代数学習におけるシンボルセンスの育成を促す活動

Activities to foster Symbol Sence in Learning School Algebra at Secondary School Grade

両　角　達　男
Tatsuo MOROZUMI

（平成16年10月4日受理）

1．文字式を読むことを重視した授業実践から、経験的に得られること

「文字式の意味や構造を洞察すること」は、文字式の学習を深める上で重要な役割を果たしている。例えば、$7^2-1=8\times6$、$9^2-1=8\times10$、$11^2-1=8\times15$、…のように「任意の奇数の平方から1を引いた数は必ず8の倍数となること」は、次のように文字式を用いて示すことができる。

〈8の倍数となることの証明〉

$2n+1$を奇数とおくとき

$$\begin{aligned}(2n+1)^2-1&=4n^2+4n\\&=4n(n+1)\end{aligned}$$

$n(n+1)$は連続する2つの整数の積であるので、必ず2の倍数となる。

よって、$4n(n+1)$は8の倍数になっている。

ここで8の倍数となることを見抜くためには、4×（整数）の式の形に着目すること、4×（整数）の形に向けて因数分解を行うこと、式変形によって得られた式の意味を解釈しようとすること、$n(n+1)$が連続する整数の積を表すことを読むことが必要である。また、8の倍数であることが直接見えなかったとしても、8の約数が文字式の中に現れるように、意図的に式変形を行おうとする姿勢も必要である。同様の活動を経ることによって「nが任意の正の整数であるとき、n^5-nが30の倍数となること」や「x，y，zが正の整数で$x^2+y^2=z^2$ならば、xまたはyは4の倍数となること」などの性質を導くことができる。

例えば、前者の数の性質は次のようにして、文字式を用いて示すことができる。

〈n^5-nが30の倍数となることの証明〉

$$\begin{aligned}n^5-n&=n(n^4-1)\\&=n(n^2-1)(n^2+1)\\&=n(n-1)(n+1)(n^2+1)\quad\cdots\ ※\end{aligned}$$

$n(n-1)(n+1)$は連続する3つの整数の積であるので、必ず6の倍数となる。

任意の正の整数nは5を法とする剰余類に分けると、5k、5k＋1、5k＋2、5k＋3、5k＋4の5通りに分類される。（kは0あるいは正の整数）それぞれ場合分けをして考える。

（ア） $n=5k$ のとき、※は5の倍数となる。
（イ） $n=5k+1$ のとき、$n-1=5k$ ゆえ　※は5の倍数となる。
（ウ） $n=5k+2$ のとき

$$
\begin{aligned}
n^2+1 &= (5k+2)^2+1 \\
&= 25k^2+20k+5 \\
&= 5(5k^2+4k+1)
\end{aligned}
$$

n^2+1 は5の倍数であるので、※は5の倍数となる。
（エ） $n=5k+3$ のとき

$$
\begin{aligned}
n^2+1 &= (5k+3)^2+1 \\
&= 25k^2+30k+10 \\
&= 5(5k^2+6k+2)
\end{aligned}
$$

n^2+1 は5の倍数であるので、※は5の倍数となる。
（オ） $n=5k+4$ のとき、$n+1=5(k+1)$ ゆえ5の倍数。だから※は5の倍数である。
いずれの場合にも、※は5の倍数となる。5と6は互いに素なので、※は30の倍数となる。

上記のいずれの場合も、事象に即して文字式に表現することのみならず、目的に向けて文字式を変形すること、文字式の形やその構成要素に着目して文字式の意味を読みとること、式変形によって得られた式の意味をさらに読み込むことが行われている。文字式を読む活動の強調であり、文字式の意味や構造を洞察することともいえる。

両角（1998）は、筑波大学附属中学校において、文字式を読むことを重視した同一生徒に対する3年間に渡る継続的な授業実践を行っていた。その授業では、次の①～④の学習活動が行われた。

また、一連の授業の前後では、文字式を読むことに関して変容が生じるように学習活動が行われていた。

① 台形の辺上に並んだ碁石の総数を求める場面で、他者の作った式の意味を式の形や特徴的な数に着目して考え、説明する。

図を分割したり、規則的に段数を変化してできる「碁石の総数」の変化の仕方に着目して、ある段数のときの碁石の総数を求めることができる状態。	変容 ⇒	他者の作成した式（数式、ことばの式、文字式）の意味を考える中で、「式の形と図の分割の仕方」が対応していたり、特徴的な数や演算が図の上での操作に対応していることを認識する状態。

② $4x+8y=12xy$ という計算ができるかどうかを判断する場面で、$4x+8y$ の式の意味を説明する。

$4x+8y=12xy$ という計算はいつも成り立たないということを感じつつ、成り立たないという明確な理由を生徒自身の中で十分に出すことができない状態。	変容 ⇒	$4x+8y=12xy$ という計算と $4x+8x$ という計算を対置して、同じ文字の場合と異なる文字の場合を比較しながら、$4x+8y$ の計算の結果が $4x+8y$ それ自体であることを説明できる状態。

③　正方形を２枚重ねてできる図形の面積を表す文字式から、どのようにしてその面積を求めたのかを説明する。

図に補助線を入れたり、x や y を具体的な数の場合のことをもとにしながら、正方形を重ねてできる図形の面積を求めることができる状態。	変　容 ⇒	他者の作成した文字式の形や構成要素に着目して、図形と対応させながら文字式の背景にある他者の思考過程を想定することができる状態。 また、文字式の形に「考え方」を込めることができる状態。

④　100 に近い２数の積を簡単に求める方法、123123、357357、851851 などの数に共通する性質を、他者が納得するように伝える。

数や数式に成り立つ性質を、条件を満たすいくつかの場合から帰納的に、あるいは類推的に考え、その性質をことばを用いて説明しようとする状態。	変　容 ⇒	数や数式に成り立つ性質とその根拠を事象に即して文字式に表し、その意味を解釈しようとする状態。また、事象に応じて、当初は見出すことのできなかった意味を見出そうとする状態。

例えば、④の「100 に近い２数の積を簡単に求める学習活動」では、100 との差に着目する、展開して得られた式を「100 倍された部分は２数の積の、上２桁を表す対象」ととらえる、カッコや演算記号を用いて 100 倍されている部分を「２数との関係がみえるように同値変形してその意味をとらえる」（他の方法を見出す）などが行われる。

$$(100-a)(100-b)$$
$$=100\{\underbrace{100-(a+b)}_{\text{2数の積の上2桁}}\}+\underbrace{ab}_{\text{2数の積の下2桁}}$$
$$=100\{\underbrace{(100-a)+(100-b)}_{\text{2数の和}}\ \underbrace{-100}_{-100}\}+\underbrace{ab}_{\text{2数の積の下2桁}}$$
$$=100\{\underbrace{(100-a)-b}_{\text{一方の数}-100\text{と他方の数との差}}\}+\underbrace{ab}_{\text{2数の積の下2桁}}$$

「100 倍された部分は２数の積の上２桁を表す対象」ととらえることは、文字式の形や構成要素に着目し、文脈に即してその意味をとらえる活動である。「２数との関係がみえるように同値変形してその意味をとらえる」とは、同値な文字式を想定し、文脈に応じて適切な文字式の形を選び、発展的に思考を進める活動である。この場合、後者に関しては２数の積の上２桁の部分が、多様な方法で導くことができる。97 × 92 の場合を例にとれば、100 －（3 ＋ 8）、97 ＋ 92 － 100、97 － 8、92 － 3 などである。複数の方法で求めようとすることにより、２数の積を求める場面の意味や構造を洞察しようとする姿勢が高まる。

また、一連の授業実践を通して、①～④の学習活動を促すために、大切にしたいことを４点挙げた。

○文字式の形に着目させること

○生徒の論理を大切にした議論と、その生徒の論理を定式化すること

○生徒の発言のよりどころを明確にすること
○文字式の活用による有用性を実感できる場を設定すること

例えば、②に関する授業の中で、次のような特徴的な発言が生徒から挙げられている。

ア. 4x + 8y というもとの式から、+が抜かれてかくと 4x8y となる。
そうするとかけることになるから、32xy。
実際の答えは、12xy よりも大きくなるんじゃないかな。

イ. 4x + 8y の計算の結果が 12xy となるのは、次のようにして計算できます。
4x + 8x = 4 ÷ (1/x) + 8 ÷ (1/x) と考えます。
この式は、ちょうど分数でわるときに逆数をかけたことから、その逆の計算をしています。
そうすると、分母が 1/x で同じになります。だから、足し算の計算をしてもよく、
12 ÷ (1/x) となります。　これをもとに戻せば、12x です。
ところが、4x + 8y の場合はそうはいかないのです。
4x + 8y = 4 ÷ (1/x) + 8 ÷ (1/y)
と同じように分数にすると、分母が 1/x と 1/y になって計算できません。
1/2 + 1/3 を通分して計算するように、1/x と 1/y を同じようにしたんだけれど、x と y はどうやっても変わらないから計算できません。

ウ. 4x + 8y という式で、8y = 4 × 2y、2xy = 4 × 3xy となる。
2つの式がそれぞれ面積を表すと仮にしても、2y と 3xy を比べると、3xy の方が大きくなる。
例えば、x の値が1のときをみたって、2y と 3y を比べれば 3y の方が大きい。また、2y は1次式だけど、3xy の式は2次式だから違っている。

アは省略の仕方への着目、**イ**は分数の計算への帰着、**ウ**は図の計量の場面を想定することより、4x + 8y = 12xy の計算ができないことを説明している。4x + 8y = 12xy という式を提示した背景には、4x + 8y はこれ以上簡単にすることのできない形であること、演算記号が文字式の中に残る場合があることを強く意識させる意図がある。4x + 8y を過程と対象の二面からとらえることに他ならない。閉じないことに対する不安 (lack of closure) の解消に向けた試みともいえる。4x + 8y = 12xy という違和感のある場の提示により、文字式の中の演算記号の意味への注目が生じる。

また、**イ**の発言に対しては、分数の加法においては「分母をそろえること」が計算のよりどころになることや、x や y に具体的な数値を代入して「文字式と数式との関連を図ること」による生徒の論理の定式化が行われていた。

これらの学習活動は、「文字式の意味や構造を洞察すること」を促す活動といえる。

この「文字式の意味や構造を洞察すること」に関して、シンボルセンスの育成という観点から Arcabi、Drijvers らが継続的に研究を進めている。文字式を読むことを重視した継続的な授業実践を礎にし、本稿では理論的な見地からの分析を行う。具体的には、Arcabi、Drijvers によるシンボルセンスの育成に関わる先行研究に焦点をあて、シンボルセンスとその育成を促す活動に関わる知見を抽出する。

2．研究の目的と方法

本研究の目的は、シンボルセンスとその育成を促す学習活動について、Arcabi、Drijvers の先行研究に焦点をあて、彼らの理論的な考察より知見を得ることである。Arcabi の論文がシンボルセンスに関わる論文に数多く引用されていること、Drijvers の論文ではシンボルセンスを含むいくつかの理論

的な柱が立てられ、その柱の融合を図ろうとしていることが、2人に着目した理由である。本稿では、特にArcabiの2つの論文（1994，2003）、Drijversの学位論文（2003）に焦点をあて、シンボルセンスに関わる知見を抽出するという研究方法をとる。

3．Arcabiのとらえるシンボルセンス

Arcabi（1994）は、シンボルセンスが使われている活動の例示、その活動に共通する特徴の抽出を通して、シンボルセンスとは何かを次のa～gのように示している。語の使われ方の規定を通して、語の意味を明確にする立場である。

a．関係や一般性を表すために、いつ、どのようにして記号を用いるかの理解とその記号の力に対する美的感覚。

b．問題に対する見方を深め、より簡単でエレガントな解法や表現を得るため、いったん記号を置き去り、他の表現や方法を選ぶ感覚。

c．文字式を変形せずに読む、文字式を読んだ後に変形する、文字式の変形によって得られた結果を読む、妥当性を得るために文字式を読む、多様な見方で文字式をみることにより文字式の変形に役立てるなど、代数の問題を解く上で重要な役割を果たす2つの側面としての、文字式を変形する能力と文字式を読む能力。

d．言語やグラフによる情報が、文字式で表された関係を見出す上で有効に働くことの気づき。さらに、必要に応じてそれらの表現をうまく扱える能力。

e．問題場面に応じて文字式を選択し、可能な限り選択した文字式をより問題場面に適したものに取り替えようとする能力。

f．問題解決の間に、文字式の意味を継続的に確認する必要性や、その問題に対して抱いた直観あるいは予想との比較を行う必要性の感覚。

g．異なる文脈の中で、記号は異なる役割を果たすという感覚。

例えば、上記cの文字式を変形せずに読む事例として、1次方程式$3x+5=4x$の解を得るために、機械的に両辺から$3x$をひくという手続きをとらない解法（左辺を$4x$にするために$4x=3x+x$とみる）が挙げられている。文字式を読んだ後に変形する事例として、$(2x+3)/(4x+6)=2$を解く場面、文字式の変形によって得られた結果を読む事例として、整数nに関してn^3-nはどのような数になるかを求める場面が挙げられている。

また、上記gの事例としては、直線を表す関係式$y=mx+b$に対し、$y=b$が文脈に応じて2通りに解釈できることや、3点(a,b)、$(-a,b)$、$(0,0)$を通る円の中心の座標を、立式した文字式の意味に着目して求めることが挙げられている。

前者では、$y=m\times 0+d$とみれば直線のy切片（1点）を表し、$y=0\times x+d$とみれば直線$y=d$となる。後者では、円の方程式$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$に、円周上の3点を代入した式がそれぞれの意味を表すとともに、y軸について対称な2点に関わる式は対称式の関係にある。いくつかの式を比較させ、違いを踏まえつつ、共通点をみつけることが問題解決につながる。

活動の例示、その活動に共通する特徴の抽出によって、シンボルセンスを規定しようとする方法は、Fey（1990）によるシンボルセンスの規定にならっている。Feyの場合には、ナンバーセンスの主要な要素として「実世界の数量についての広い知識」「大きさの程度を素早く近似する能力」を挙げ、ナンバーセンスとの類似性と相違点に着目しながら、次のようにシンボルセンスにあたる活動を例示して

いる。

〈Fey の掲げるシンボルセンス〉

ア．数値またはグラフによる表現に表れるパターンを概略的に推定するために、代数式を綿密に調べる能力。

イ．n、n^2、n^3、…の形の関数とk^nの形の関数について、大きさの程度がよくわかって比較する能力。

ウ．関数値の表またはグラフを綿密に調べたり、言葉で述べられた条件を解釈したりする能力と、適切なパターンを表しそうな代数式の形を突き止める能力。

エ．代数計算を検査し結果の形を予測する能力。
あるいは算術の見積もりのときのように、結果を検査して計算が正しく実行されたかどうかの程度を判断する能力。

オ．いくつかの同値な形のどれが、ある特定の問いに最も適切かを決める能力。

例えば、エでは一次式と二次式の積が三次式であることを瞬時に判断すること、オでは多項式を因数分解した形からは、多項式＝0という方程式の解を導きやすいが、微積分の計算を行う上では違う形を選んだ方が計算しやすいと判断することなどである。また、イの活動は、ナンバーセンスとシンボルセンスの橋渡しをし、コンピュータ科学の中心になる能力になる、と Fey は述べる。

Fey や Arcabi のとらえるシンボルセンスは、シンボルのとらえ方を含めて広範囲である。

しかし、Arcabi らの掲げる前述の a ～ g の事柄から、次の2点がさらなる共通点としてあがる。

① 文脈に即して文字式の意味が規定されることを意識しながら、文脈により適した文字式（記号）表現を行い、その妥当性を継続的に確認（内省）していくこと

② 文字式を読むことと文字式を変形することを関連させながら、意図や目的をもって活動を進めること

①と②、および a ～ g に関わる事例に色濃くみえるのは、シンボルセンスにおける「文字式の意味や構造を洞察すること」の強調である。

4．Arcabi のとらえるシンボルセンスの育成を促す学習活動

Arcabi（1994）は、シンボルセンスの育成を促す学習活動に関して、次のように述べる。

- 形式的な手続きを覚え適用する、という信念を打破するために、文字式の変形がいつ、どのように行われるかを学べる豊かな学習場面が提供されること。
- 文字式の導入段階では、算術的な現象を一般化したり、正当化を試みる中で文字式を用いて表現するよさを味わうことや、算術的な現象における構造と文字式とを照らし合わせることが必要なこと。
- グラフ電卓などのコンピュータを活用して問題を考察し、コンピュータにより提示されたものと生徒自身の抱く考えとの関連をできる限り、豊かにつけていくこと。
- 生徒の洞察力を高めたり、生徒の感性を高める（Sense-making）議論を行うこと。
  例えば、シンボルの役割やその扱い方に関して、それは一般的にいえることなのか、特殊な場合のことなのか、記号を変えたらどうなるのかなどの問いの連鎖により、議論を深めていくことである。
- 問題解決過程を振り返り、分析する姿勢が生徒独自でできるようにすること。
  例えば、文字式を活用した解法と文字式を使わない解法（長方形の周上に並んだれんがの総数

を文字式を用いて表すこと、折り紙を折り込むことを連想し、重複を踏まえて対応づけることなど）との比較と関連づけを議論すること。

Arcabi が掲げた、シンボルセンスの育成を促す学習活動で注目されるのは「生徒の洞察力を高めたり、生徒の感性を高める議論を行うこと」である。その理由は、Arcabi が継続的に Sense-making や Insight という語に着目して、論を進めているからである。

最近の Arcabi の論文（2003）では、シンボルセンスと対峙させながら視覚化が論じられる。論稿の中では「みえないものをみること」「みえないものを予見すること」に着目し、視覚化がシンボルセンスを導き、支えていることを事例を踏まえて説明している。例えば、次のようなことが指摘される。

- 「みる」ことを視界の中に何が入ったかだけではなく、何をみることができるかでとらえたい。視覚化の特徴とその重要性は、名詞としての所産と、動詞としての過程や活動との双方の側面がある。さらに、視覚化は、みえないものをみる方法も示す。
- 例えば、$a/b < (a+c)/(b+d) < c/d$ という正の分数に成り立つ性質は、a/b が座標平面上において原点と点（b, a）を結ぶ直線の傾きを表すと考えると、視覚的にその理由が説明できる。（平行四辺形の隣り合う2辺の間に、対角線の傾きが位置づけられる）
  この視覚的なイメージは、記号を用いての思考や説明を促し、補い、その意味を与える。
- マッチ棒を縦横 n 本ずつ並べ、□の形を連続的につくる。数えやすい単位をつくる、格子点に着目する、もとの形を分解しわかりやすい形に再配列する、補助線を用いて規則性に着目する、など多様な見方を通してマッチ棒の総数を求めることができる。多様な見方による図の分解、再配列などが文字式の形に対応し、その意味をつくる。
- 例えば、3本の平行な直線に対してどのような文脈を設定するかにより、そのみえ方や意味は変わる。文脈はみる人の観点による。そこに視覚化に関わる困難性がある。

両角（1998）の行った「正方形を2枚重ねてできる図形の面積を表す文字式から、どのようにその面積を求めたのかを説明する」という授業では、文字式の形と分解、再配列をした図形とを対応づけ、思考過程（式の意味）を想定していた。一般的なものと参照的なものとの行き来であり、そこにシンボルセンスと視覚化が関連しあって働いている。みえないものをみようとする視覚化と類似の活動が、シンボルセンスの育成を促している。

一方、シンボルセンスと視覚化との関係に関しては、具体例と生徒の実態を踏まえたさらなる追求が必要である。

5．Drijvers のとらえるシンボルセンス

Drijvers（2003）は、コンピュータ（グラフ電卓）を用いた代数学習環境の中で、中学校から高等学校への接続にあたる代数学習がどのように行われ、理解が深まっていくかを考察している。その理論的な枠組みとして、RME 理論における水平的数学化と垂直的数学化への着目、Gravemeijer による4つの数学的活動の分類に van Hiele のレベル理論を融合させた「参照的なレベルから一般的なレベルへの移行」への着目、シンボルセンスとシンボル化の原理、過程と対象の二面性原理などの融合を提唱する。Drijvers は、パラメータの概念がコンピュータを用いた学習環境の中でどのように育成され、理解され、変容していくかに焦点をあて、周到な研究を行っている。多くの知見を得ることが期待できる研究である。本稿では Drijvers が「シンボルセンスとシンボル化の原理」を理論的な枠組みの一

つに挙げていることに注目し、その言明からシンボルセンスに関わる知見を得ることとする。

Drijvers はシンボルセンスを「文字式の意味や構造を洞察すること」と、とらえている。その理由として、次のことを挙げている。

- 例えば、$5 \cdot (2z+1) = 10$ のときの、$(2z+1)/2$ の値はどうなるかという問いに対して、$2z+1$ を対象として考察すること、すなわち全体的で、多様な見方により文字式をとらえることができれば、z に関して変形するという大変な計算をしなくてもよい。
  このような見方は、文字式を具象化してとらえることであり、文字式の構造を見通すことである。また、下位の文字式（構成要素）を実体としてとらえることである。
- 文字式の構造を見通すことよりも、文脈に即して意味を与えることの方が、生徒にとって達成しやすいと考える。それゆえ、シンボルセンスを「文字式の意味や構造を洞察すること」と制限してとらえる。
- シンボルセンスの解釈は、例えば同値な構造をもつ文字式を柔軟に、創造的に使えるかの能力に焦点をあてた、構造の感覚の概念に密接に関連している。
- シンボル化の原理は、一方では「シンボル、モデル、表記」による再帰的な関係から始まり、他方では「有意味で内的な対象の構築」から始まる。このシンボル化の過程に、シンボルと意味とを結びつけることが含まれる。

これらの言明より、文字式の構造を洞察することには構造の感覚（Structure sense）を持つこと、文字式の意味を洞察することにはシンボル化過程が深く関わっているといえる。

6．Drijvers のとらえるシンボルセンスの育成を促す学習活動

Drijvers は8学年と9学年の生徒に対する、コンピュータによる代数学習（CAS）の環境での学習活動の分析を通し、「文字式の意味と構造を洞察すること」について次のような効果があったと指摘する。

① 生徒の手による文字式変形の誤りを、CAS による文字式変形とその結果の表示が気づかせ、文字式の構造をとらえ直す契機を得ること。また、手計算によって得られた文字式と CAS により表示された文字式を比較し、同値な式の形をとらえ直す契機を得ること。

例えば、次のように過度に式変形を行ってしまう行為に対して、生徒に「その式変形でよいのだろうか」「この式はこれ以上変形できない式なのではないだろうか」などの内省を促すきっかけを与える。なお、次の式変形は、いずれも Drijvers による CAS を用いた教授実験の中で生じたものである。

$x^2+y^2=25$ を　$x+y=5$ とすること
$1/f=1/v+1/b$ を　$f=v+b$ とすること
$(x-2)^3$ を　x^3-8 とすること
$x^2-4x+5=ax-2$ を　$x-4x+7=a$ とすること
$1/2a^2+1/2b^2$を　$a+b$ とすること

また、$b+h=s$、$b-h=v$ というパラメータ表示された連立方程式を解く場面で、
手計算により得られた解　$b=(1/2)\cdot s+(1/2)\cdot v$　と
CAS により表示された結果　$b=(s+v)/2$

とを比較し、改めて同値な式の形として捉え直すこと。

② パラメータに着目し、文字式を連続的なグラフとして表示した際に現れる現象をみることにより、改めて文字式の意味を詳細にとらえ直すこと。

例えば、$y=(x-a)^2+a$ の式に対して、a をパラメータとして連続的にこの式をグラフに表すと、(a, a) を頂点とするグラフが次々と表示されていく。その現象をみて、$x=a$ のときの y の値は a になると予想をし、$x=a$ のときの y の値は必ず a になると文字式での意味をとらえる。なお、これは $y=(x-a)^2+a$ に $x=a$ を代入すること、代入を通して得られた式の値の意味を、グラフ表現という文脈に即してとらえることである。

③ 方程式の解を考察の対象として、とらえること。特に、パラメータ表示による方程式の解を求める場面では、変形して得られた文字式の意味を解釈できるような文脈が設定されていると、考察の対象としてとらえる動機づけになる。

例えば、レンズの公式 $1/f=1/v+1/b$ を b について解き、その式の意味を文脈に即して解釈することである。なお、RME 理論に基づいて問題場面が作成されているため、レンズの公式の意味をとらえる場面も現実性を感じさせる工夫がなされている。

④ 文字式、あるいは文字式の一部を置き換えることを CAS の使用において促す、あるいは生徒が文字式をかたまりとして意識している際に頻繁に使うことばに着目し、そのことばとの対比により文字式の構造をとらえること。

例えば、平方根の中にある文字式に対して、“that square root thing”と盛んに呼んだり、“that thing” と書くことが多かった。また、$1/4s^2-a^2=p$ の式を a について解く場面で、CAS により表示された条件 $s^2-4p\geqq 0$ をみて、s^2-4p を 1 つの対象として、置き換える式の対象としてとらえる見方が深まった生徒の例が提示されている。

①から④の活動は、紙と鉛筆の上で行ったことと CAS を用いて行ったこととの相違、みかけ上の相違、CAS の上で生じた現象に対する驚きなどがきっかけとなり、文字式の意味や構造を洞察することを促している。

Drijvers は、同時に CAS の活用による負の部分も、次のように挙げている。

- CAS を用いて現実的な問題場面を扱うことは、文字式のパラメータの意味を有意味なものにしたり、生徒の動機付けを高める。その一方、特別な場面を乗り越えて、数学的に意味のある一般化や抽象化ができにくくなっている。(高学年になると徐々に克服されていく)
- パラメータを一般化された数 (generalizer) として、さらに未知数 (unknown) として理解することはゆるやかなスピードで行われる。それは、シンボルセンスの欠如と密接に関わっている。また、シンボルセンスの欠如により、いくつかの場合で、パラメータのある文字式を用いた操作や意図のある式変形ができなくなっている。

7．まとめと今後への課題

本稿では、シンボルセンスとその育成を促す学習活動について、Arcabi、Drijvers の先行研究に焦点をあて、そこから得られる知見を抽出してきた。シンボルセンスに着目した背景には、文字式を読むことを包含し、シンボルセンスの育成が文字式の学習において重要な役目を果たすからである。

Arcabi、Drijvers の言明より、シンボルセンスの中核をなすものとして「文字式の意味や構造を洞察すること」が考えられる。特に、構造、洞察という用語に関連して、構造の感覚、視覚化などシンボルセンスをとらえる上で必要な概念が浮かび上がる。シンボルセンスの育成を促す学習活動では、意味の洞察、構造の洞察に関わることとして、みえないものをみようとする視覚化と類似の活動、コンピュータによる代数学習における、文字式を対象とみておきかえる活動、方程式の解を対象とみる活動、パラメータに着目して文字式をとらえなおす活動などが挙げられる。

今後の課題は、次の通りである。

- Drijvers の論稿を関連する論稿を踏まえてさらに分析し、文字式の意味や構造を洞察するための学習活動とその理論的背景を明確にする。
- 具象化を促すことと、シンボルセンスを促すこととの関係について、先行研究から知見を抽出する。
- CAS を活用した中等学校段階の代数学習の研究動向について、Arcabi、Drijvers、Kieran などの成果と課題を抽出すると共に、その実態に関して静岡市内の公立中学校・高等学校と連携を図って調査を行っていく。
- シンボルセンスの育成を促す一連の教授・学習過程について、範例的教授・学習理論の視点との融合を検討する。そのため、次の２つの論稿の知見からみた、シンボルセンスの育成を促す教授・学習過程のあり方を考察する。
  "Why Teach Mathematics? A Focus on General Education", Hans Werner Heymann, Mathematics Education Library Volume 23, Kluwer, 2003
  "Teaching as a Reflective Plactice, The Germann Didaktik Tradition", Westbury, Hopmann, Riquarts, LEA, 2000

【附記】本論文は、「シンボルセンスの育成を促す学習活動に関する研究」（第37回数学教育論文発表会論文集論文、日本数学教育学会、2004）を加筆・修正し、作成したものである。

なお、本研究は、平成14～16年度　科学教育研究費補助金　若手研究Ｂ「範例的教授・学習理論に基づく数学授業の教授と数学的活動に関する研究」（課題番号　14780098、研究代表者　両角達男）、平成16年度　静岡総合研究機構　学術教育研究推進事業補助金「４－４－４の相に着目した小中高一貫の代数カリキュラムに関する研究」（研究代表者　両角達男）の交付を受けて行われた研究成果の一部である。

【参考文献】

両角達男（1998）「「式を読む」ことを重視した文字式指導に関する研究」筑波大学附属中学校研究紀要，第50号，pp.51-80

笹部貞一郎編（1972）「代数学辞典」第二版，聖文社

Arcavi (1994). Symbol Sense, For the Learning of Mathematics, 14(3), pp.24-35

Arcavi (2003). The Role of Visual Representaitions in the Learning of Mathematics, Educational

Studies in Mathematics, 52, pp.214-241

Arcabi (1995). Teaching and Learning Algebra: Past, Present, and Future, Journal of Mathematical Behavior 14, pp.145-162

Ameron (2004). Reinvention of early algebra, Classroom-based Research in Mathematics Education, pp.47-60. Freudenthal Institute

Drijvers (2004). Learning algebra in a computer algebra environment, Classroom-based Research in Mathematics Education, pp.83-104. Freudenthal Institute

Editor: Drijvers (2004). Classroom-based Research in Mathematics Education, Freudenthal Institute

Drijvers (2003). Learning algebra in a computer algebra enviroment, Freudenthal Institute

Sfard (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflection on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin, Educational Studies in Mathematics, 22, pp.1-36

Lyn Arthur Steen 編，三輪辰郎訳（2000）「世界は数理でできている」丸善

三輪辰郎（1996）「文字式の指導序説」筑波数学教育研究第 15 号，pp.1-14

林　晃也（2003）「シンボルセンスに着目した文字式の学習に関する研究」全国数学教育学会誌 数学教育学研究第 9 巻，pp.97-108

酒井一馬（2003）「数学教育における数感覚の育成に関する研究（V）」全国数学教育学会誌 数学教育学研究第 9 巻，pp.71-80

川崎道広（2003）「図形感覚の認識に関する教授学的研究」全国数学教育学会誌，数学教育学研究，第 9 巻，pp.81-96

大谷　実（2002）「学校数学の一斉授業における数学的活動の社会的構成」風間書房

銀島　文・清水克彦（2002）「数感覚の育成に関する研究動向の整理と検討　一米国における数感覚に関する研究の動向分析一」日本数学教育学会第 35 回数学教育論文発表会論文集，pp.187-192