきたが、ここでは改めて第1時に提示した遠近法を利用した写真に立ち返り、授業者は「他の写真でもこれらの数量関係は同じだと言えるのだろうか」と問いかける。すると、子どもたちは「同じ写

真なのだから同じことが言えるだろう」や「撮っているカメラが違うから同じ関係は見いだせない」という考えをもつだろう。ここまでの学びでは、タブレット型端末を使用して撮る写真について、その数量関係を表・式・グラフを関連づけて整理してきた。そのため、他の写真を見たとき、子どもたちはまず前時までに作成した比例や反比例の式に着目をするだろう。

単純に自分たちが見いだしてきた式に代入して求めようとする子どももいれば、前時までに固定していた条件と異なることに気づき、安易に代入して計算することに疑問をもつ子どももいるだろう。そこで授業者は実験を行った手順を子どもたちに想起させる。すると、何かを定数として2数の関係を導いたことに気づき、自分たちが求めた式は、定数が増えたり減ったりして成り立たなくなってしまう式であることに気づいていくだろう。

すると、「数量関係を求めた意味がないのではないか」と考える子どももいるだろうが、同時に「求めた数量関係を比例や反比例とみなして考えることは変わらない」と考える子どももいるだろう。つまり、固定するものが変わっていても、写真に写る大きさと被写体の大きさがわかっているならば、そこからそれぞれの数量関係を比例や反比例とみなして考えることでカメラからの距離を導き出すことができるのである。

不思議な写真を分析し、数量関係を確かめると子どもたちは「実際に撮ることができるのか確かめてみたい」という思いをもつだろう。分析した結果を確認するために写真を撮ることで、子どもたちは日常の事象から数学化して数学の世界で写真を考えていたが、再び日常の事象に戻して考えることになるだろう。学ぶ前は試行錯誤でしか撮ろうとしていなかった子どもたちが、学んだことによって写真を撮ることにかかわる数量関係を調べだし、それに基づいて写真を撮ろうとするような姿が見られたら素敵である。

(5) 比例・反比例とは何か振り返ろう（1時間）

写真を撮ることで比例や反比例の理解を深めてきた子どもたちが改めて振り返ることができるように、授

業者は「授業を通してどのようなことを学んだのか」と問いかける。不思議な写真に潜む数学について考えることを通して、意外に身近なところに比例や反比例が潜んでいることや、比例と反比例が別物ではなく、何を固定するかによって変化し、同じものをどのように見ているかの違いであるということに気づき、進んで他の身近にある比例・反比例に興味を示すだろう。また、身近にある他の様々な事象について、比例・反比例で考えられるものはないかと興味を示し、数学的な見方とらえていくだろう。さらに、これまでのものの見方に数学的な見方が加わるようになったり、その見方がさらに深まるようになるきっかけになったりする姿も期待したい。本題材を通して、比例・反比例という概念が再構築されるような場面が見られたらと願い、授業を閉じたい。以下は題材終了時にあらわれて欲しい子どもの「追究の記録」である。

- ・小学校では表とグラフで比例や反比例を考えてきたけど、式で関係を表すことで伴って変わる数量が簡単に表せるようになった。
- ・小学校より比例と反比例を表す手段が増えた。これまでは表だけで考えたり、グラフだけで考えたりしていたけど、表と式とグラフをまとめて考えることでより比例や反比例を理解できると感じた。
- ・写真には値を固定するものによって比例にも反比例にもなる関係が潜んでいたことに驚いた。また、そのような関係はお互いに関連のあるものであることにも気づくことができた。
- ・身近にある写真にも数学が潜んでいたなんて驚いた。他にも身近なところに数学が潜んでいるのかもしれない。
- ・比例で考えているものも、見方を変えると反比例になることがあることがわかった。これは道のりと速さと時間の関係と同じなのかもしれない。3つの数量が関わってくるものにはこのような関係があるのではないだろうか。

参考文献：永田潤一郎（2004）「「比例とみなす」ことのよさについての考察」

『日本数学教育学会誌』 第86巻 第3号。

藤原大樹（2012）「中学生による数学的モデリングをめざした近似の考えの継続的指導の必要性」

『日本科学教育学会年会論文集』 Vol.36。

文部科学省（2017）『小学校学習指導要領解説 算数編』。

文部科学省（2017）『中学校学習指導要領解説 数学編』。