

## 244 両表面に均質層を有する傾斜機能平板の定常熱応力 (物性値の温度依存性を考慮した場合)

Steady Thermal Stresses in a Composite Plate of Functionally Graded Material  
with Temperature-Dependent Material Properties

○ 二宮 知叔 (静大院) 正 石原 正行 (静大工) 正 野田 直剛 (静大工)  
Tomoyoshi NINOMIYA, Shizuoka University, jyouhoku 3-5-1, hamamatsu, shizuoka  
Masayuki ISHIHARA, Shizuoka University  
Naotake NODA, Shizuoka University

A functionally graded materials which decrease thermal stresses have been developed for structural components and/or mechanical elements in fields such as nuclear, aircraft and space engineering. In this research, the steady thermal stress distribution of a plate of functionally graded material with the homogeneous layers on both surfaces is analyzed. The main theme of this subject is to maximize the safety factor in a plate of functionally graded material with the homogeneous layers.

**Key Words:** Thermal Stress, Functionally Graded Plate, Safety Factor, Material Composition

### 1. 緒 言

航空, 宇宙, 原子力等の分野において, 超高速化, 超高温化に対応した新しい耐熱材料として, 熱応力緩和型傾斜機能材料(FGM)の開発がすすめられている. FGM は高温側にセラミックス, 低音側に金属を配置し, セラミックスから金属への組成を連続的に変化させることで, 熱応力を緩和し, かつ遮熱効果を高めることなどを目標としている. 物性値の温度依存性を考慮した場合での, 熱応力を受ける全層傾斜機能平板の最適物性値による定常熱応力の緩和は, すでに野田・辻<sup>(1)</sup>によって検討されている. 本研究では野田・辻と異なり, 二種類の異なる均質平板の間の中層として傾斜機能材料を配した, より実用的な三層構造の無限平板について定常熱応力を検討した. まず, 物性値の温度依存性を考慮して温度・熱応力の定式化を行い, 続いて, ZrO<sub>2</sub>-Ti-6Al-4V からなる傾斜機能部をもち, 各々の側に ZrO<sub>2</sub> と Ti-6Al-4V の均質材をもつ三層平板の定常熱応力に及ぼす傾斜機能材料部の組成および気孔率の影響を調査し平板における最小応力比を最大にする最適組成を求め, 物性値の温度依存性を考慮しない場合との比較, FGMvol%が定常熱応力に及ぼす影響の調査を行った. さらに, 平板に作用する力学的条件の影響についても調査した.

### 2. 理 論

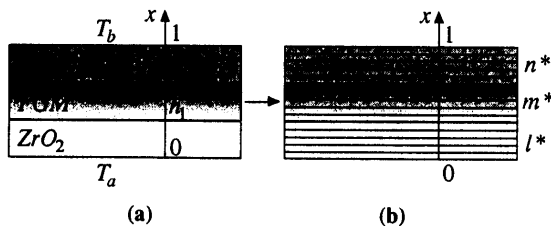


Fig.1 Analytical model

一様温度  $T_0$  で無応力状態にある厚さ  $h$  の平板を, Fig.1 (a) に示すように  $h$  で無次元化する. 平板の下面が温度  $T_a$ , 上面が温度  $T_b$  に保持された場合の定常熱応力について考える.

熱伝導方程式は物性値の温度依存性を考慮するとき非線形微分方程式となるため, 平板の各層を  $l^*$ ,  $m^*$ ,  $n^*$  ( $k = l^* + m^* + n^*$ ) 層からなる均質多層平板 (Fig.1 (b)) に近似し, 反復法を用いる.  $j$  番目の層の平板内の熱伝導方程式は, 層内の物性値は一定とすると

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (1)$$

境界条件と連続条件は

$$\left. \begin{aligned} x=0 &: T_1 = T_a \\ x=x_j &: T_j = T_{j+1}, \quad \lambda_j \frac{dT_j}{dx} = \lambda_{j+1} \frac{dT_{j+1}}{dx} \quad (j=1, 2, \dots, k-1) \\ x=1 &: T_k = T_b \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ただし,  $T$  は温度,  $\lambda_j$  は  $j$  番目の層内の熱伝導率,  $x_j$  は  $j$  番目と  $j+1$  番目との境界を表す.  $j$  番目の層内の温度は

$$T_j = A_j + B_j x \quad (3)$$

ただし,  $A_j, B_j$  は未知定数である. 第零近似解を

$$T = T_a - (T_a - T_b)x \quad (4)$$

として  $j$  番目の層内の熱伝導率  $\lambda_j(T_j, x_j)$  を求め, それを用いて, 式(2), (3)より温度を求め, 第一近似解とする. 後は同様にして第二近似解, 第三近似解, ..., と温度を求める.

次に, 熱応力解を求める. 板が薄いと板厚方向の垂直応力を無視すると, フックの法則より

$$\varepsilon = \frac{1}{E_j(T_j, x)} [\sigma_j - \nu_j(T_j, x)\sigma_j] + \int_{T_0}^{T_j} \alpha_j(T_j, x) dT_j \quad (5)$$

ただし,  $\varepsilon$  は板厚方向に垂直な方向のひずみ,  $\sigma$  は同方向の垂直応力,  $E$  は縦弾性係数,  $\alpha$  は線膨張係数,  $\nu$  はポアソン比であり, 添字  $j$  は  $j$  番目の層を表す. また, 各物性値は温度と位置の関数である. また, Kirchhoff-Love の仮定より

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{xh}{\rho} \quad (6)$$

ただし,  $\varepsilon_0$  は  $x=0$  におけるひずみを表し,  $\nu/\rho$  は  $x=0$  における曲率を表す. 式(5), (6)より熱応力  $\sigma_j$  の一般解を導出し, 平板の周囲が自由という境界条件 (式(7)) を用い  $\sigma_j, \varepsilon_0, \nu/\rho$  を求める. (詳細は省略する.)

$$\int_0^1 \sigma dx = 0, \quad \int_0^1 x \sigma dx = 0 \quad (7)$$

### 3. 傾斜機能三層平板

ZrO<sub>2</sub> と Ti-6Al-4V のみで組成を傾斜的に配置し, かつ気孔を存在させた傾斜機能三層平板について考える.

均質材の物性値として, セラミック (ZrO<sub>2</sub>), 金属 (Ti-6Al-4V) に対し温度依存性を考慮した式<sup>(2)-(4)</sup>を用いる. (ここでは式の詳細は省略する.)

$$\left. \begin{aligned} \lambda_c &= f_1(T) & E_c &= f_2(T) & \alpha_c &= f_3(T) \\ \nu_c &= f_4(T) & \sigma_{Bc} &= f_5(T) \\ \lambda_m &= f_6(T) & E_m &= f_7(T) & \alpha_m &= f_8(T) \\ \nu_m &= f_9(T) & \sigma_{Bm} &= f_{10}(T) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ただし  $\lambda$  は熱伝導率,  $E$  は弾性係数,  $\alpha$  は線膨張係数,  $\nu$  はポアソン比,  $\sigma_B$  は引張強さを表し, 添字  $c$ ,  $m$  はそれぞれセラミックと金属を表す. また, 傾斜機能材料部における金属の体積分率, 気孔率として以下の式を用いる.

$$V_m = \left[ \frac{(x - \hat{h}_1)}{\hat{h}_f} \right]^m \quad (9)$$

$$P = A \left( \frac{x - \hat{h}_1}{\hat{h}_f} \right)^n \left\{ 1 - \left( \frac{x - \hat{h}_1}{\hat{h}_f} \right) \right\} \quad (10)$$

$$30 \geq m \geq 0.1, (n+1) \left\{ \frac{(n+1)}{n} \right\}^n > A \geq 0 \quad (11)$$

ここで, 式(11)については  $m$ ,  $A$ ,  $n$  に対する制約条件を表し,  $A$ ,  $n$  については気孔率が 1 を越えない為の条件である. これらを用い, 傾斜機能材料部の物性値の式<sup>(5)(6)</sup>を表すと以下ようになる.

$$\begin{aligned} \lambda &= f_{11}(\lambda_c, \lambda_m, V_m, P) \quad \nu = f_{12}(\nu_c, \nu_m, V_m) \\ E &= f_{13}(E_c, E_m, V_m, P, \nu) \quad \sigma_B = f_{14}(\sigma_{Bc}, \sigma_{Bm}, V_m, P) \\ \alpha &= f_{15}(\alpha_c, \alpha_m, E_c, E_m, V_m, \nu_c, \nu_m) \end{aligned} \quad (12)$$

次に傾斜機能三層平板の中で最小な応力比  $f$  を次式で定義する.

$$f = \left\{ \frac{\sigma_B(x)}{\sigma(x)} \right\}_{\min} \quad (13)$$

よって  $f$  は傾斜機能三層平板の安全率を表し, 式(11)の範囲内で最小応力比を最大とする体積分率  $V_m$  と気孔率  $P$  のパラメータを決定する最適化問題を考える.

Fig.2 は制御パラメータ  $n$  が与えられたとき, 平板内における最小応力比が最大になるようパラメータ  $m$ ,  $A$  を順次変化させ, 最小応力比の最大値を図示したものである. 図より, どの FGMvol% においても  $n$  の変化に対し最小応力比  $f$  には極大値が存在する. また, FGMvol% の低下につれて最小応力比  $f$ , つまり安全率も低下していくことがわかる. さらに, FGMvol% が 50 の場合最小応力比の最大値が 1 を下回るため平板がどのようなパラメータを用いても破壊することもわかる. ここで, 51vol%FGM では  $m=4.83$ ,  $A=122$ ,  $n=4.0$  で  $f=1.005$  となるため FGMvol% が 50 より高ければ破壊しない傾斜機能三層平板を作成することが可能である.

図より得られた最適パラメータ  $m$ ,  $A$ ,  $n$ , 最小応力比  $f$ , および物性値の温度依存性を考慮しない場合の最小応力比を Table1 に示す. Table1 より物性値の温度依存性を考慮しないとかなりの過大評価が生じ, 物性値の温度依存性を考慮することは重要であると解る. また, 制御パラメータの  $m$  が 1 より大きいことから FGM 部では金属よりもセラミックが多くを占める組成となることがわかる.

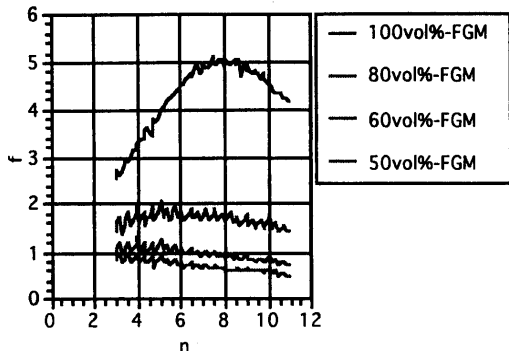


Fig.2 Variation of minimum stress ratio

Table1 Optimum parameter and minimum stress ratio

FGMvol%	Dependency of material properties on tempture				$\frac{f_{max}^*}{f_{max}} \times 100$
	regard		not regard		
	(m,A,n)	$f_{max}$	(m,A,n)	$f_{max}^*$	
100	(6.58,21.6,7.5)	5.117	(30.0,0.0,1.0)	38.51	752.0
80	(3.80,15.2,1.0)	2.032	(30.0,0.0,1.0)	10.15	500.0
60	(3.95,12.2,1.0)	1.273	(3.0,30.0,12.0)	5.92	466.1

#### 4. 力学的境界条件の影響

次に複合平板の周辺における力学的境界条件の影響を考える. 境界条件として以下の 4 種類をあげる.

[1] 伸び自由, 曲げ自由

この条件では(7)式を用いる.

[2] 伸び自由, 曲げ拘束

$$\int_0^l \sigma dx = 0, \quad \rho = \infty \quad (14)$$

[3] 伸び拘束, 曲げ自由

$$\epsilon_0 = 0, \quad \int_0^l x \sigma dx = 0 \quad (15)$$

[4] 伸び拘束, 曲げ拘束

$$\epsilon_0 = 0, \quad \rho = \infty \quad (16)$$

これらの条件における 100vol%-FGM 平板の物性値温度依存性の場合の最大応力比を求めると以下ようになる.

Table2 より拘束条件が増えることにより安全率も下がっていくことがわかる. また, 曲げよりも伸びを拘束された方が安全率が下がる. 以上から, 力学的境界条件を考察することは重要であることがわかる.

Table2 Influence of boundary conditions on maximum stress ratio

boundary conditions	(m,A,n)	f max
[1] extend free, bend free	(6.58,21.6,7.50)	5.117
[2] extend free, bend clamp	(26.4,16.0,5.40)	0.164
[3] extend clamp, bend free	(0.454,1.09,0.0170)	0.0757
[4] extend clamp, bend clamp	(0.456,1.09,0.0170)	0.0746

#### 5. 結 言

本研究より分かったことを以下にまとめる.

- 1.物性値の温度依存性を考慮することは重要である.
- 2.FGM 部が多い程熱応力は緩和され, 50vol%-FGM より多ければ破壊しない三層平板を作成することが可能である.
- 3.力学的境界条件を考察することは重要である.

#### 参考文献

- (1) 野田・辻, 機論, A, 57-535(1991-3), 625-631
- (2) Clobberly.W.H., *Metals Handbook Ninth Ed.3*, (1989)
- (3) Touloukian, Y. S., *Thermophysical Properties of Mater*, 1-2. (1973), 1272, IFI/Plenum.
- (4) Kingery・ほか 2 名共著, (小松・ほか 4 名共訳) セラミックス材料科学入門応用編, (1989), 621, 内田老鶴園出版.
- (5) Kingery・ほか 2 名共著, (小松・ほか 4 名共訳) セラミックス材料科学入門応用編, (1989), 614, 内田老鶴園出版.
- (6) 近藤, 多孔材料, (1986), 169, 177, 技報堂.