

数学科授業案

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2023-03-23 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 安濃, 勇太 メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/10297/00029557

数 学 科 授 業 案

授業者 安 濃 勇 太

- 1 日 時 令和3年10月14日(木) 第2時 10:10~11:00
- 2 学 級 2年A組 (2年A組教室)
- 3 題材名 折り紙で考える角の三等分線の証明

4 本題材で願う学び

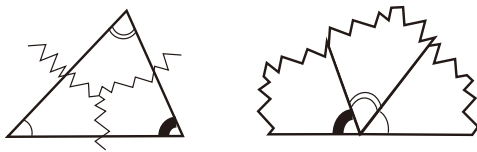
折り紙で角の三等分線を折る方法が本当に角の三等分線と言えるのか考える活動を通して、平行線の性質や三角形の合同、三角形の定義・定理など既習の図形の性質をもとに前提や根拠を明確にしながら、誰もが納得できるように証明することで、演繹的に推論することの必要性に気づくことができる。

(学習指導要領との関連：B(2)図形の合同 イ(ア))

5 題材観

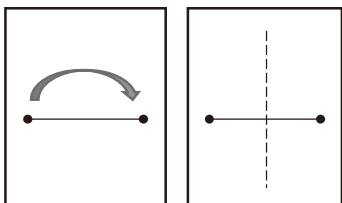
(1) これまでの子どもたちの学び

これまでの算数・数学の授業において、子どもたちは様々な事象から疑問をいただき、数値をもとにして決まりを見つけたり、実際に長さや角度を変えて操作的に説明しようとしてきた。例えば、「三角形の内角の和は 180° になる」ということを、小学校では【図1】のように三角形を切り取り、角を1ヵ所に集めると直線になるというに気づき、 180° であることに納得してきた。

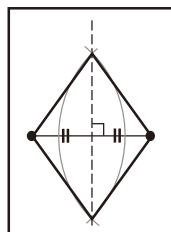


【図1】

中学1年生でも、垂直二等分線の作図の授業において、【図2】のように2つの点が重なるように実際に紙を折ったときに、2点を結んだ線分と折り目にはどのような関係があるかを考えてきた。そして【図3】のように、垂直二等分線の作図の過程でひし形ができ、小学校で学習したひし形の性質を根拠として垂直二等分線がかかることから、垂直二等分線のかき方や性質を見いだしてきた。



【図2】



【図3】

中学2年生では、運動場にあるトラックのスタート位置や倍数を判別する方法など具体的な事象を数理的にとらえ、文字を用いて説明する活動を取り扱ってきた。その中で、文字を用いることで一般化され、どん

な場合でも成り立つことが説明できるということに気づき、筋道を立てて説明することができた。図形に限らず、数と式の領域においても推論を深めることができるようになってきている。

(2) 折り紙から広がる数学の世界

①注目される折り紙文化

折り鶴、紙飛行機、かぶと、箱。日本人であれば、誰も折り紙で様々な形を作ったり、それを使って遊んだりしたことがあるのではないだろうか。日本の伝統文化でもある折り紙には、たくさんの魅力があるだろう。例えば、紙を折るときに高めることができる集中力、折り終わって作品が完成したときの達成感、そしてハサミを使わずに1枚の紙から精巧な作品をつくりあげたという感動などがある。また、細かい作業であることから脳を活性化したり、空間認知能力を高めたりもする。こういった観点から、海外でも『ORIGAMI』と呼ばれ、注目されるようになってきている。

②折り紙が宇宙や医療で活躍する

折り紙は平面の紙から立体的なものをつくりあげたり、小さく折りたたんだり自在に展開したりすることができる。また、折るだけで同じ紙でも強度を大幅に強くすることもできる。こういった折り紙の特性が様々な分野で注目されているのである。

ミウラ折りと呼ばれる折り方は簡単に紙を広げたりたたんだりすることができるとともに、紙が破れにくかったりコンパクトにたためたりすることができる折り方である。この特性から、宇宙衛星のソーラーパネルや防災や観光用の地図などで幅広く使われている。特に、衛星のソーラーパネルを宇宙に持ち出すためには、小さく折りたたみかつ強度が強く宇宙空間で広げやすい構造が求められたため、宇宙科学で活用できる

折り方として注目を浴びたのである。

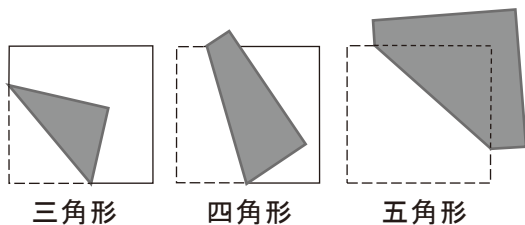
医療分野でも、折り紙の技術に応用した技術が使われている。狭くなった血管を広げるために、小さく折りたたんだ合金を血管に挿入し、患部で自然と広がるような技術である。(折り紙ステンドグラフト) 小さく折りたたむことで簡単に挿入することができ、患者の体の負担を減らすことにもつながっている。また、細胞を培養するための「細胞折り紙」というものの研究が重ねられているという。

その他にも、飲料缶の表面の凸凹(ダイヤカット缶)や車のエアバッグ、建築や家具の収納など多くの分野で折り紙の技術が活躍している。

③数理的にとらえる折り紙の魅力

多くの分野で活躍している折り紙は、数学とも深い関係がある。折り紙を折る時に、長さや角、なぜ折れるのかということ意識しながら折っている人は少ないだろう。しかし、そこには辺や角の性質、対称性などを見いだすことができる。

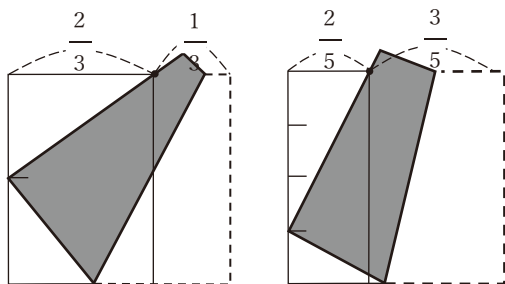
例えば、【図4】のように、折り紙を一回折ったときの折られた部分の形に注目すると、三角形、四角形、五角形と規則をもって形を変えていくのである。つまり、折り紙を一回折っただけでも数学の世界が広がっていく。



【図4】

さらに、折る回数を増やしたり折り方を工夫したりすることによって様々な図形を作ることができ、正方形と他の図形とのつながりについても理解を深めることができる。

その他にも、紙を3等分したり5等分したりすることは難しそうに感じるが、【図5】のように、折り紙を使うと容易に折ることができる。



【図5】3等分線と5等分線の折り方

このように、折り紙を遊びとしてとらえるだけではなく、数理的にとらえることでさらなる折り紙の楽しさやおもしろさが広がっていくだろう。ちなみに、ここで取りあげたものは、元筑波大学教授の芳賀和夫氏が発見した「芳賀の定理」と呼ばれるものである。芳賀氏は折り紙を用いた定理を多く見だし、折り紙やコピー用紙を折ることで数学のおもしろさを考える「オリガミクス」という分野を確立し、紙を折ったり重ねたりすることで数学を追究していくことの魅力を広めた人物である。

(4) 本題材の価値

①誰もが納得する推論へ

先述したように、小学校では「三角形の内角の和は 180° になる」ということを、三角形を切り取り、角を1ヵ所に集めることで直線になるということを使って理解するが、これは帰納的な推論をもとに数や図形の性質を見いだしてきた姿である。しかし、この考えでは「他の三角形では成り立つのか」と問われるとまた同じように推論を繰り返さなくてはいけない。帰納的類推的な推論によって導かれた事柄がいつでも正しいかどうかは、演繹的な推論をもとに確かめることができるだろう。

演繹的な推論とは前提となる命題から論理の規則に従って必然的な結論を導き出す推論である。中学校から文字を扱うようになり、一般化して説明したり筋道を立てて論理的に説明したりする機会が増えてきた。そういった中で、子どもたちはより厳密な論証を追究するようになるだろう。また、「本当に正しいのか」「どんな場合でも成り立つのか」ということを追究するようになり、誰もが納得できるような論証ができるようになりたいと考えることで、演繹的な推論へと思考が変わっていくだろう。

中学2年生の図形の領域から、数学的な推論の過程を簡潔・明瞭に表現する力を養うために、演繹的な推論へと論証の方法が変わっていく。しかしながら、いきなり演繹的な推論に変え、厳密さを求めてしまうと形式化されるにとどまってしまう、数学的な思考力を高めることにはつながらないだろう。本題材は、これまでの帰納的類推的な推論と関連づけながら、段階的に演繹的な推論で考えていくことができることに価値を見いだしていきたい。

②折り紙で試行錯誤を繰り返す

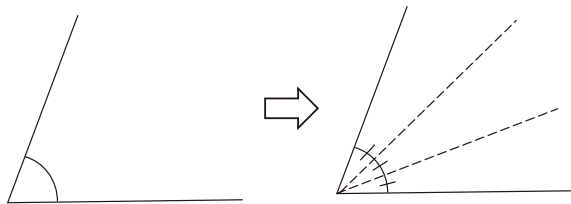
中学1年生の空間図形の学習で『ポリドロン』という教材を使い、正三角形や正方形などの平面図形のパーツを使って正多面体などの立体をつくり、位置関係や

性質を見いだしてきた。その際、子どもたちは様々なパーツを組み合わせてたり一度つけたパーツを取り外して違う場所につけ変えたりするなど教材を使って多様な視点を持ち試行錯誤を繰り返すことで空間図形の理解を深めることができた。具体物があることにより、イメージをふくらませやすくなっていただろう。

折り紙も同様に試行錯誤を繰り返すことができる教材である。何度も折ったり、重ねたりすることが容易であるとともに、向きを変えることで別の視点から図形をとらえることもできる。また、仲間へ考えを共有するときにも、折り紙があると共有しやすくなるだろう。

③角の三等分線に挑戦

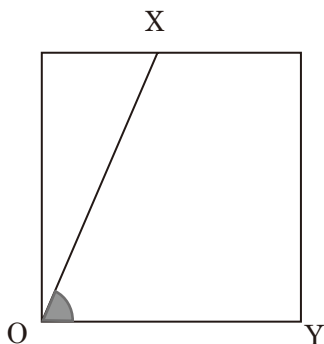
作図は垂直二等分線や角の二等分線など線分や角を二等分するのに適している。しかし、三等分となるとなかなかうまくいかない。線分の三等分は、比の考えを用いて作図の方法を見つけることができる。しかし、【図6】のように角の三等分線は三大作図難問と呼ばれ多くの数学者を悩ませた。そして、任意の角の三等分線は作図することが不可能であると証明された。



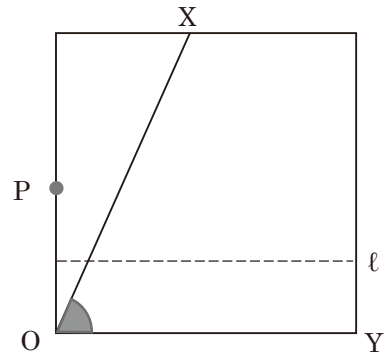
【図6】任意の角の三等分線

作図が不可能であると証明された角の三等分線だが、折り紙を折ることによって、角を三等分することができるということが阿部恒氏によって発表された。作図ではできないのに、折り紙ではできる。折り紙を通じて数学のさらなる可能性を広げていくことになったのだ。

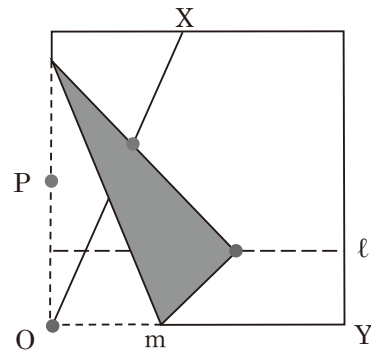
折り紙を使った角の三等分線の折り方は以下のとおりである。（【図7】で示したように、左下から適当に直線をひいたときにできる任意の $\angle XOY$ の三等分線の折り方を考える。）



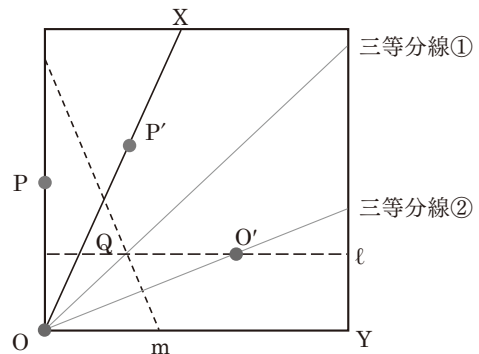
【図7】



【図8】



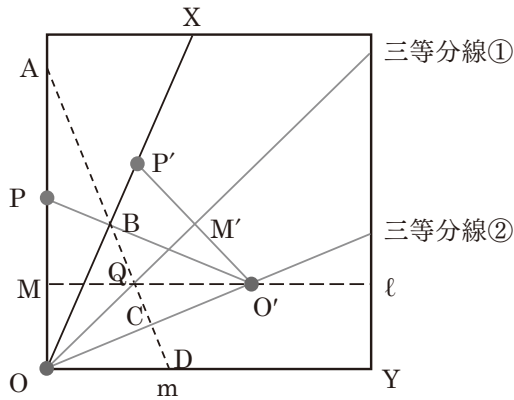
【図9】



【図10】

- < $\angle XOY$ の三等分線の折り方の手順>
- ①左の辺に適当な点Pを置く。【図8】
 - ②左下の頂点Oが点Pと重なるように折り目の線 l を作る。【図8】
 - ③点PがOX上に、頂点Oが直線 l 上にくるように折り目の線 m を作る。【図9】
 - ④頂点Oと点 O' 、頂点Oと点Q（直線 l 、 m の交点）をそれぞれ結んだ2本の半直線が $\angle XOY$ の三等分線となる。【図10】

このように折り紙を折ることによって、 90° 以下の任意の角の三等分線を折ることができる。そして、本当にこの折り方で角の三等分線が折れているのか、これまで学習した知識をもとに以下のように証明することができる。



【図11】

【図11】のように、OPの中点を点M、直線m上の点を点A、B、C、Dとする。また、折り紙を折り重ねたときの点PとXOとの交点を点P'、頂点Oと直線l上の交点をO'とし、直線lと直線mの交点を点Qとする。さらに、点OPを直線mで折り返した時に、点Mと重なる角の三等分線①上の点を点M'とする。

<角の三等分線（3つの角が等しいこと）の証明>

直線 $l \parallel OY$ から、平行線の錯角は等しいので、

$$\angle YOO' = \angle OO'M (\angle QO'O) \quad -①$$

OとO'は直線mを対称軸として折って重なっている点であるため、 $OC = O'C$ 、直線 $m \perp OO'$

OO'と垂直二等分線m上にある点Q、点Bをそれぞれ結んだ $\triangle QOO'$ と $\triangle BOO'$ は、ともに二等辺三角形になる

二等辺三角形は2つの底角が等しいので、

$$\angle QOO' = \angle QO'O \quad -②$$

$$\angle BOO' = \angle BO'O \quad -③$$

$$①, ② \text{ から } \angle YOO' = \angle QOO' \quad -④$$

$$②, ③ \text{ から } \angle BOQ = \angle BO'Q \quad -⑤$$

$\triangle O'PM$ と $\triangle O'M$ において、点MはPOの中点なので、

$$MP = MO \quad -⑥$$

$$\angle O'MP = \angle O'MO = 90^\circ \quad -⑦$$

$$MO' \text{ は共通 } \quad -⑧$$

⑥, ⑦, ⑧から、2つの辺とその間の角がそれぞれ等しいので、 $\triangle O'PM \cong \triangle O'M$

対応する角は等しいから、

$$\angle PO'M = \angle OO'M \quad -⑨$$

②, ③, ⑤, ⑨から

$$\angle BOQ = \angle QOO' \quad -⑩$$

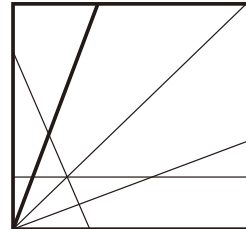
④, ⑩から

$$\angle BOQ = \angle QOO' = \angle YOO'$$

よって、角の三等分線が成り立つことがいえる

このように、平行線の錯角や二等辺三角形の性質、三角形の合同など、これまで学習した図形の性質を用いることで、演繹的に証明することができる。

これまでの論証は、仮定や結論など命題がはっきりしているもの、筋道がはっきりと立てやすいものについて多く考えてきた。しかし、本題材の角の三等分線はそれらが分かりづらい分、子どもたちにとって試行錯誤が必要だろう。



【図12】

上の【図12】のように、折り目と三等分線だけでは、3つの角が等しくなるという結論はイメージをもちやすいが、仮定やどのように論証を進めていけばよいかわからず立ち止まってしまう。また、三角形もそのままでは相関関係が分からない。だからこそ、子どもたちは図形に補助線を加えたり、どの三角形が合同になっているかを考えたり、折り紙の向きを変えることによって、どこに二等辺三角形があるのかを考えたり図形を様々な視点でとらえることをするだろう。また、子どもたち同士で視点や論証の進め方の共有をすることで、折り紙を折ることで見いだされる対称性により気づきやすくなったり、誰もが納得する推論で論証を進めることの大切さにも気づいたりできるのではないだろうか。

(5) 本題材で願う子どもの姿

図形を頭の中でイメージすることが苦手な子どもでも、折り紙という具体物を使って実際に折る活動を取り入れることで、図形の対称性やそこから導かれる辺や角、図形の性質のおもしろさを感じとる姿を願っている。

また、作図によって任意の角の三等分線をかくことはできないが、折り紙を折ることで角の三等分線ができることに気づいた子どもたちは、「本当にこの折り方で角の三等分線になっていると言えるのか」と、証明をする必要性を感じ、追究していく。任意の角の三等分線の証明は、補助線を引いたり二等辺三角形や合同な三角形を見いだしたりする必要があり、結論を出すまでの道のりは険しい。それでも、既習の図形の性質をもとに粘り強く考えていく姿を期待している。

そして、前提や根拠を明らかにした証明をしていくことで、演繹的に推論することの必要性に気づくことができる姿につなげていきたい。

6 題材構成（全5時間）

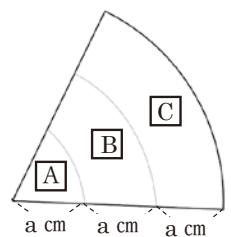
- (1) ピザを三等分しよう（1時間）
- (2) 折り紙で90°を三等分しよう（1.5時間）
- (3) 任意の角を折り紙で三等分するためには（0.5時間）
- (4) 本当に角の三等分線といえるのか証明しよう（2時間：本時はその1）

(1) ピザを三等分しよう（1時間）

授業者は、最初にピザの写真を提示する。子どもたちは、中学1年生で学習したおうぎ形の弧の長さや面積など平面図形の学習を想起するだろう。そして、授業者から「このピザを3人で均等に分けるには、どのように分ければよいか」となげかける。子どもたちは、面積や角度に着目して、中学1年生で学習した作図を用いながら考えることが予想される。子どもたちがピザやおうぎ形のイメージをもって考えることができるように、角度の異なるピザの写真やおうぎ形が書かれたシートを数種類用意し、必要に応じて使えるようにしておく。個人やペアで考えを共有していくを通して、多様な発想を期待したい。

<面積に着目する考え>

- ・面積を求めてそれを÷3をすればいいのではないかな。文字を用いて面積を考えてみよう。
- 半径を r cm, 中心角を a° とする
- $$r \times r \times \pi \times \frac{a^\circ}{360^\circ} \times \frac{1}{3} = \frac{a}{1080} \pi r^2$$
- どうすれば3等分できるのか分からない。
- ・半径を3等分しておうぎ形をかけば3等分になるのではないかな。

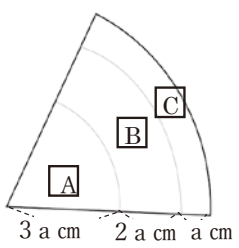


【図13】

【A】： $\pi a^2 \text{cm}^2$ 【B】： $3\pi a^2 \text{cm}^2$ 【C】： $5\pi a^2 \text{cm}^2$

※中心角はすべて一定のため省略する

- ・半径の分け方の比を、3：2：1に変えてみたらどうだろうか。

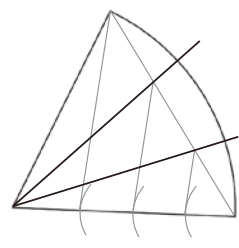


【図14】

【A】： $9\pi a^2 \text{cm}^2$ 【B】： $16\pi a^2 \text{cm}^2$ 【C】： $9\pi a^2 \text{cm}^2$

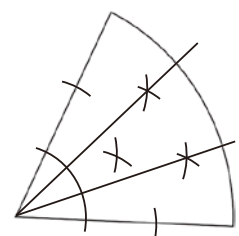
<角度に着目する考え>

- ・中心角を3等分すれば均等に分けられるから、中心角が何度になるか分度器で測ってみよう。
- ・分度器で角度を計ったら75°ぐらいだから、3等分して25°ずつに線を引けばできる。
- ・作図で角の二等分線をやったから、角の三等分線も作図できるのではないかな。
- ・弦を3等分したら角の三等分線が作図できるのではないかな。



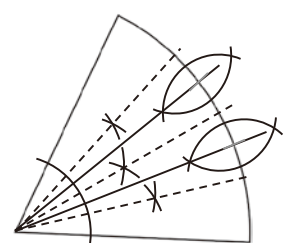
【図15】

- ・角の二等分線と同じようなかき方で、さらに円の数を増やすと角の三等分線がかけそう。



【図16】

- ・角の四等分線と垂直二等分線を組み合わせたらかけるのではないかな。



【図17】

など

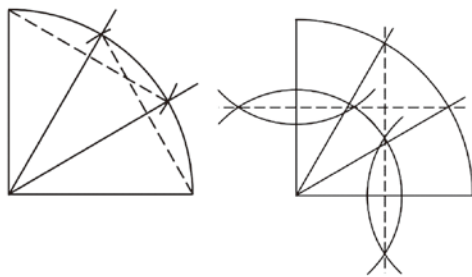
子どもたちは計算で考えたり、作図をして求めようと試行錯誤を繰り返したりする。その中で、計算で求めることは難しそうだが、中学1年生で学習した角の二等分線の作図と関連づけ、作図で角の三等分線がで

きるのではないかと多くの時間を使って考えるだろう。子どもたちは様々なかき方で角の三等分線の作図を考え、三等分線がかけたと言う子どもも出てくるのが予想される。しかし、授業者はその都度「本当にそのかき方で角が三等分されているのか」と問い直す。子どもたちが、自分の考えた作図の方法が本当に正しいのか立ち返り、誰もが納得できる説明をすることの難しさを感じつつも、粘り強く考えていくことができるようにしたい。

また、角度がわかればできそうだとすることに着目し、子どもたちは「もし90°だったら」「中心角を45°と仮定すると」と任意の角から限定した角度の作図を考えるだろう。

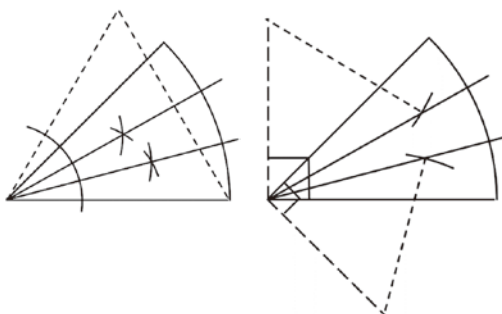
<限定した角度の三等分線を作図する考え>

- 中心角が90°だったら、1つの角が30°になるから正三角形をかいて角の二等分線をかくと作図することができる。
- 半径の垂直二等分線をそれぞれかいても、90°の三等分線をかきことができる。



【図18】90°の三等分線の作図

- 中心角が45°と仮定したら、正三角形の角の四等分線（角の二等分線の二等分線）をかけば15°をかきすることができる。
- 中心角が45°でも、1つの角が15°にすればよいから、垂線や正三角形を組み合わせたらかきことができる。



【図19】45°の三等分線の作図

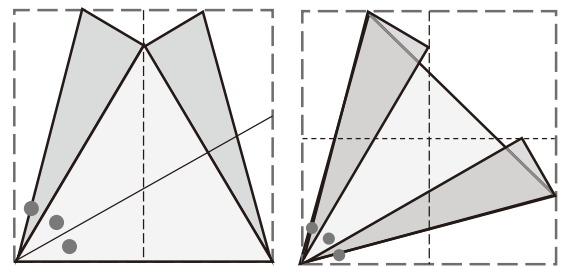
など

このように、任意の角ではなく90°や45°などの限定した角の三等分線ならば作図することができる。それ

に気づいた子どもの考えを全体で共有し、なぜ90°や45°であれば作図できるのか説明する中で、合同な三角形や対称な図形に着目した発言を価値づけていきたい。

(2) 折り紙で90°を三等分しよう (1.5時間)

授業者は、「任意の角の三等分線は多くの数学者たちを悩ませてきた」ということを伝える。さらに、「作図することはできないが、折り紙で任意の角の三等分線を折ることができる」ことを合わせて伝える。「なぜ作図できないのに、折り紙で折ることができるのだろうか」「どうすれば角の三等分線を折ることができるのか知りたい」という発言を引き出し、授業につなげていきたい。そういった発言が出たところで、子どもたちに折り紙を配布し、任意の角の三等分線を考える前に、まずは「90°の三等分線はどうすれば折ることができるか」となげかける。子どもたちは、目の前にある折り紙を様々な折り方をして90°の三等分線を導きだしていく。子どもたちは、【図20】のような折り方を見つけるだろう。



【図20】90°の三等分線の折り方

ここでは、90°の三等分線を折ることができた子どもに、複数の折り方を全体場で説明してもらおう。子どもたちがそれぞれの折り方を説明し共有をしていく際、折った部分ともとの折り紙の部分が分かりにくくなるのが予想される。そこで、黒板に掲示できる大きな折り紙を用意したりICTを活用して子どもがかきこんだ折り紙を大きく映し出したりすることで全体に共有しやすくするなど、丁寧に説明をしていくことで、子どもたちの理解につなげたい。

折り方を共有していく中で、「なぜこの折り方で90°の三等分線を折ることができるのか」とつぶやく子どもも出てくるはずである。そういったつぶやきをひろい、90°の角の三等分線を作図したときと同様に正三角形をつくるのが共通しているということに気づかせたい。そこから、「その折り方で本当に正三角形を折ることができているのか」と新たな疑問をもつ子どもが出てくるのが予想される。そういった子どものつぶやきをひろい、「正三角形であることを証明しよう」と授業者から問い返すようにしたい。

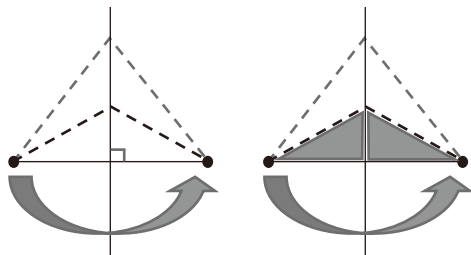
ここでは、誰もが納得できるような証明を考えていく。証明ができた子どもがいたら、グループ内で他の子どもにうまく伝えられるか確認していきたい。さらに、グループで考えを共有しやすくするために、大きな正方形の紙や折り方によって出てくる折り目が印刷された紙を用意したり、図形にかきこみやすいように文字の置き方を統一したり色分けしたり配慮していきたい。

子どもたちは、折り紙を指さしながら合同な三角形や等しい長さや角度に着目して証明をしようとしていくだろう。しかし、折り紙の折り目や重なる辺を用いて証明することは初めてであるため、証明をどのように進めていけばよいか苦戦することが予想される。

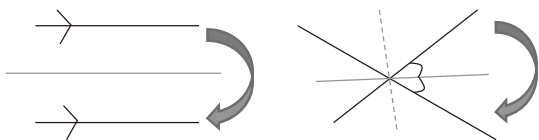
そこで、証明を考えるために必要な折り紙の性質を全体で確認していきたい。折り紙公理と呼ばれるものが7つ存在するが、本題材では関係する2つの公理について言葉を少し変えて提示する。また、その性質からさらに見いだされるものはなにか確認したうえで、それらについても折り紙の性質として合わせて提示したい。

<折り紙の性質>

①2点が重なるように折った時、2点を結んだ線分に対して、折り目は垂直二等分線になる。また、折り重なる2つの図形は合同である。



②2つの平行な直線を重なるように折る時、折り目は2直線と平行になる。また、1点で交わる2つの直線を重なるように折る時、折り目は2直線の角の二等分線になる。

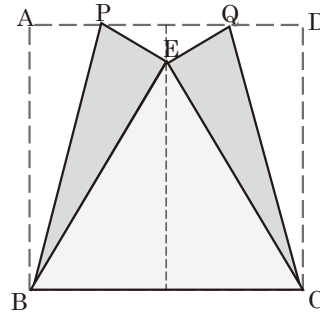


図形の性質や折り紙の性質をもとに、子どもたちはそれぞれ三角形の合同を見いだしたり、正三角形は辺や角の性質を利用したりして、次のように証明するだろう。

<正方形の一辺をもとにつくる正三角形の証明>

【図21】のように、折り紙の頂点をA, B, C, D, 点A, Dを中線と重なるように折ってできる交点を点E,

さらに、AD上にある折った時の折り目の点をそれぞれ点P, Qとする。(文字の置き方については、全体共有がしやすくするために共通の文字を置く)



【図21】正方形の一辺と同じ長さの正三角形

- ・折っているから、折る前と後で対応する辺の長さは等しくなることが言える。
- ・折り紙の性質を使えば、合同な三角形を言うことができる。 など

折り紙の性質より重なる辺の長さは等しいので、

$$AB = EB \quad \text{--- ①}, \quad DC = EC \quad \text{--- ②}$$

正方形はすべての辺の長さが等しいので、

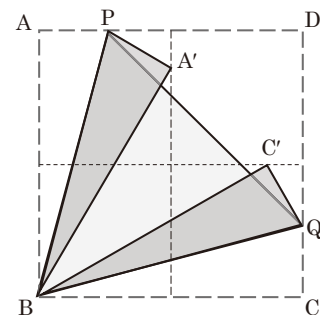
$$AB = BC = CD \quad \text{--- ③}$$

①, ②, ③から $EB = BC = CE$

よって、3つの辺がすべて等しいので、 $\triangle EBC$ は正三角形になる

<折り目をもとに正三角形をつくる証明>

【図22】のように、折り紙の頂点をA, B, C, D, 点Aを縦の中線と重なるように折ってできる交点を点A', 点Cを横の中線と重なるように折ってできる交点を点C'とする。AD上とCD上にある折った時の折り目の点をそれぞれ点P, Qと置く。



【図22】折り目の線を一辺とした正三角形

折り紙の性質をもとに同じ折り方をしているため、 $\triangle ABP \equiv \triangle CBQ$ がいえ、対応する辺は等しいので、 $BP = BQ$ になるため、 $\triangle BPQ$ は二等辺三角形になる。また、先ほどの証明から、 $\triangle A'BC$ は正三角形に

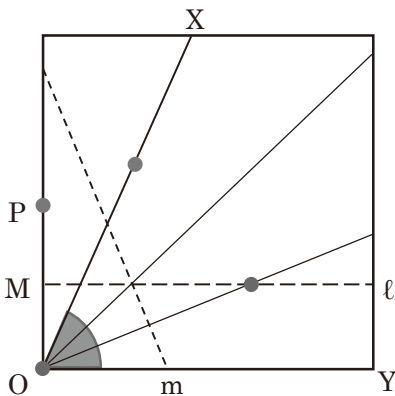
なるため、 $\angle A'BC = 60^\circ$ -①
 $\angle ABA' = 90^\circ - \angle A'BC = 30^\circ$ -②
 $\triangle ABP$ と $\triangle A'BP$ において、折り紙の性質より折り重なる2つの図形は合同になるため、
 $\triangle ABP \equiv \triangle A'BP$ -③
 対応する角はそれぞれ等しいから、
 $\angle ABP = \angle A'BP$ -④
 ②、④から $\angle A'BP = 15^\circ$ -⑤
 同様に、 $\angle CBQ = 15^\circ$ -⑥
 $\angle PBQ = \angle A'BC - \angle CBQ + \angle A'BP$
 $= 60^\circ - 15^\circ + 15^\circ$
 $= 60^\circ$
 よって、 $\triangle BPQ$ は頂角が 60° の二等辺三角形になるため、正三角形になることがいえる。

折り紙の性質をもとに折り重なる辺や合同な三角形に着目し、辺の長さがすべて等しいこと、角がすべて 60° になることの根拠を明確にしていくことで、 90° の三等分線になっていることの理解につなげたい。

最後に、「 90° 以外の任意の角はどうすれば折り紙で三等分できるか」となげかけ、次時につなげる。

(3) 任意の角を三等分するためには (0.5時間)

子どもたちは、折り紙で任意の角を三等分する方法を試行錯誤していくであろう。授業者は、折り方のヒントを少しずつ与えていくことで、子どもたちが【図23】のような角の三等分線の折り方を理解していく。子どもたちからは以下のような反応があるだろう。



【図23】

- ・複雑な折り方をしたけれど、作図ではできなかった三等分ができるのはすごい。でも、この折り方で本当に三等分線が折れているのだろうか。
- ・角の三等分線は作図できないのだから、本当にこの折り方で折れているのか疑わしい。折れていないのではないかな。

など

授業者は、子どもたちが折った折り方で本当に角が三等分されているのか確認をするように伝える。子どもたちは、最初は折り重ねてみたり、分度器で角度をはかったりして帰納的に考えるだろう。また、同じ折り方で角度を変えてもう一度折るといった類推的にも考えるだろう。その中で、「本当に折れている！」と感嘆する声もある一方で、折る時にズレができてしまい「折っても重ならない」「角度を測ったけれど、等しくない」と折り方が正しいのか疑問をもつ子どもも多いことが予想される。そこで、子どもから「本当にこの折り方でどのような角でも三等分できているのか証明しよう」と問いが生まれ、誰もが納得できるような演繹的な考えで論証を進めることができるようにしたい。その際、論証を進めていくには文字の置き方を統一したり色を用いて線や角に印をつけたりするなど前提を分かるようにして共有しやすくなるように工夫していきたい。

(4) 本当に角の三等分線といえるのか証明しよう

(2時間：本時はその1)

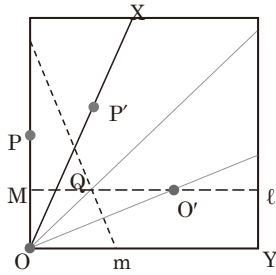
前時をふまえて、もう一度折り方の確認をし、帰納的類推的な推論を用いて納得できないことを子どものつぶやきや追究の記録からひろっていき、誰もが納得できるような証明を考えようと子どもたちになげかける。 90° の三等分線を折るときに出てきた正三角形の証明よりも難しいものになっているため、個人追求をしたあとにグループで考える時間を多くとりたい。また、グループ活動の途中でどのような補助線を引いたか、どこの図形に着目したかを全体で共有することで、グループ活動をより活発なものにしていきたい。

子どもたちは補助線を引いたり、図形の見方を変えて合同な三角形を多く見いだしたり、二等辺三角形を見いだしたりしていき、以下のような発言をすることが予想される。そして【図24】【図25】【図26】から、角の三等分線の証明を例のように2段階に分けて次のように進めていこう。

- ・折り紙の対辺同士は平行になっているから、平行線の錯角が使える。
- ・折り紙の性質によって、点Oと点Pを折り重ねた時の折り目の線 l は、線分OPに対する垂直二等分線になっているから、直線 l とOYも平行になっている。
- ・折り紙を折ることによって、折り紙の性質が使えるから、折り目の線に着目して考えてみよう。
- ・ $\triangle QOD$ と $\triangle QO'D$ は折り紙の性質を使って、合同な三角形であることが言えそう。
- ・補助線を引いたり折り紙の向きを変えたりすることで、二等辺三角形が見つけれられる。

- ・折り紙の性質が成り立てば、長さや角が等しいところが多くある。
- ・結論である3つの角が等しいということは、これまで証明してきていないからどのように証明すればよいのだろう。
- ・これまでの証明と同じように、2つの角が等しいことを証明していき、2回に分けて証明すれば3つの角が等しいということが言えそうだ。 など

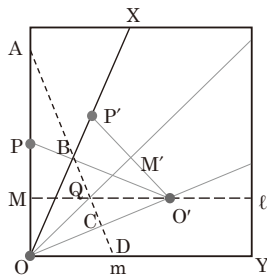
㉗ $\angle QOO' = \angle YOO'$ が等しいことを証明する



【図24】

(証明の例 その1)

平行線の錯角から、 $\angle QO'O = \angle YOO'$ ①
 点Oと点O'を折り重ねているから、線分OO'に対して折り目mが垂直二等分線になっている。よって、垂直二等分線上にある点Qと線分OO'を結んだ $\triangle QOO'$ は二等辺三角形になることが言える。
 二等辺三角形は底角が等しいから、
 $\angle QOO' = \angle QO'O$ ②
 ①, ②から、 $\angle QOO' = \angle YOO'$



【図25】

(証明の例 その2)

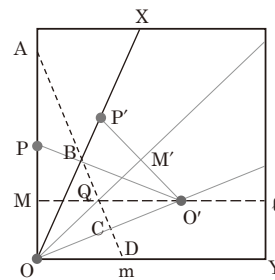
$\triangle QOC$ と $\triangle QO'C$ において、点Oと点O'を折り重ねているから、折り紙の性質によって線分OO'に対して折り目の線mが垂直二等分線になるため、
 $OC = O'C$ ①,
 $\angle OCQ = \angle O'CQ = 90^\circ$ ②
 QC は共通 ③
 ①, ②, ③から2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから、 $\triangle QOC \equiv \triangle QO'C$

次に、 $\triangle QO'C$ と $\triangle DOC$ において、折り紙の性質から $O'C = OC$ ④
 対頂角は等しいから $\angle QCO' = \angle DCO$ ⑤
 折り目 $l \parallel OY$ より平行線の錯角は等しいから
 $\angle QO'C = \angle DOC$ ⑥
 ④, ⑤, ⑥から1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから、 $\triangle QO'C \equiv \triangle DOC$

$\triangle QOC \equiv \triangle QO'C$ と $\triangle QO'C \equiv \triangle DOC$ から
 $\triangle QOC \equiv \triangle DOC$ もいえる。

対応する角が等しいから、 $\angle QOO' = \angle YOO'$

㉘ $\angle QOO' = \angle BOQ$ が等しいことを証明する



【図26】

(証明の例)

$\triangle O'PO$ において、
 直線 l は折り目の線なので、折り紙の性質より $\triangle O'MP \equiv \triangle O'MO$ となる
 対応する角はそれぞれ等しいから、
 $\angle PO'M = \angle OO'M$ ①
 次に、直線 m は折り目の線なので、折り紙の性質から $\triangle QOO'$ と $\triangle BOO'$ は二等辺三角形になる
 2つの底角は等しいから、
 $\angle QOO' = \angle QO'O$ ② $\angle BOO' = \angle BO'O$ ③
 ②, ③から $\angle BOQ = \angle BO'Q$ ④
 ①, ②, ④から $\angle BOQ = \angle QOO'$

㉗, ㉘より $\angle YOO' = \angle QOO' = \angle BOQ$
 よって、任意の角の三等分線が成り立つ。

複雑な図形であるため、どのように証明を進めていけばよいか、補助線をどのように引けばよいか、二等辺三角形がどこにあるかなど子どもたちが疑問やとまどいをもつ点はたくさんあるだろう。授業者は、補助線を引いてみようとしたり、注目する三角形を色分けしたりしようとしている子どもを賞賛し、粘り強く取り組むことができるよう丁寧に声をかける。
 証明ができた子どもが出てきたところで、グループ

内で共有していく。まわりの子どもに今の証明で理解できたか、証明の根拠は明確だったかと問い返すことで、より誰もが納得できる証明へと深めていきたい。さらに、全体への共有をしていくことで、多くの子もたちの理解へとつなげていきたい。

角の三等分線の証明を終えて、子どもたちは以下のように追究の記録を書くだろう。

- ・証明は補助線をひくことで新たな三角形や合同な三角形を見つけることができ、最初には見えなかった三角形を見つけ、それをもとに証明することができた。そのままでは証明することができない図形の時には、補助線を引いて新たな形を見いだして証明できるようにしていきたい。
- ・折り紙の向きを変えることで、「ここにも二等辺三角形がかくれている」と気づくことができた。図形はそのままの向きで見るだけでなく、見方を変えたり着目する図形を変えたりすることで図形の新たな性質を見いだすことができる。
- ・長さや角の大きさが等しいところを折り紙に書きこむことで、イメージがもちやすくなった。これからの証明でも、仮定や根拠となる図形の性質をかきこみ、視覚的にとらえやすくしていきたい。
- ・グループで共有することで、自分では見つけることができなかつた性質にも気づくことができ、最後まで証明することができた。
- ・グループの人たちに説明するとき、みんなが納得する説明をすることが難しかった。なぜ等しくなるのかなど根拠を明確に説明することでみんなが納得した説明をすることができた。
- ・ 90° よりも大きい鈍角の三等分線も同じような方法でできるのかやってみよう。
- ・作図ではできないことが折り紙を折ることでできるようになるということはすごいと思った。折り紙では角の三等分線を折ることができるならば、角の五分分線とかもできるのか追究してみよう。など

そして、子どもたちは角の三等分線が折り紙で折れることの証明を通して、命題が分かりづらい複雑な証

明をしていく際に命題化や結論を明確にするなど、どのように進めていくのがよいか気づいていこう。授業者は「複雑な図形の証明でも、誰もが納得できるような証明にするためにはどのようなことを大切にしていけばよいか」となげかけ、題材の振り返りとして追究の記録を書くように伝える。すると、子どもたちは以下のような考えをもつだろう。

- ・角度を測ったり折って重なったりすることを言うだけでは、誰もが納得する証明にはならない。どんな場合でも成り立つことを言うためには、辺や角が等しいことについて根拠を明確にして証明することが大切である。
- ・仮定と結論は何か、どのような流れで証明すればよいかなどを証明するためには見通しをもって進めることが大切だと思った。
- ・平行線の錯角や二等辺三角形の性質など、これまで学習してきたことが証明する図形のどこにひそんでいるのかを、様々な見方をして見つけることで、証明しやすくなったと感じた。
- ・折り紙の向きを変えて考えたように、証明をする時には図形をいろいろな視点でとらえることで見えないものが見えてくるから、複雑な図形でも多角的に図形をとらえることを大切にしていきたい。
- ・作図では不可能だから、複雑な図形だからなどできないと決めつけるのではなく、粘り強く考えることが大切だと思う。 など

本題材で、図形を様々な視点でとらえたり、筋道を立てて根拠を明確にしたりしながら証明することを通して、これまでの性質をつなげて新たな定理を見出すなど、図形に対する概念が再構築していくことを期待したい。そして、これから学習する四角形や中学3年生の相似な図形、円の学習でも、本題材での学びをつなげていくことを願いたい。さらに、本題材の学習を発展させ角の五分分は折り紙で折ることができるのか、折り紙を使った他の定理はどのようなものがあるのかなど、次なる追究課題に夢をふくらませて本題材を閉じる。

参考文献：阿部 恒 (2003)『すごいぞ折り紙 折り紙の発想で幾何を楽しむ』日本評論社
 芳賀和夫 (2005)『オリガミクスⅡ【紙を折ったら、数学が見えた】』日本評論社
 森北博巳 (2014)『折紙の数学 ユークリッドの作図法を超えて』森北出版
 岡本和夫, 森杉馨, 根本博, 永田潤一郎 他
 『未来へひろがる 数学 指導書 第1部 通論』新興出版社