静岡大学教育学部研究報告（教科教育学篇）第36号（2005.3）101～116

中学との接続を重視した高等学校の幾何教育に関する研究
――ベクトルの指導に焦点を当てて――

A Study on Geometry Teaching at Senior High School which attach importance to connection of Junior High School
—focus on Teaching of Vector—

熊 倉 啓 之
Hiroyuki KUMAKURA

（平成16年9月27日受理）

1．はじめに

平成 14 年度中学校教育課程実施状況調査の結果によれば，次の合同条件を用いた図形の証明問題の通過率は，44.2%であった（国立教育政策研究所，2003）。

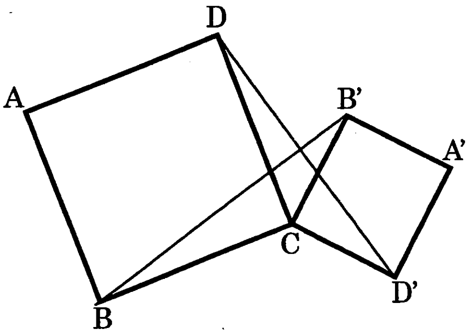
8 頂点 C を共有する 2 つの正方形 ABCD と正方形 A'B'CD'について，次の各問いに答えなさい。

(2) 右の図のように 3 点 B，C，D' が一直線上にないときにも，

BB' ≡DD'

という関係が成り立ちます。

その理由を□の中に書きなさい。

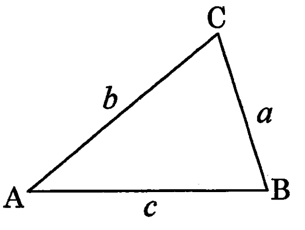


また，平成 15 年度高等学校教育課程実施状況調査の結果によれば，次の正弦定理の証明問題の通過率は，24.0%であった。

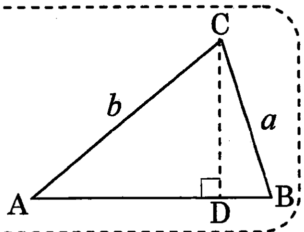
8 正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ を証明する授業で，

まず右の鋭角三角形 ABC について，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ が成り立つことの証明の仕方を考えています。

明さんは次のような考えを述べました。



右の図のように頂点 C から辺 AB に垂線 CD を引く。
CD の長さをもとにして考えれば証明できると思う。



明さんの考えを参考にして，鋭角三角形 ABC について，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ が成り立つことの証明を□の中に書きなさい。

正弦定理の上の証明は，多くの教科書で扱っているし，ヒントもあるので，その場で考えることはそれほど困難ではないと考えられるが，正答率は非常に低かった。ついでにいえば，この問題の無回答率は61.9%であり，多くの生徒がまったく手がつかない，あるいは手をつけようとしなかった，という実態が読み取れる。

これら2つの問題に対する正答率の低さの原因は何であろうか。中2における合同条件にもとづく証明問題や，高校の数学Iにおける三角比の正弦定理の扱いに，それなりに時間をかけて指導を行っているにもかかわらず，その成果は必ずしも表れていない実態が明らかになったといえよう。図形の証明問題に苦手意識を持ち，証明を記述できない中学生や高校生が，少なくないことがわかる。

また，学年の進行や学校段階の進行に伴い，学習内容への理解が深まり，能力も身についてくるのが一般的であるが，幾何の内容に関しては，中学と高校で，あまり変化しないようにさえ感じられる。

これらの結果は，幾何の指導のどこに問題があるのであろうか，あるいはカリキュラムのどこに問題があるのであろうか。特に，中学と高校の間で，うまく接続されていないのではないか。このような疑問が，本研究を始める発端である。

2．研究のねらい

現行の高等学校における幾何教育について，その指導上の問題点を分析し，中学との接続部分を重視するという視点から，高等学校における望ましい幾何教育のあり方を追究することが，本研究のねらいである。特に，本稿では，数学Bのベクトルに焦点を当てるものとする。

3．中学と高等学校の幾何の指導内容

まずは，幾何の内容全般について概観する。現行カリキュラムにおける中学と高校の幾何に関連する主な指導内容を，教科書の記述をもとにリストアップした。内容を，大きく「平面図形」と「空間図形」に分け，さらにそれぞれを「基本概念」「論証」「計量」「作図・軌跡」に分類した。この中で，「基本概念」には図形・用語の意味や性質，図形間の関係概念や定理を，「論証」には証明問題として扱っているものを，「計量」には，長さ，面積，体積，角度，比を求めるものを，「作図・軌跡」には作図題や軌跡を求めるものを含めた。なお，特に高等学校の場合は，扱っている内容が教科書によって違いが大きいが，少数の教科書で扱っている内容も入れることとした。結果は，次の表1，表2の通りである。

表1　平面図形の指導内容

平面図形	基本概念	論証	計量	作図・軌跡
中1	直線，曲線 平行，垂直，距離 円の弧，弦 線対称，点対称	(該当なし)	扇形の弧長・面積	基本作図 ・角の2等分線 ・垂直2等分線

中2	錯角，同位角，対頂角 合同， いろいろな三角形 いろいろな四角形 円周角の定理	合同条件による証明 円周角の定理の証明	多角形の角の和 円周角の定理の利用 ・円周角	(該当なし)
中3	相似 中点連結定理 三平方の定理 放物線（関数 $y=ax^2$）	相似条件による証明 三平方の定理の証明	平行線と線分の比 三平方の定理の利用 ・直角三角形の辺 ・三角形の面積	(該当なし)
数学I	正弦定理，余弦定理 平行移動（2次関数）	角の2等分線と比	三角比の利用 ・三角形の辺，角 ・三角形の面積 ・測量 相似な図形の面積比	(該当なし)
数学A	三角形の辺と比 重心,外心,内心,垂心 角の2等分線と比 チェバ・メネラウスの定理 円周角の定理の逆 内接四角形の性質 接弦定理 方べきの定理 2円の位置関係 背理法	定理・性質の証明 ・三角形の辺と比 ・重心，外心，内心，垂心 ・角の2等分線と比 ・チェバ・メネラウスの定理 ・円周角の定理の逆 ・内接四角形の性質 ・接弦定理 ・方べきの定理	定理を利用した線分の長さ，角の大きさ	(該当なし)
数学II	内分点，外分点 直線，円の方程式	中線定理 垂心	点と直線の距離 扇形の弧長，面積（三角関数）	軌跡 ・アポロニウスの円
数学B	(該当なし)	中線定理 垂心	三角形の面積	(該当なし)
数学III	サイクロイド	(該当なし)	だ円の面積	(該当なし)
数学C	対称，回転移動（行列） 相似変換（行列） 楕円，放物線，双曲線 サイクロイド，リサージュ，正葉曲線，カージオイド，渦巻線	(該当なし)	(該当なし)	(該当なし)

表 2　空間図形の指導内容

空間図形	基本概念	論証	計量
中 1	角柱，円柱，角錐，円錐 正多面体，回転体 平面 平行，垂直，ねじれの位置 展開図	(該当なし)	錐体の体積，表面積
中 2	(該当なし)	(該当なし)	(該当なし)
中 3	(該当なし)	(該当なし)	三平方の定理の利用 ・直方体の対角線 ・錐体の体積，表面積
数学 I	(正四面体) 相似 カバリエリの原理	(該当なし)	三角比の利用 ・測量 ・切断面の面積 相似な図形の体積比 球の体積，表面積 様々な立体の体積（面積公式の利用）
数学 A	(該当なし)	(該当なし)	(該当なし)
数学 II	(該当なし)	(該当なし)	微分の利用 ・立体の体積の最大
数学 B	2 直線のなす角 平行 6 面体	ベクトルの利用 ・四面体の性質 ・平行 6 面体の性質	(該当なし)
数学 III	(該当なし)	(該当なし)	立体の体積 ・回転体(球・円錐)の体積 ・円柱の一部分の体積
数学 C	(該当なし)	(該当なし)	(該当なし)

表 1，表 2 から，幾何の指導内容に関して，次のような特徴を挙げることができる。

ア．平面図形の論証については，中学と数学 A・平面幾何で初等幾何を，数学 II・図形と方程式で解析幾何を，数学 B・ベクトルでベクトルを用いた幾何について，それぞれ扱っている。同じ問題を，異なる分野で扱っているものとしては，次のものが挙げられる。

① 「垂心が 1 点で交わることの証明」　数 A：初等幾何，数 II：解析幾何，数 B：ベクトル

② 「中線定理の証明」　数 II：解析幾何，数 B：ベクトル

③ 「角と 2 等分線の比についての性質の証明」　中 3，数 A：初等幾何，数 I：三角比

イ．空間図形の論証については，数 B で，ベクトルによる方法をわずかに扱っている程度であり，初等幾何や解析幾何による扱いはほとんどない。

ウ．平面や直線の位置関係，平行と垂直の意味などについて，中１でまとめて扱うが，あとは数Ｂ・ベクトルで，２直線のなす角について扱う程度である。

以下では，高校の幾何教育の最終段階ともいえるベクトルの指導に焦点を当てることとする。

４．ベクトルの指導の変遷

高校でのベクトルの指導は，次のように1963年からスタートした。指導の変遷は表３の通りである。

表３　ベクトルの指導の変遷

指導年度	科目	必・選	タイトル	主な特徴
(1) 1963(S38)～	数学ⅡB	選択	三角関数とベクトル	目標にベクトルに関する記述なし
(2) 1973(S48)～	数学Ⅰ	必修	ベクトル	平面ベクトルの内容が必修
	数学ⅡB	選択	空間における座標とベクトル	
(3) 1982(S57)～	代数・幾何	選択	平面上のベクトル 空間図形	空間ベクトルに関する内容が最も豊富
(4) 1994(H1)～	数学B	選択	ベクトル	空間における直線・平面・球の方程式の内容が削除
(5) 2003(H15)～	数学B	選択	ベクトル	(4)と変更なし

次に，各段階において使用された教科書を可能な範囲で調査し，それぞれの段階での指導の特徴を分析した。

<u>(1)の段階</u>では，三角関数の中の一部に導入される程度で，科目の目標の中にもベクトルに関する記述はなかった。しかし，数学ⅡBの教科書を調べてみると，たとえば次のような構成となっている。(昭和41年度使用，大日本図書)

第３章　ベクトル
- １．ベクトルとその合成　1. ベクトル　2. ベクトルの合成　3. 射影(Ⅰ)　4. 射影(Ⅱ)　5. ベクトルの成分　6. 幾何への応用
- ２．ベクトルの内積　1. 内積　2. 平面上のベクトルの内積　3. 空間におけるベクトルの内積　4. 幾何への応用　5. 空間における平面の方程式

第４章　三角関数

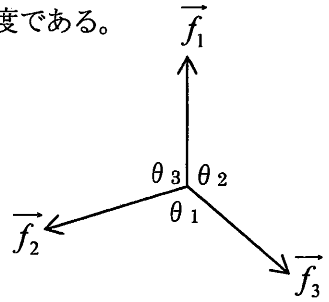
これを見る限り，実際の指導は，三角関数と切り離して，ベクトルを独立した単元として指導していたと予想される。複素数と合わせた章構成になっている教科書もあったが，内容は独立したものとなっていた。また，指導内容については，それ以降のものと共通する部分も多いが，相違点としては次の点が挙げられる。

・射影を取り上げ，$\mathrm{proj}(\vec{a}+\vec{b})=\mathrm{proj}\,\vec{a}+\mathrm{proj}\,\vec{b}$　などの性質を扱っている教科書があった。

・図形への応用では，簡単なベクトル方程式を扱う程度で，図形の性質を証明するような問題はほとんど扱っていなかった。章末問題に数題見られる程度である。

・次のような物理と関連する内容を所々で扱っていた。

「3つの力$\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$が，図のようにつりあっているとき，



$$\frac{\left|\overrightarrow{f_1}\right|}{\sin\theta_1} = \frac{\left|\overrightarrow{f_2}\right|}{\sin\theta_2} = \frac{\left|\overrightarrow{f_3}\right|}{\sin\theta_3}$$ が成り立つことを示せ。」

・空間ベクトルの内容は，あまり扱われていなかった。教科書によっては，まったく扱っていない，あるいは発展としてのみのものもあった。

・三角関数との関連から，$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\vec{a}\cdot\vec{a}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}$ と余弦定理との関連について触れたり，あるいは，内積を利用して余弦の加法定理を導いていた教科書がいくつかあった。学習指導要領での位置づけを意識した扱いと考えられる。

(2)の段階では，ベクトルは独立した単元として位置づけられた（それ以降も同様）。また，平面ベクトルと空間ベクトルの内容は分離され，内積を除く平面ベクトルの内容は必修の内容となった。内容的にも，現行のものとほぼ同じであるといえる。その中で，少数だが，教科書に次のような記述が見られたのは特質に値する。

・ベクトル空間に関する記述が見られた。数学Ⅰの教科書（数学Ⅰ池田書院，1975検定）には，平面ベクトルの最後に，発展として「ベクトル空間」とは何かについての記述があった。また，別の数学Ⅱの教科書（大阪教育図書，1973検定）には，空間ベクトルの最後に，本文として，次のような記述があった。

「空間内のベクトル全体の集合をVとすると，集合Vは演算に関していくつかの基本性質をもっている。」

そして，ベクトル空間の8つの公理をあげ，さらに，複素数の集合が同じ8つの公理を満たすことを，問として確認させている。

・数学Ⅱの教科書（啓林館，1973検定）に，次のような空間図形の性質を，解析幾何により証明しているものがあった。

「底面が長方形の四角錘O-ABCDで，$OA^2+OC^2=OB^2+OD^2$ を証明せよ。」

(3)の段階では，平面・空間ベクトルいずれも選択の内容となった（それ以降も同様）。また，学習指導要領で「空間における点・直線・平面」が入り，教科書に次のような内容が加わった。

・平面の決定条件
・2直線の位置関係，なす角
・2平面の位置関係，なす角
・直線と平面の位置関係，なす角
・3垂線の定理

さらには，空間図形の性質を初等幾何により証明する内容も扱われた。たとえば，次のような性質の証明である。

・直線mが，平面α上の2直線と垂直ならば，$m\perp\alpha$（合同条件あるいは中線定理を利用）
・3垂線の定理（平面と直線の垂直の性質を利用）
・正四面体OABCにおいて，$OA\perp BC$（平面と直線の垂直の性質を利用）

この時期が，ベクトル指導に関してこれまでの中で最も内容が豊富であったといえる。

(4)の段階では，空間ベクトルにおける直線，平面，球の方程式は扱わないこととなった。また(3)で導入された「空間における点・直線・平面」も学習指導要領から消え，教科書で扱っているのは少数（数学B，啓林館他，1994検定）であった。

なお，1社（数学B，三省堂，1994検定）だけであるが，ベクトルの定義について，次のような記述が見られたのは，特質すべき点である。

「数の組で表すと都合のよい量に力や速度などがある。このような量をベクトル量といい，ベクトル量を表す実数の組をベクトルという。」

(5)の段階では，(4)と比べ大きな変更はないが，「空間における点・直線・平面」に関する記述のある教科書が増えた。

5．ベクトルの指導に関する先行研究

ベクトルの指導については，これまでに多くの先行研究がある。日本数学教育学会の発行する学会誌（数学教育，数学教育学論究）およびいくつかの文献を調べてみた結果，特に，ベクトルの指導がスタートする前後での研究論文が目立った。

まず，学習指導要領での指導が始まる前の試験的な研究としては，田村（1959），船山（1961），奥村（1961）らの研究がある。

田村は，新教材としてのベクトルの指導目標として，「①図形教材を深める立場より，特に平面，空間の解析幾何との関連を重視し，空間に対する直観力，論証能力をさらに発展させる，②複素平面との関連，③物理学，幾何学への応用等」をあげ具体的な編成内容を提示している。

船山は，高校におけるベクトル指導の意義について，数学的な面を強調した指導よりも，力学的な現象を数学のシステムにいかに転移させ，数学的処理がいかに物理的な現象を解明していくか，それを生徒にわからせることにベクトル指導のねらいをおいて，実践を行っている。

奥村は，幾何学への応用を目標にしたベクトルの指導を実践している。そこでは，垂線が1点で交わることの証明や，三角形の角の2等分線と辺の比に関する性質の証明を扱っている。

次に，学習指導要領での指導がスタートした後の研究としては，林（1966），風間・長野（1971），坂井（1975），小笠原・室田（1981），池野（1982），川崎（1991），今岡・平岡（2004）らの研究がある。

林は，指導上の問題点の1つとして，「教師自身にも，高校数学でのベクトルとしては何を指導しようとしているのか，いいかえれば，そのねらいに統一的なものがないという不安をいだいているのではなかろうか」と述べている。そして，公理系指導の立場からみたベクトル指導を実践している。

風間・長野は，1972年度（現代化）カリキュラムに先駆けて，科目「数学一般」における行列とベクトルの展開例を紹介している。そこでは，行列と関連させるために，ベクトルを，数ベクトルで定義しているのが特徴である。

坂井は，1972年度（現代化）カリキュラムの中で，諸外国におけるベクトル指導を参照しながら，ベクトルを中学校教育課程で早期導入することは，図形学習をより豊かにする等の観点から意義あることとし，指導の可能性を実証的に明らかにしている。

小笠原・室田は，1982年度カリキュラムに先駆けて，数学ⅡBにおける「空間ベクトル」を理解する前提として，空間図形に関する基本的な性質を理解することが重要であることを，調査を通して指摘している。

池野は，平面ベクトルと空間ベクトルを分離して指導することに疑問を持ち，1982 年度カリキュラムに先駆けて，平面ベクトルと空間ベクトルを並列的に取り扱うことによって，ベクトルの異次元間の有用性に気づかせるような指導を実践している。

川崎は，ベクトルの発展的扱いとして，ベクトル積を取り上げ，ベクトル積を導入した授業展開例を提案している。

今岡・平岡は，ベクトルでは，数学的な方法の広がりを学ぶことが大切とし，「図形の動きや位置関係の表示にベクトル機能を生かし，図形探求の広がりを学ぶ」，「ベクトルの演算法則に基づく図形の探求方法を学ぶ」という 2 つの観点をあげている。

これらの先行研究から，ベクトルの指導を，幾何学への応用に力点を置く場合と，公理的な立場から数ベクトルとしてのベクトルに力点をおく場合の 2 つの方向があることがわかる。

6．ベクトルを学ぶ意義

高校生がベクトルを学ぶ意義は何であろうか。これについて，筆者は次のように考える（熊倉，2004）。

> いくつかある図形探究の方法の中で，これまで学んだ初等幾何あるいは解析幾何（座標幾何）による方法とは異なる方法の 1 つとして，ベクトルを学ぶ。

5．で述べたように，ベクトル指導の導入された前後の時期においても，指導のねらいは，幾何との関連から考えられていた。現行の学習指導要領においても，「ベクトルについての基本的な概念を理解し，基本的な図形の性質や関係をベクトルを用いて表現し，いろいろな事象の考察に活用できるようにする。」（文部省，1999）とあるように，図形の性質や関係との関連が述べられている。大学での学習内容との接続を考えると，ベクトル解析における大きさと方向の 2 つの量をもつベクトルと，ベクトル空間の元としてのベクトルがあるが，高校生に，抽象的なベクトル空間を指導することは容易なことではないであろう。実際，船山（1961）は，数学の高度の抽象化へ導く契機を与えるようなベクトルの指導を，失敗例として報告している。また，坂井（1999）は，ベクトルの教育的価値の 1 つとして「図形研究の方法としては，初等幾何，解析幾何，ベクトル，および複素数による方法がある。ベクトルの方法は初等幾何と解析幾何の中間的な方法としてのよさがある」を挙げている。

もちろん，平面上のベクトルは平行でない 2 つのベクトルで表現できること，空間上のベクトルは互いに平行でない 3 つのベクトルで表現できることを通して，ベクトル空間の特徴としての 1 次独立について触れることも可能であろう。また，解析幾何との比較を通して，多変量をまとめて 1 つの量として扱うことのよさを実感させることもできるだろう。あるいは，これまでの数（スカラー）以外にも数と同じような演算が可能な量の集合があることを通して，漠然とベクトル空間を意識させることもできるかもしれない。しかし，あくまでも指導のねらいは，図形を探求するためのベクトルと考える。上記のようなベクトル空間につながる内容は，ベクトルの学習内容を振り返るときに，結果として，可能な範囲で理解できればよいと考える。

ベクトルを学ぶ意義を考えるとき，どのような高校生を対象として指導するのか，という視点も重要である。大学に進学する理系の学生や一部の文系学生が，数学に関する一般教養として学習する「ベクトル空間」の準備教育としてベクトルを学ぶ，ということも考えられであろ

う。しかし，そのような高校生は，数学 B を選択する生徒全体から見ると決して多くはない。ベクトルを学ぶ高校生の多くが，その後直接にベクトルを使う必要はないといえよう。そのような生徒が，一方では，図形の問題に帰着できるような現実場面の課題に将来出会う可能性はある。このときに，「図形探求の方法として，初等幾何や解析幾何による方法以外に，ベクトル以外による方法がある」ことを，生徒が思い出せることが重要であると筆者は考える。

7．ベクトルの指導上の問題点

これまで述べた観点に基づきベクトルの指導を考えるとき，指導上の問題点を，平成 16 年度用高等学校数学 B の教科書を調査して分析した。教科書は，数学 B を出版している 9 社について，内容の程度の一番高いと考えられる 1 冊ずつを選択した。

まず，教科書の本文，例(題)，問，章末問題等に掲載されている次のような図形に関する問題や記述をリストアップした。

A　図形の性質を導く問題（証明問題）　・平面図形　・空間図形

B　空間図形の基本性質に関するもの

C　空間図形の初等幾何的な証明問題

A については，さらに指導内容との関連から，内積を利用しないものと利用するものとに分類した。また，中学で半数以上の教科書が扱うものには〔中学〕を，高校の数学 A・平面図形，数学Ⅱ・図形と方程式で複数の教科書が扱うものには，〔数 A〕，〔数Ⅱ〕をマークした。結果は表 4 の通りである。なお，図形についている記号は，教科書の記号と必ずしも一致しない。

表 4　図形に関する問題・記述

A 図形の性質を導く問題（証明問題）	平面図形	＜内積を利用しないもの＞ ・平行四辺形の対角線が互いに中点で交わる，あるいはその逆〔中学〕 ・重心が 1 点で交わる〔数 A〕〔数Ⅱ〕 ・中点連結定理〔中学〕〔数 A〕 ・平行線と比に関する性質〔中学〕〔数 A〕 ・四角形の各辺の中点を結んでできる四角形は平行四辺形である〔中学〕 ・三角形の各辺の中点を結んでできる三角形の重心は，元の三角形の重心と一致する〔数Ⅱ〕 ・三角形（あるいは平行四辺形）の辺上あるいは適当に引いた線分上に，ある規則でとった 3 点が一直線上にある ＜内積を利用するもの＞ ・中線定理〔数Ⅱ〕 ・垂心が一点で交わる〔数 A〕 ・二等辺三角形の底辺への中線は底辺に垂直である〔中学〕 ・ひし形の対角線が直交する〔中学〕 ・直角三角形の斜辺への中線は，斜辺の長さの半分に等しい，あるいはその逆〔数 A〕 ・三角形の重心，外心，垂心は一直線上にある ・四角形 ABCD において，$AB^2+CD^2=AC^2+BD^2$　ならば　$AC\perp BD$

	空間図形	＜内積を利用しないもの＞ ・四面体 OABC において，OA，AB，OC，BC の中点を E，F，G，H とすると，▱EFGH ・四面体 OABC において，OA，OB，OC，AB，BC，CA の中点を E，F，G，H，I，J とするとき，EI，FJ，GH は 1 点で交わる ・四面体 OABC において，△OAB，△OBC，△OCA の重心を D，E，F とし，△DEF の重心を G すると，△ABC の垂心 H は OG 上にある ・平行 6 面体の 4 本の対角線は 1 点で交わる ・平行 6 面体 ABCD-EFGH において，△ABE の重心は対角線 AG 上にある ＜内積を利用するもの＞ ・正四面体 OABC において，OA⊥BC ・正四面体 OABC において，△ABC の重心を G とするとき，OG⊥△ABC ・正四面体 OABC において，OA，BC の中点を E，F とすると，OA⊥EF ・正四面体 OABC において，OA，AB，OC，BC の中点を E，F，G，H とすると，EG⊥FH ・四面体 OABC において，OA⊥BC，OB⊥CA ならば OC⊥AB ・四面体 OABC において，$OA^2+BC^2=OB^2+CA^2$ ならば OC⊥AB ・四面体 OABC において，△ABC 上に OH⊥△ABC となる H をとると，OA⊥BC，OB⊥CA ならば AH⊥BC，BH⊥CA
B 空間図形の基本性質に関するもの		・平面の決定〔中学〕 ・2 直線の位置関係〔中学〕 ・2 平面の位置関係〔中学〕 ・直線と平面の位置関係〔中学〕 ・2 直線のなす角 ・直線と平面の垂直（平面上の 2 直線に垂直ならば，平面と垂直）〔中学〕
C 空間図形の初等幾何的な証明問題		・正四面体 OABC において，OA⊥BC であることの証明

以上の調査結果から，指導上の問題点として，次の 5 点を挙げることができる。

(1)　ベクトルを用いて図形の性質を導くような問題が少ない。

いずれの教科書も，図形に関する問題を比較的多く扱っているが，図形の性質を導くような問題（証明問題）は必ずしも多くはない。上記で挙げた問題全てを合わせると多く感じるが，それぞれの教科書には，平面図形，空間図形いずれも平均すると 2〜3 題程度である。

同じ図形の問題でも，たとえば次のような位置ベクトルを求めたり，内積を求めたりする問題は多い。

「△ABC の各頂点の位置ベクトル $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ を用いて，△ABC の内心の位置ベクトルを表せ。」

「立方体 ABCD-EFGH において，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}$ を求めよ。」

しかし，これらの問題は，図形の性質を用いたベクトルの計算問題といえる。ベクトルを用

いて，図形の問題を解決したことにはならない。すなわち，このような問題は，ベクトルを学ぶ意義を実感できるとはいえないであろう。

(2) 初等幾何や解析幾何による方法との比較が明確に記述されてない。

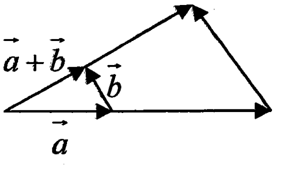
他の方法と比較することを通して，ベクトルによる方法の特徴をより深く理解し，ベクトルを学ぶ意義がより強く実感できるといえる。しかし，どの教科書にもそれに関する記述は見られなかった。たとえば，ほとんどの教科書が，垂心が1点で交わることの証明を扱っていたが，初等幾何や解析幾何による方法との関連については具体的に記述されていなかった。またそれ以外には，中学などで学んでいる図形の問題を扱っている教科書は多くなかった。たとえば，平行四辺形の対角線が中点で交わる性質（旺文社ほか）やひし形の対角線は直交する性質（実教出版ほか）などが数少ない例である。これらについても，関連についての記述はなかった。

(3) 循環論法になりうる図形の証明問題を扱っている。

いくつかの教科書で，ベクトルを用いた中点連結定理の証明問題を扱っている。この証明の中で，ベクトルのスカラー倍に関する分配法則 $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$ を用いるが，一方この分配法則を示すのに，中点連結定理を含む平行線と比に関する性質を利用することも考えられる。

実際，ほとんどの教科書は，分配法則を示すのに次のような程度の扱いである。

「$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$ が成り立つことを，右の図で確かめよ。」



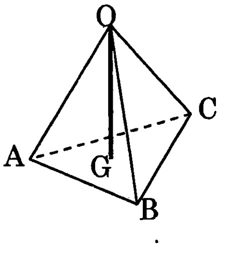
右の図を使用して，三角形の相似条件から示すこともできるが，平行線と比を利用して示すことも容易である。この場合は，循環論法になってしまう。

(4) 空間図形の基本性質に関する内容が乏しい

空間図形の基本性質については，中学1年で，直線や平面に関する相互の位置関係や，相互の平行，垂直の意味について学習する。その後は，空間ベクトル以外の部分では，どこでも扱わない。しかし実際には，空間図形の基本性質に関してまったく扱っていない教科書が，調べた中で半分以上あり，扱っている教科書でも軽重に差があった。その内容は，中学の内容の復習が多く，高校での新しい内容は，2直線のなす角の意味について程度である。

たとえば，次の問題

「正四面体OABCにおいて，△ABCの重心をGとするとき，OG⊥△ABCを示せ。」



は，「直線mが，平面α上の平行でない2直線と垂直ならば，直線mは平面αと垂直である」という性質を利用するが，中1で学習しているとはいえ，その後は扱わないため忘れている生徒も少なくないであろう。上の問題を扱いながら，この性質には触れていない教科書もあった。

(5) 空間図形について，ベクトル以外の方法による扱いがほとんどない

空間図形の場合は，ベクトル以外の方法を，教科書ではほとんど扱っていない。2冊の教科書で，次のような初等幾何の問題を扱っているだけである。

「正四面体OABCにおいて，OA⊥BCであることを証明せよ。」

空間図形の問題を解決するのに，ベクトルによる方法だけを学んだ生徒は，ベクトル以外の方法では解決できないと考えてもおかしくないであろう。

8．ベクトル指導の改善点

これまで述べてきたことから，ベクトルの指導の改善点について，次の4点を挙げることができる。

(1)　初等幾何や解析幾何による方法と比較することを通して，ベクトルによる方法の理解を深める。

同じ図形の問題を，初等幾何，解析幾何による方法でも扱い，ベクトルによる方法と比較することが重要であると考える。

初等幾何による方法との比較においては，初等幾何による方法は思いつけば比較的容易に証明できるのに対して，ベクトルによる方法は，代数的に処理する点に特徴がある。計算は大変になることが多いが，ある程度形式的に処理できるといえる。

解析幾何による方法との比較においては，代数的に処理する点では共通するが，解析幾何による方法がx座標とy座標のそれぞれについて計算するのに対して，ベクトルによる方法は，1つの量にまとめて計算すればよい点に特徴がある。一方で，2直線の交点について調べたりするのは，解析幾何による方法に比べ計算が面倒になることが多いといえる。

それぞれの特徴について触れることは，ベクトルの理解を深めるだけではなく，初等幾何や解析幾何も含めて，幾何全般について理解を深めることになる。さらには，ベクトルを学ぶ意義を実感させることができるであろう。

たとえば，次のような問題を扱うとよい。

「平行四辺形の対角線は，互いに中点で交わることを証明せよ。」

初等幾何による方法は，三角形の合同条件で証明する。

解析幾何による方法は，たとえば次のように証明する。

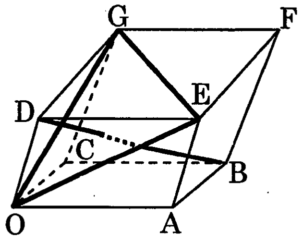
『▱OABCで，Oを原点とし，A(a，0)，C(b，c)とすると，B(a+b，c)

このとき，OBの中点は$\left(\frac{a+b}{2},\frac{c}{2}\right)$，一方，ACの中点も$\left(\frac{a+b}{2},\frac{c}{2}\right)$となり，一致する。』

また，たとえば，多くの教科書が，重心の位置ベクトルを求める問題を扱っている。ここでは，ほとんどが重心の存在を前提にして，その位置ベクトルを求めている。しかし，問いかけを少し変えて，「重心が1点で交わることを，ベクトルを用いて証明しよう」とすることで，図形の性質を利用したベクトルの計算問題から，ベクトルを利用した図形の問題になる。こうすれば，初等幾何や解析幾何による方法との比較も可能になるであろう。

以上のことは，空間ベクトルにおいても同様である。たとえば，空間図形に関する次のような問題を扱うとよい。

「平行6面体OABC-DEFGにおいて，対角線BDは△OGEの重心を通ることを証明せよ。」



初等幾何による方法は，たとえば次のように証明する。

『DFとEGの交点をHとし，OHとDBの交点をIとすると，

△IOBと△IHDにおいて，DH//OBから，

∠IOB=∠IHD，∠IBO=∠IDH

よって，△IOB∽△IHD　となり，IO：IH=OB：DH=2：1

ゆえに，Iは，△OBGの重心である。』

また，解析幾何による方法との比較のためには，次のような問題を扱うとよいであろう。

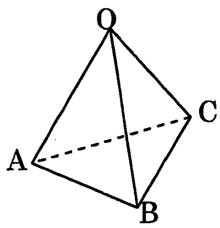
「直方体の4本の対角線は1点で交わることを証明せよ。」(証明略)

(2)　ベクトルによる方法でこそ容易に解決できるような図形の性質を扱い，ベクトルを学ぶよさを実感させる。

これまでは扱ってこなかった図形の性質のうち，初等幾何や解析幾何による方法でも解決できるが，ベクトルによる方法が容易であるような内容も扱いたい。特に，空間図形の場合に，ベクトルによる方法が有効であるような問題は多い。たとえば，次のような問題である。

「四面体OABCにおいて，OA⊥BC，OB⊥CAならば

OC⊥ABであることを証明せよ。」



この問題を，初等幾何による方法で解くと，次の通りである。

『△ABC上に，OH⊥△ABCとなるHをとり，AHとBC

の交点をD，BHとCAの交点をEとすると，

OH⊥BC，OA⊥BCより，△OAH⊥BC　よって，AH⊥BC

OH⊥CA，OB⊥CAより，△OBH⊥CA　よって，BH⊥CA

以上から，Hは△ABCの垂心となり，CH⊥AB

これと，OH⊥ABから，△OCH⊥AB　よって，OC⊥AB　』

直線と平面の垂直に関する性質を利用しているが，ベクトルによる方法と比べると，生徒にとっては結構面倒な証明といえる。

なお，この問題のベクトルによる解法は，実は，平面ベクトルで扱う「垂心が1点で交わることの証明」とまったく同じである。つまり，Oが△ABC上にある場合に相当する。このことにも触れ，平面と空間で，同じように扱うことのできるベクトルのよさを実感させたい。

(3)　空間図形に関する基本性質を，空間ベクトルの導入で指導する

7．で述べたように，空間図形の基本性質に関する指導内容は，小・学・高を通して乏しいといえる。しかし，その後の問題解決で必要な内容もあり，また社会で生活していく上でも理解させたい重要な内容もある。これらについて，1982年〜1993年の指導のように，空間ベクトルの導入場面で中1の復習も含めて扱いたい。具体的には，たとえば次のような内容である。

①　直線mが，平面α上の平行でない2直線と垂直ならば，m⊥αであること

②　ねじれの位置にある2直線のなす角の意味

③　2平面の垂直の意味，2平面のなす角の意味

④　平面と直線のなす角の意味

⑤　球面上の2点間の最短距離は，2点を通る大円の弧の長さであること

①は，前述したように，中1で学習しているがその後の問題解決に必要な内容である。また，「平面に立てた直線が垂直かどうかを調べるには，平面上の2直線と垂直であることを調べればよい」といったことは，社会で生活していく上でも重要な内容であると考える。

②は，ここで初めて学習する内容であるが，その後の問題解決に必要な内容である。

③は，2平面の垂直については，中1のほとんどの教科書で扱っているが，2平面のなす角

について扱っていたのは1社だけであった。一方，数学Bの教科書では，どこも扱っていなかった。しかし，たとえば「この斜面は，斜度が30°」というように，身の回りでも2平面のなす角は登場する。この意味からも，2平面のなす角について指導することは重要であると考える。応用として，様々な立体の2面のなす角を求めさせてもよいであろう。

④は，数学Bの教科書でわずかに1社だけが，発展として扱っていたにすぎない。しかし，③と同様に，たとえば「ピサの斜塔は○度傾いている」というときの正確な意味を知るには，直線と平面のなす角について，きちんと指導することが重要であるといえる。

⑤は，球に関する内容であるが，計量に関するものを除くと，中学・高校を通して，ほとんど指導されていない。しかし，地理で扱うような「東京とニューヨークの最短航路は？」などのような問題を考える際には理解させたい内容と考える。性質の証明をすることは高校生には無理としても，事実を知り，これを応用して最短距離を求められるようにすることは重要であると考える。

(4) 平面ベクトルの指導順序に関して，図形への応用を分散し，成分に関する内容を後半で扱う。

多くの教科書は，平面ベクトルの指導順序が次のようであった。

① 1) ベクトルの意味　2) ベクトルの演算　3) ベクトルの成分
4) ベクトルの内積　5) 位置ベクトル　6) ベクトル方程式
7) 図形への応用

ただし，6)と7)が逆順になっている教科書が半分あった。また，7)の項は特に設けず，4)や5)の中で応用を扱っている教科書もあった。

一方，1社だけは，次のような指導順序であった。

② 1) ベクトルの意味　2) ベクトルの演算　3) 位置ベクトル（図形への応用含む）
4) ベクトルの成分　5) ベクトルの内積　6) 内積の図形への応用
7) ベクトル方程式

筆者は，②のような指導順序が望ましいと考える。理由は次の通りである。

ア．ベクトルの成分は，図形の問題を解決する上では，直接利用することはない。座標平面上で図形の問題を考えるものもあるが，それは図形の性質を導くような問題ではない。あくまでも，図形探求の一方法としてベクトルを学ぶという考えに立つとき，ベクトルの成分は，できるだけ後の方で指導するのがよいと考える。一方で，ベクトルの成分は，内積の分配法則 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ を示すのに利用される。したがって，内積の指導の前に指導する必要がある。あるいは分配法則を示すのに，射影の性質 $\mathrm{proj}(\vec{a}+\vec{b})=\mathrm{proj}\,\vec{a}+\mathrm{proj}\,\vec{b}$ を利用すれば，成分についてさらに後ろで扱うことも可能である。

イ．ベクトルの図形への応用を最後の方でまとめて扱うのでは，図形探求の一方法としてベクトルを学ぶという目標が，生徒に見えにくいといえる。ベクトルを学ぶ意義を生徒に実感させる意味からも，図形への応用は分散すべきと考える。具体的には，内積を利用しないものと利用するものに分け，位置ベクトルの学習の中で内積を利用しないものを，内積を指導した後に内積を利用するものを分けて扱うのがよいと考える。

9．今後の課題

今後の課題として，次の点が挙げられる。

(1) 本稿で述べたベクトルの指導の改善点に基づいた授業実践を，筆者は前任校で実践し，一定の評価を得ている。今後も，できればさらに他の学校で授業を実践し，その妥当性や指導の効果を評価したい。

(2) 空間図形の基本性質や論証について，今回は空間ベクトルで扱うことを前提に考察したが，空間ベクトル以外の場面で指導することも考えられる。小・中・高を見通して，空間図形に関するカリキュラム全体を検討する中で，たとえば数学Aで，平面図形に限定せずに，空間図形の論証も扱うなどが考えられる。

(3) 本稿では，ベクトルの指導に焦点を当てたが，他にも，数学I・三角比（図形と計量）や数学A・平面図形，数学II・図形と方程式，数学C・2次曲線などがある。これらについても，指導上の問題点と改善点を明らかにし，高校における幾何教育の改善を図りたい。

参考・引用文献

船山良三．1961．高校数学の実験研究：ベクトル指導の失敗例と成功例．日本数学教育会誌数学教育43巻5号．

林昭. 1966．ベクトル指導の一方法．日本数学教育会誌数学教育48巻11号．

池野蘭也．1982．ベクトルの一貫指導．日本数学教育学会誌数学教育64巻11号．

今岡光範・平岡賢治．2004．高校のベクトル教材についての一考察．全国数学教育学会誌.数学教育学研究10巻．

川崎宣昭．1991．高等学校「代数・幾何」教材におけるベクトル積の位置付けに関する一考察．日本数学教育学会誌数学教育73巻3号．

風間賢士・長野東．1971．数学一般における「ベクトルと行列」の展開例．日本数学教育学会誌数学教育53巻11号．

国立教育政策研究所．2004．平成14年度高等学校教育課程実施状況調査報告書(数学I)．

国立教育政策研究所．2003．平成13年度小中学校教育課程実施状況調査報告書(数学)．

熊倉啓之．2000．学ぶ意義を実感させる数学の指導に関する研究－三角比の指導を通して－．日本数学教育学会誌数学教育82巻11号．

熊倉啓之．2003．学ぶ意義を実感させる関数の指導に関する研究．日本数学教育学会誌数学教育85巻11号．

熊倉啓之．2004．学ぶ意義を実感させるベクトルの指導に関する研究．第37回論文発表会論文集．

文部省.高等学校学習指導要領数学.昭和35年告示，昭和45年告示，昭和53年告示，平成元年告示，平成11年告示

小笠原篤宏・室田敏夫．1981．空間図形の性質に対する意識調査．日本数学教育学会誌数学教育63巻5号．

奥村茂美．1961．ベクトル指導の一例．日本数学教育会誌数学教育43巻11号．

坂井裕．1975．ベクトルの基礎的内容の早期導入の意義とその可能性.日本数学教育学会誌数学教育学論究．28巻.

坂井裕．1999．数学科教育（中学・高校）．学文社.

田村寿雄．1959．幾何系教材の新教育課程及びベクトルの指導について.日本数学教育会誌数学教育 41巻9号.

昭和41年度用高等学校教科書「数学ⅡB」．大日本図書.

昭和41年検定済教科書「数学ⅡB」．東京書籍，実教出版，啓林館，帝国書院，好学社，清水書院

昭和48年検定済教科書「数学ⅡB」．東京書籍，啓林館，数研出版，大日本図書，帝国書院，池田書店，学習研究社，三省堂，大阪教育図書，教育出版

昭和50年検定済教科書「数学Ⅰ」．実教出版，啓林館，数研出版，大日本図書，池田書店，清水書院

昭和57年検定済教科書「代数・幾何」．東京書籍，実教出版，啓林館，数研出版，大日本図書，帝国書院，池田書店，学習研究社，教育出版，旺文社，学校図書

平成6年検定済教科書「数学B」．東京書籍，実教出版，啓林館，数研出版，三省堂，旺文社，桐原書店

平成16年度用高等学校教科書「数学B」．東京書籍001，実教出版003，啓林館006，数研出版009，文英堂012，旺文社015．第一学習社016，知研出版018，桐原書店019