

539.377.01

瞬間点熱源による中空円板の非定常熱応力*

野田直剛**, 竹内洋一郎**

1. 緒 言

点熱源が作用する物体の熱応力問題に関しては従来多数の報告がなされている。しかし有限領域の瞬間点熱源の場合については比較的少なく、中空円板の瞬間点熱源の非軸対称熱応力問題を、著者の一人が始めて解析を発表し⁽¹⁾、遅れて同一問題を Hsu⁽²⁾ が発表している。しかしこれらはいずれも比較的解析が容易ないわゆる単一連結領域の問題であって、弾性論の解析的見地からながめるとき、変位および回転の一価性の吟味の問題が自動的に満足されて、いわゆるくいちがいの吟味の不要な場合に相当している。本報告の中空円板の問題は重複連結領域の問題に属し、熱応力関数が前記の変位および回転の一価性を保証するための必要十分条件である、いわゆる Michell の条件式を満足する解とならなければならないことから、解析の困難性が著しく増加するため、重要な問題であるにもかかわらず今日まで解かれていなかった。本報告では中空円板の任意の一点に瞬間点熱源が作用する場合に、まずラプラス変換法で温度関数を解析し、その結果より熱応力関数に関しては、Michell の条件式を満足するように未知定数を決定した。なお本問題の解析は問題に一般性をもたせるために瞬間点熱源の位置は、Hsu のような特定の位置でなく、領域内の任意の一点としたから、解析的には最もめんどろな初期状態における不連続、非軸対称の非定常熱応力問題になる。また本研究の解析は係数 (K) を修正するだけで、中空円筒の任意の位置の軸方向に瞬間線熱源が作用する平面ひずみ熱応力問題の解を与える。

この問題の実用上の適用に関する詳細については Hsu の文献に見られるような原子炉構造の問題や、点溶接の問題が考えられる。

2. 解 析

図 1 に示すように内半径 a, 外半径 b の中空円板の点 (r₁, β) に瞬間点熱源が作用した後の温度分布は

$T(r, \theta, t) = G(r_1, \beta, 0) + T_1(r, \theta, t)$ (1)
 で与えられる。ここで $G(r_1, \beta, 0)$ は無限板に時間 $t = 0$ で位置 (r_1, β) に点熱源の強さ Q なる瞬間点熱源が作用したときの時間 t, 位置 (r, θ) におけるグリーン関数である。κ を温度伝導率とすれば、 $T_1(r, \theta, t)$ の基礎式は

$$\nabla^2 T_1 = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T_1}{\partial t} \quad \left(\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)$$
(2)

で与えられる。T₁ の初期条件は

$$t=0 \text{ で } T_1(r, \theta, 0) = 0$$
(3)

境界条件は内側, 外側境界の相対熱伝達率をそれぞれ h_a, h_b とすると

$$\left. \begin{aligned} r=a \text{ で } \frac{\partial T}{\partial r} - h_a T &= 0 \\ r=b \text{ で } \frac{\partial T}{\partial r} + h_b T &= 0 \end{aligned} \right\}$$
(4)

また円板の上下両表面からの熱放散は無いとする。この場合におけるグリーン関数は

$$G(r_1, \beta, 0) = \frac{Q}{4\pi\kappa t} e^{-R^2/4\kappa t}$$
(5)

ここで

$$R^2 = r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos(\theta - \beta)$$

関数 G のラプラス変換を

$$G^* = \int_0^\infty G e^{-pt} dt$$
(6)

で表すと、式 (5) のラプラス変換は

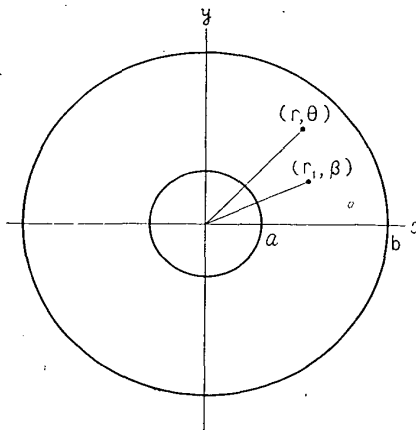


図 1 任意の一点の瞬間点熱源

* 昭和 47 年 6 月 30 日 中国四国支部徳島地方講演会において講演, 原稿受付 昭和 47 年 12 月 19 日。

** 正員, 静岡大学工学部 (浜松市城北 3-5-1)。

$$G^* = \frac{Q}{2\pi\kappa} K_0(qR) \left(q = \sqrt{\frac{p}{\kappa}} \right) \dots\dots\dots(7)$$

ここで K_0 は変形ベッセル関数である。式(7)を書き直すと

$$G^* = \frac{Q}{2\pi\kappa} \left\{ \begin{aligned} & I_0(qr)K_0(qr_1) \\ & + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(qr)K_n(qr_1) \cos n(\theta-\beta) \end{aligned} \right\} \quad r < r_1$$

$$G^* = \frac{Q}{2\pi\kappa} \left\{ \begin{aligned} & K_0(qr)I_0(qr_1) \\ & + 2 \sum_{n=1}^{\infty} K_n(qr)I_n(qr_1) \cos n(\theta-\beta) \end{aligned} \right\} \quad r > r_1$$

\dots\dots\dots(8)

ここで I_n, K_n は変形ベッセル関数である。初期条件式(3)を考慮して式(2)をラプラス変換すれば

$$\frac{\partial^2 T_1^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_1^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_1^*}{\partial \theta^2} = q^2 T_1^* \dots(9)$$

$r < r_1$ に対し

$$T^* = \frac{Q}{2\pi\kappa} \left[\begin{aligned} & \frac{[q \{I_0(qr_1)K_1(qb) + K_0(qr_1)I_1(qb)\} - h_b \{I_0(qr_1)K_0(qb) - I_0(qb)K_0(qr_1)\}] \times [h_a \{I_0(qr)K_0(qa) - I_0(qa)K_0(qr)\} + q \{I_1(qa)K_0(qr) + K_1(qa)I_0(qr)\}]}{[h_a h_b \{I_0(qb)K_0(qa) - I_0(qa)K_0(qb)\} + h_a q \{I_0(qa)K_1(qb) + I_1(qb)K_0(qa)\} + h_b q \{I_1(qa)K_0(qb) + I_0(qb)K_1(qa)\} - q^2 \{I_1(qa)K_1(qb) - I_1(qb)K_1(qa)\}]} \\ & + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[q \{I_n(qr_1)K_{n-1}(qb) + K_n(qr_1)I_{n-1}(qb)\} - (h_b - n/b) \{I_n(qr_1)K_n(qb) - K_n(qr_1)I_n(qb)\}] [q \{I_n(qr)K_{n-1}(qa) + I_{n-1}(qa)K_n(qr)\} - (h_a + n/a) \{I_n(qa)K_n(qr) - K_n(qa)I_n(qr)\}]}{[(h_a + n/a)(h_b - n/b) \{I_n(qa)K_n(qb) - I_n(qb)K_n(qa)\} + (h_a + n/a)q \times \{I_n(qa)K_{n-1}(qb) + I_{n-1}(qb)K_n(qa)\} + (h_b - n/b)q \{I_{n-1}(qa)K_n(qb) + I_n(qb)K_{n-1}(qa)\} - q^2 \{I_{n-1}(qa)K_{n-1}(qb) - I_{n-1}(qb)K_{n-1}(qa)\}]} \cos n(\theta-\beta) \end{aligned} \right] \dots\dots\dots(13)$$

$r > r_1$ に対し

$$T^* = \frac{Q}{2\pi\kappa} \left[\begin{aligned} & \frac{[q \{K_0(qr_1)I_1(qa) + I_0(qr_1)K_1(qa)\} + h_a \{I_0(qr_1)K_0(qa) - K_0(qr_1)I_0(qa)\}] \times [h_b \{I_0(qb)K_0(qr) - I_0(qr)K_0(qb)\} + q \{I_0(qr)K_1(qb) + I_1(qb)K_0(qr)\}]}{[h_a h_b \{I_0(qb)K_0(qa) - I_0(qa)K_0(qb)\} + h_a q \{I_0(qa)K_1(qb) + I_1(qb)K_0(qa)\} + h_b q \{I_1(qa)K_0(qb) + I_0(qb)K_1(qa)\} - q^2 \{I_1(qa)K_1(qb) - I_1(qb)K_1(qa)\}]} \\ & + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[q \{K_n(qr_1)I_{n-1}(qa) + I_n(qr_1)K_{n-1}(qa)\} + (h_a + n/a) \{I_n(qr_1)K_n(qa) - K_n(qr_1)I_n(qa)\}] [q \{I_n(qr)K_{n-1}(qb) + I_{n-1}(qb)K_n(qr)\} + (h_b - n/b) \{I_n(qb)K_n(qr) - I_n(qr)K_n(qb)\}]}{[(h_a + n/a)(h_b - n/b) \{I_n(qa)K_n(qb) - I_n(qb)K_n(qa)\} + (h_a + n/a)q \times \{I_n(qa)K_{n-1}(qb) + I_{n-1}(qb)K_n(qa)\} + (h_b - n/b)q \{I_{n-1}(qa)K_n(qb) + I_n(qb)K_{n-1}(qa)\} - q^2 \{I_{n-1}(qa)K_{n-1}(qb) - I_{n-1}(qb)K_{n-1}(qa)\}]} \cos n(\theta-\beta) \end{aligned} \right] \dots\dots\dots(14)$$

ラプラス逆変換

$$T(r, \theta, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{r-i\infty}^{r+i\infty} T^*(r, \theta, p) e^{pt} dp \dots\dots\dots(15)$$

を用いて、式(13), (14)を逆変換すると

$$r < r_1 \text{ に対し } T = \frac{Q}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{E_{0k}(r)}{D_{0k}} e^{-\kappa \alpha_{0k} 2t} + Q \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{E_{nk}(r)}{D_{nk}} e^{-\kappa \alpha_{nk} 2t} \cos n(\theta-\beta) \dots\dots\dots(16)$$

式(9)の一般解は温度分布が $\theta = \beta$ に関して対称であることを考慮すれば

$$T_1^* = A_0 I_0(qr) + \sum_{n=1}^{\infty} \{ \bar{A}_n I_n(qr) + \bar{B}_n K_n(qr) \} \cos n(\theta-\beta) \dots\dots\dots(10)$$

で与えられる。よって求める温度分布 T^* は $T^* = G^* + T_1^* \dots\dots\dots(11)$

で与えられる。境界条件式(4)をラプラス変換すると

$$\left. \begin{aligned} r=a \text{ で } \frac{\partial T^*}{\partial r} - h_a T^* &= 0 \\ r=b \text{ で } \frac{\partial T^*}{\partial r} + h_b T^* &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

式(8), (10)を式(11)に代入し、それを式(12)に代入することによって、式(10)中の未知定数を決定することにより、ラプラス変換面上の温度分布が次式のように得られる。

$$r > r_1 \text{ に対し } T = \frac{Q}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{E}_{0k}(r)}{\bar{D}_{0k}} e^{-\kappa \alpha_{0k} 2t} + Q \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{E}_{nk}(r)}{\bar{D}_{nk}} e^{-\kappa \alpha_{nk} 2t} \cos n(\theta - \beta) \dots\dots\dots (17)$$

ここで

$$\begin{aligned} E_{0k}(r) &= \alpha_{0k} [\alpha_{0k} \{J_0(\alpha_{0k} r_1) Y_1(\alpha_{0k} b) - J_1(\alpha_{0k} b) Y_0(\alpha_{0k} r_1)\} \\ &\quad + h_b \{J_0(\alpha_{0k} b) Y_0(\alpha_{0k} r_1) - J_0(\alpha_{0k} r_1) Y_0(\alpha_{0k} b)\}] [h_a \{J_0(\alpha_{0k} r) Y_0(\alpha_{0k} a) \\ &\quad - J_0(\alpha_{0k} a) Y_0(\alpha_{0k} r)\} + \alpha_{0k} \{J_0(\alpha_{0k} r) Y_1(\alpha_{0k} a) - J_1(\alpha_{0k} a) Y_0(\alpha_{0k} r)\}] \\ E_{nk}(r) &= \alpha_{nk} [\alpha_{nk} \{J_n(\alpha_{nk} r_1) Y_{n-1}(\alpha_{nk} b) - J_{n-1}(\alpha_{nk} b) Y_n(\alpha_{nk} r_1)\} \\ &\quad + (h_b - n/b) \{J_n(\alpha_{nk} r_1) Y_n(\alpha_{nk} b) - J_n(\alpha_{nk} b) Y_n(\alpha_{nk} r_1)\}] [\alpha_{nk} \{J_n(\alpha_{nk} r) Y_{n-1}(\alpha_{nk} a) \\ &\quad - J_{n-1}(\alpha_{nk} a) Y_n(\alpha_{nk} r)\} - (h_a + n/a) \{J_n(\alpha_{nk} r) Y_n(\alpha_{nk} a) - J_n(\alpha_{nk} a) Y_n(\alpha_{nk} r)\}] \\ \bar{E}_{0k}(r) &= \alpha_{0k} [\alpha_{0k} \{J_0(\alpha_{0k} r_1) Y_1(\alpha_{0k} a) - J_1(\alpha_{0k} a) Y_0(\alpha_{0k} r_1)\} + h_a \{J_0(\alpha_{0k} r_1) Y_0(\alpha_{0k} a) \\ &\quad - J_0(\alpha_{0k} a) Y_0(\alpha_{0k} r_1)\}] [\alpha_{0k} \{J_0(\alpha_{0k} r) Y_1(\alpha_{0k} b) - J_1(\alpha_{0k} b) Y_0(\alpha_{0k} r)\} \\ &\quad - h_b \{J_0(\alpha_{0k} r) Y_0(\alpha_{0k} b) - J_0(\alpha_{0k} b) Y_0(\alpha_{0k} r)\}] \\ \bar{E}_{nk}(r) &= \alpha_{nk} [\alpha_{nk} \{J_n(\alpha_{nk} r_1) Y_{n-1}(\alpha_{nk} a) - J_{n-1}(\alpha_{nk} a) Y_n(\alpha_{nk} r_1)\} \\ &\quad + (h_a + n/a) \{J_n(\alpha_{nk} r_1) Y_n(\alpha_{nk} a) - J_n(\alpha_{nk} a) Y_n(\alpha_{nk} r_1)\}] [\alpha_{nk} \{J_n(\alpha_{nk} r) Y_{n-1}(\alpha_{nk} b) \\ &\quad - J_{n-1}(\alpha_{nk} b) Y_n(\alpha_{nk} r)\} + (h_b - n/b) \{J_n(\alpha_{nk} r) Y_n(\alpha_{nk} b) - J_n(\alpha_{nk} b) Y_n(\alpha_{nk} r)\}] \\ \bar{D}_{0k} &= \alpha_{0k} (bh_b - ah_a) \{J_1(\alpha_{0k} a) Y_1(\alpha_{0k} b) - J_1(\alpha_{0k} b) Y_1(\alpha_{0k} a)\} + \alpha_{0k} (bh_a - ah_b) \\ &\quad \times \{J_0(\alpha_{0k} a) Y_0(\alpha_{0k} b) - J_0(\alpha_{0k} b) Y_0(\alpha_{0k} a)\} + (ah_a h_b + \alpha_{0k}^2 b) \{J_1(\alpha_{0k} a) Y_0(\alpha_{0k} b) \\ &\quad - J_0(\alpha_{0k} b) Y_1(\alpha_{0k} a)\} + (bh_a h_b + \alpha_{0k}^2 a) \{J_0(\alpha_{0k} a) Y_1(\alpha_{0k} b) - J_1(\alpha_{0k} b) Y_0(\alpha_{0k} a)\} \\ \bar{D}_{nk} &= \left\{ \frac{2n}{\alpha_{nk}} \left(h_a + \frac{n}{a} \right) \left(h_b - \frac{n}{b} \right) + \left(h_a + \frac{n}{a} \right) b \alpha_{nk} - \left(h_b - \frac{n}{b} \right) a \alpha_{nk} \right\} \{J_n(\alpha_{nk} a) Y_n(\alpha_{nk} b) \\ &\quad - J_n(\alpha_{nk} b) Y_n(\alpha_{nk} a)\} - \left\{ b \left(h_a + \frac{n}{a} \right) \left(h_b - \frac{n}{b} \right) + a \alpha_{nk}^2 \right\} \{J_n(\alpha_{nk} a) Y_{n-1}(\alpha_{nk} b) \\ &\quad - J_{n-1}(\alpha_{nk} b) Y_n(\alpha_{nk} a)\} - \left\{ a \left(h_a + \frac{n}{a} \right) \left(h_b - \frac{n}{b} \right) + b \alpha_{nk}^2 \right\} \{J_{n-1}(\alpha_{nk} a) Y_n(\alpha_{nk} b) \\ &\quad - J_n(\alpha_{nk} b) Y_{n-1}(\alpha_{nk} a)\} + \alpha_{nk} (bh_b - ah_a) \{J_{n-1}(\alpha_{nk} a) Y_{n-1}(\alpha_{nk} b) - J_{n-1}(\alpha_{nk} b) Y_{n-1}(\alpha_{nk} a)\} \end{aligned}$$

ただし α_{0k} は

$$h_a h_b \{J_0(\alpha a) Y_0(\alpha b) - J_0(\alpha b) Y_0(\alpha a)\} - h_a \alpha \{J_0(\alpha a) Y_1(\alpha b) - J_1(\alpha b) Y_0(\alpha a)\} \\ + h_b \alpha \{J_1(\alpha a) Y_0(\alpha b) - J_0(\alpha b) Y_1(\alpha a)\} - \alpha^2 \{J_1(\alpha a) Y_1(\alpha b) - J_1(\alpha b) Y_1(\alpha a)\} = 0 \dots\dots\dots (18)$$

を満足する α の第 k 番めの正根である。 α_{nk} は

$$\left(h_a + \frac{n}{a} \right) \left(h_b - \frac{n}{b} \right) \{J_n(\alpha a) Y_n(\alpha b) - J_n(\alpha b) Y_n(\alpha a)\} + \left(h_a + \frac{n}{a} \right) \alpha \{J_n(\alpha a) Y_{n-1}(\alpha b) \\ - J_{n-1}(\alpha b) Y_n(\alpha a)\} - \left(h_b - \frac{n}{b} \right) \alpha \{J_{n-1}(\alpha a) Y_n(\alpha b) - J_n(\alpha b) Y_{n-1}(\alpha a)\} \\ - \alpha^2 \{J_{n-1}(\alpha a) Y_{n-1}(\alpha b) - J_{n-1}(\alpha b) Y_{n-1}(\alpha a)\} = 0 \dots\dots\dots (19)$$

を満足する α の第 k 番めの正根である。 J_n, Y_n はベッセル関数である。

式 (18), (19) を用いると $E_{0k}(r) = \bar{E}_{0k}(r)$, $E_{nk}(r) = \bar{E}_{nk}(r)$ なることがわかるから

$$\bar{C}_{0k}(r) = E_{0k}(r) = \bar{E}_{0k}(r), \quad \bar{C}_{nk}(r) = E_{nk}(r) = \bar{E}_{nk}(r) \dots\dots\dots (20)$$

と置くと、温度分布は全領域で

$$T = \frac{Q}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{C}_{0k}(r)}{\bar{D}_{0k}} e^{-\kappa \alpha_{0k} 2t} + Q \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{C}_{nk}(r)}{\bar{D}_{nk}} e^{-\kappa \alpha_{nk} 2t} \cos n(\theta - \beta) \dots\dots\dots (21)$$

二次元熱応力問題の基礎式は

$$\nabla^4 \chi = -K \nabla^2 T \dots\dots\dots (22)$$

ここで χ は熱応力関数、 $K = \alpha_t E$ で α_t は線膨張係数、 E は縦弾性係数である。 $K = \alpha_t E / (1 - \nu)$ と置くと中空円筒の任意の位置の軸方向に瞬間線熱源が作用する熱応力問題の解を与える。ただし ν はポアソン比である。

境界条件は (3)

$$r = a \text{ で } \chi = \bar{C}_{1x} + \bar{C}_{2y} + \bar{C}_3, \quad \frac{\partial \chi}{\partial r} = \bar{C}_1 \cos(r, x) + \bar{C}_2 \cos(r, y), \quad r = b \text{ で } \chi = \frac{\partial \chi}{\partial r} = 0 \dots\dots\dots (23)$$

回転、変位が一価であるための条件、いわゆる Michell の条件は⁽³⁾

$$\left. \begin{aligned} \oint \frac{\partial}{\partial n} (\nabla^2 \chi + KT) ds = 0, \quad \oint \left(y \frac{\partial}{\partial n} - x \frac{\partial}{\partial s} \right) (\nabla^2 \chi + KT) ds = 0 \\ \oint \left(x \frac{\partial}{\partial n} + y \frac{\partial}{\partial s} \right) (\nabla^2 \chi + KT) ds = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

式 (22) の補助解を χ_c , 特解を χ_p とすれば式 (21) を考慮して

$$\chi_p = \frac{KQ}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{C}_{0k}(r)}{\alpha_{0k}^2 \bar{D}_{0k}} e^{-\kappa \alpha_{0k} t} + KQ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{C}_{nk}(r)}{\alpha_{nk}^2 \bar{D}_{nk}} e^{-\kappa \alpha_{nk} t} \cos n(\theta - \beta) \dots\dots\dots (25)$$

χ_c は温度分布が $\theta = \beta$ に関して対称であることを考慮して,

$$\begin{aligned} \chi_c = \bar{A}_0 + \bar{B}_0 \ln r + \bar{C}_0 r^2 + \bar{D}_0 r^2 \ln r + (\bar{A}_1 r + \bar{B}_1 r^{-1} + \bar{C}_1 r^3 + \bar{D}_1 r \ln r) \cos(\theta - \beta) \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \{ \bar{A}_n r^n + \bar{B}_n r^{-n} + \bar{C}_n r^{n+2} + \bar{D}_n r^{-n+2} \} \cos n(\theta - \beta) \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

よって式 (22) の一般解は

$$\begin{aligned} \chi = \bar{A}_0 + \bar{B}_0 \ln r + \bar{C}_0 r^2 + \bar{D}_0 r^2 \ln r + (\bar{A}_1 r + \bar{B}_1 r^{-1} + \bar{C}_1 r^3 + \bar{D}_1 r \ln r) \cos(\theta - \beta) \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \{ \bar{A}_n r^n + \bar{B}_n r^{-n} + \bar{C}_n r^{n+2} + \bar{D}_n r^{-n+2} \} \cos n(\theta - \beta) \\ + \frac{KQ}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{C}_{0k}(r)}{\alpha_{0k}^2 \bar{D}_{0k}} e^{-\kappa \alpha_{0k} t} + KQ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{C}_{nk}(r)}{\alpha_{nk}^2 \bar{D}_{nk}} e^{-\kappa \alpha_{nk} t} \cos n(\theta - \beta) \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

式 (27) を Michell の条件式 (24) に代入すると

$$\bar{D}_0 = \bar{D}_1 = 0 \dots\dots\dots (28)$$

を得る. 境界条件式 (23) は本問題に適する形として

$$\left. \begin{aligned} r = a \text{ で } \chi = \bar{E}_1 a \cos(\theta - \beta) + \bar{C}_3 \\ \frac{\partial \chi}{\partial r} = \bar{E}_1 \cos(\theta - \beta) \\ r = b \text{ で } \chi = \frac{\partial \chi}{\partial r} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

となる. 式 (28) を考慮して式 (27) を式 (29) に代入し, \cos の各項について相当項の係数を比較することにより, それぞれの各項について 4 種類の未知数 A_0, B_0, C_0, \bar{C}_3 に関する, A_1, B_1, C_1, \bar{E}_1 に関する, A_n, B_n, C_n, D_n ($n=2, 3, \dots, \infty$) に関する四元一次連立方程式を得る. この連立方程式を解くことにより, 式 (27) の未知定数は決定される. この決定された未知数を式 (27) に代入することにより χ が求められる. よって各応力成分は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2}, \quad \sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} \\ \sigma_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial \theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

より決定される. ここで無次元量

$$\left. \begin{aligned} \tau = \frac{a^2 T}{Q}, \quad \hat{\theta}\theta = \frac{a^2 \sigma_{\theta\theta}}{KQ}, \quad \hat{\rho}\rho = \frac{a^2 \sigma_{rr}}{KQ} \\ \hat{\rho}\theta = \frac{a^2 \sigma_{r\theta}}{KQ}, \quad \rho = \frac{r}{a}, \quad \rho_0 = \frac{b}{a} \\ \rho_1 = \frac{r_1}{a}, \quad t_d = \frac{\kappa t}{a^2}, \quad H_a = ah_a, \quad H_b = ah_b \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

を用い, 式 (27) の定数を

$$\begin{aligned} B_0 = \frac{\bar{B}_0}{KQ}, \quad C_0 = \frac{a^2}{KQ} \bar{C}_0, \quad A_1 = \frac{a}{KQ} \bar{A}_1 \\ B_1 = \frac{a^{-1}}{KQ} \bar{B}_1, \quad C_1 = \frac{a^3}{KQ} \bar{C}_1, \quad A_n = \frac{a^n}{KQ} \bar{A}_n \\ B_n = \frac{a^{-n}}{KQ} \bar{B}_n, \quad C_n = \frac{a^{n+2}}{KQ} \bar{C}_n, \quad D_n = \frac{a^{2-n}}{KQ} \bar{D}_n \end{aligned} \quad (n=2, 3, \dots, \infty)$$

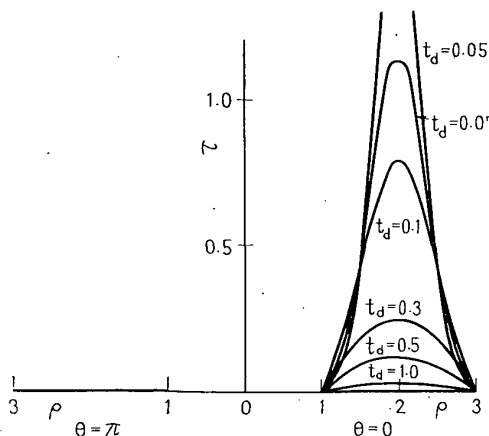


図 2 瞬間点熱源が内部にある場合の温度分布

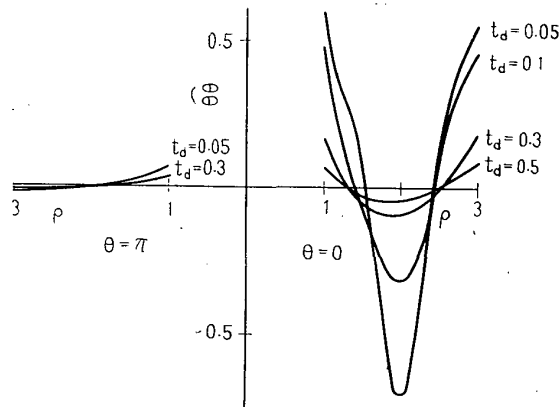


図 3 瞬間点熱源が内部にある場合の $\sigma_{\theta\theta}$ の分布 ($\hat{\theta}\theta = a^2 \sigma_{\theta\theta} / KQ$)

を置きかえて、無次元化された温度分布、各応力成分を表示すれば次式で与えられる*。

$$\tau = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{0k}(\rho)}{D_{0k}} e^{-\lambda_{0k}^2 t_d} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{nk}(\rho)}{D_{nk}} e^{-\lambda_{nk}^2 t_d} \cos n(\theta - \beta) \dots\dots\dots (32)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\theta\theta} = & 2C_0 - B_0 \rho^{-2} + 2(B_1 \rho^{-3} + 3C_1 \rho) \cos(\theta - \beta) + \sum_{n=2}^{\infty} \{n(n-1)A_n \rho^{n-2} \\ & + n(n+1)B_n \rho^{-n-2} + (n+1)(n+2)C_n \rho^n + (n-1)(n-2)D_n \rho^{-n}\} \cos n(\theta - \beta) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{0k}''(\rho)}{\lambda_{0k}^2 D_{0k}} e^{-\lambda_{0k}^2 t_d} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{nk}''(\rho)}{\lambda_{nk}^2 D_{nk}} e^{-\lambda_{nk}^2 t_d} \cos n(\theta - \beta) \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{\rho\rho} = & 2C_0 + B_0 \rho^{-2} - 2(B_1 \rho^{-3} - C_1 \rho) \cos(\theta - \beta) - \sum_{n=2}^{\infty} \{n(n-1)A_n \rho^{n-2} \\ & + n(n+1)B_n \rho^{-n-2} + (n-2)(n+1)C_n \rho^n + (n-1)(n+2)D_n \rho^{-n}\} \cos n(\theta - \beta) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{0k}'(\rho)}{\rho \lambda_{0k}^2 D_{0k}} e^{-\lambda_{0k}^2 t_d} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho C_{nk}'(\rho) - n^2 C_{nk}(\rho)}{\rho^2 \lambda_{nk}^2 D_{nk}} e^{-\lambda_{nk}^2 t_d} \cos n(\theta - \beta) \dots\dots\dots (34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{\rho\theta} = & -2(B_1 \rho^{-3} - C_1 \rho) \sin(\theta - \beta) + \sum_{n=2}^{\infty} n \{ (n-1)A_n \rho^{n-2} - (n+1)B_n \rho^{-n-2} + (n+1)C_n \rho^n \\ & - (n-1)D_n \rho^{-n} \} \sin(\theta - \beta) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n \{ \rho C_{nk}'(\rho) - C_{nk}(\rho) \}}{\rho^2 \lambda_{nk}^2 D_{nk}} e^{-\lambda_{nk}^2 t_d} \sin n(\theta - \beta) \dots\dots\dots (35) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} C_{0k}(\rho) &= \lambda_{0k} [\lambda_{0k} \{ J_0(\lambda_{0k} \rho_1) Y_1(\lambda_{0k} \rho_0) - J_1(\lambda_{0k} \rho_0) Y_0(\lambda_{0k} \rho_1) \} + H_b \{ J_0(\lambda_{0k} \rho_0) Y_0(\lambda_{0k} \rho_1) - J_0(\lambda_{0k} \rho_1) \\ & \times Y_0(\lambda_{0k} \rho_0) \}] [H_a \{ J_0(\lambda_{0k} \rho) Y_0(\lambda_{0k}) - J_0(\lambda_{0k}) Y_0(\lambda_{0k} \rho) \} + \lambda_{0k} \{ J_0(\lambda_{0k} \rho) Y_1(\lambda_{0k}) - J_1(\lambda_{0k}) Y_0(\lambda_{0k} \rho) \}] \\ C_{nk}(\rho) &= \lambda_{nk} [\lambda_{nk} \{ J_n(\lambda_{nk} \rho_1) Y_{n-1}(\lambda_{nk} \rho_0) - J_{n-1}(\lambda_{nk} \rho_0) Y_n(\lambda_{nk} \rho_1) \} \\ & + (H_b - n/\rho_0) \{ J_n(\lambda_{nk} \rho_1) Y_n(\lambda_{nk} \rho_0) - J_n(\lambda_{nk} \rho_0) Y_n(\lambda_{nk} \rho_1) \}] [\lambda_{nk} \{ J_n(\lambda_{nk} \rho) Y_{n-1}(\lambda_{nk}) \\ & - J_{n-1}(\lambda_{nk}) Y_n(\lambda_{nk} \rho) \} - (H_a + n) \{ J_n(\lambda_{nk} \rho) Y_n(\lambda_{nk}) - J_n(\lambda_{nk}) Y_n(\lambda_{nk} \rho) \}] \\ D_{0k} &= \lambda_{0k} (\rho_0 H_b - H_a) \{ J_1(\lambda_{0k}) Y_1(\lambda_{0k} \rho_0) - J_1(\lambda_{0k} \rho_0) Y_1(\lambda_{0k}) \} + \lambda_{0k} (\rho_0 H_a - H_b) \\ & \times \{ J_0(\lambda_{0k}) Y_0(\lambda_{0k} \rho_0) - J_0(\lambda_{0k} \rho_0) Y_0(\lambda_{0k}) \} + (H_a H_b + \rho_0 \lambda_{0k}^2) \{ J_1(\lambda_{0k}) Y_0(\lambda_{0k} \rho_0) \\ & - J_0(\lambda_{0k} \rho_0) Y_1(\lambda_{0k}) \} + (\rho_0 H_a H_b + \lambda_{0k}^2) \{ J_0(\lambda_{0k}) Y_1(\lambda_{0k} \rho_0) - J_1(\lambda_{0k} \rho_0) Y_0(\lambda_{0k}) \} \\ D_{nk} &= \left\{ \frac{2n}{\lambda_{nk}} (H_a + n) \left(H_b - \frac{n}{\rho_0} \right) + (H_a + n) \rho_0 \lambda_{nk} - \left(H_b - \frac{n}{\rho_0} \right) \lambda_{nk} \right\} \{ J_n(\lambda_{nk}) Y_n(\lambda_{nk} \rho_0) \\ & - J_n(\lambda_{nk} \rho_0) Y_n(\lambda_{nk}) \} - \left\{ \rho_0 (H_a + n) \left(H_b - \frac{n}{\rho_0} \right) + \lambda_{nk}^2 \right\} \{ J_n(\lambda_{nk}) Y_{n-1}(\lambda_{nk} \rho_0) \\ & - J_{n-1}(\lambda_{nk} \rho_0) Y_n(\lambda_{nk}) \} - \left\{ (H_a + n) \left(H_b - \frac{n}{\rho_0} \right) + \rho_0 \lambda_{nk}^2 \right\} \{ J_{n-1}(\lambda_{nk}) Y_n(\lambda_{nk} \rho_0) \\ & - J_n(\lambda_{nk} \rho_0) Y_{n-1}(\lambda_{nk}) \} + \lambda_{nk} (\rho_0 H_b - H_a) \{ J_{n-1}(\lambda_{nk}) Y_{n-1}(\lambda_{nk} \rho_0) - J_{n-1}(\lambda_{nk} \rho_0) Y_{n-1}(\lambda_{nk}) \} \end{aligned}$$

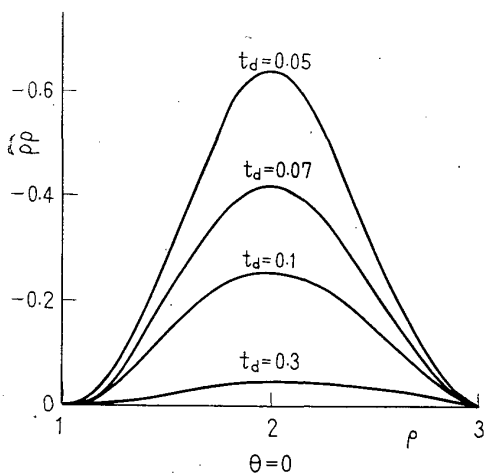


図 4 瞬間点熱源が内部にある場合の σ_{rr} の分布 ($\widehat{\rho\rho} = a^2 \sigma_{rr} / KQ$)

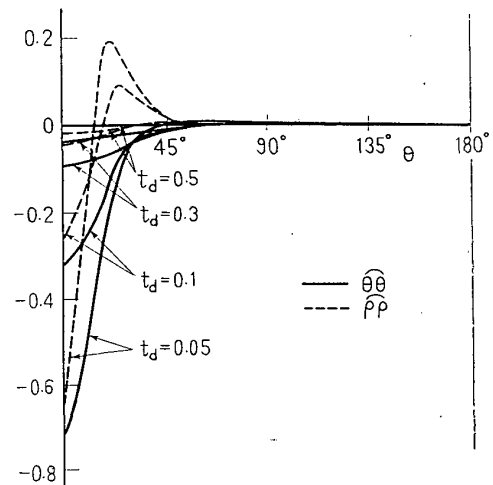


図 5 瞬間点熱源が内部にある場合の $\rho=2$ の円周上の $\sigma_{\theta\theta}, \sigma_{rr}$ の分布

* $C_{0k}'(\rho) = \frac{dC_{0k}(\rho)}{d\rho}$, $C_{0k}''(\rho) = \frac{d^2 C_{0k}(\rho)}{d\rho^2}$

λ_{0k} は

$$H_a H_b \{J_0(\lambda) Y_0(\lambda \rho_0) - J_0(\lambda \rho_0) Y_0(\lambda)\} - H_a \lambda \{J_0(\lambda) Y_1(\lambda \rho_0) - J_1(\lambda \rho_0) Y_0(\lambda)\} \\ + H_b \lambda \{J_1(\lambda) Y_0(\lambda \rho_0) - J_0(\lambda \rho_0) Y_1(\lambda)\} - \lambda^2 \{J_1(\lambda) Y_1(\lambda \rho_0) - J_1(\lambda \rho_0) Y_1(\lambda)\} = 0$$

を満足する λ の第 k 番目の正根である. λ_{nk} は

$$(H_a + n)(H_b - n/\rho_0) \{J_n(\lambda) Y_n(\lambda \rho_0) - J_n(\lambda \rho_0) Y_n(\lambda)\} + (H_a + n) \lambda \{J_n(\lambda) Y_{n-1}(\lambda \rho_0) \\ - J_{n-1}(\lambda \rho_0) Y_n(\lambda)\} - (H_b - n/\rho_0) \lambda \{J_{n-1}(\lambda) Y_n(\lambda \rho_0) - J_n(\lambda \rho_0) Y_{n-1}(\lambda)\} \\ - \lambda^2 \{J_{n-1}(\lambda) Y_{n-1}(\lambda \rho_0) - J_{n-1}(\lambda \rho_0) Y_{n-1}(\lambda)\} = 0$$

を満足する λ の第 k 番目の正根である.

3. 数値計算結果と考察*

数値計算は瞬間点熱源の位置を次の場合

$$\rho_1 = 2, \rho_2 = 3$$

について, すなわち点熱源が領域内部にある場合と, 外側境界にある場合について, それぞれ熱伝達率が

$$H_a = H_b = \infty, H_a = H_b = 1$$

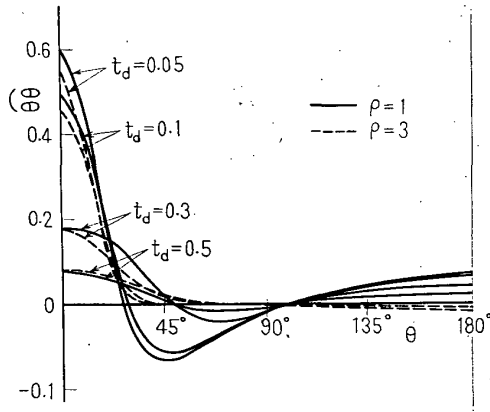


図 6 瞬間点熱源が内部にある場合の内外境界上の $\sigma_{\theta\theta}$ の分布

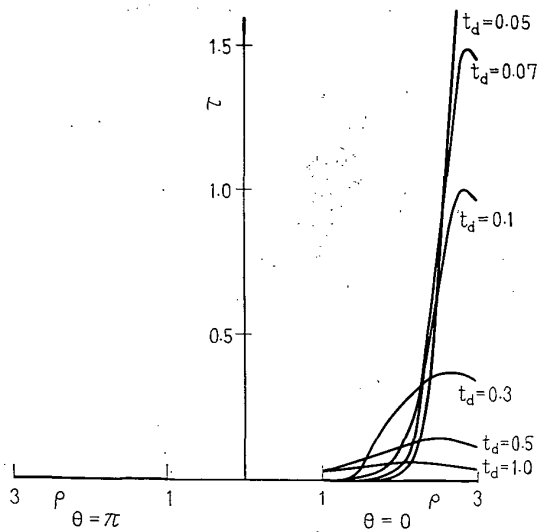


図 7 瞬間点熱源が外側境界上にある場合の温度分布

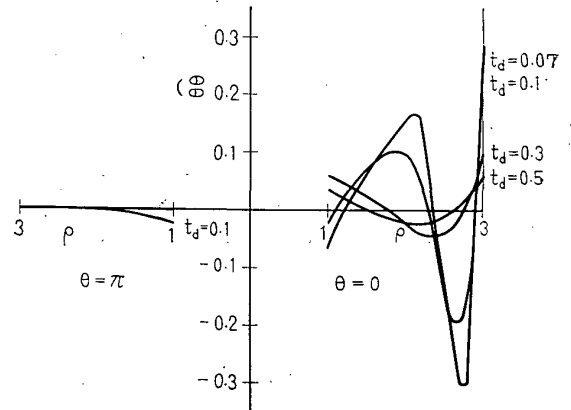


図 8 瞬間点熱源が外側境界上にある場合の $\sigma_{\theta\theta}$ の分布 ($\hat{\theta}\theta = a^2 \sigma_{\theta\theta} / KQ$)

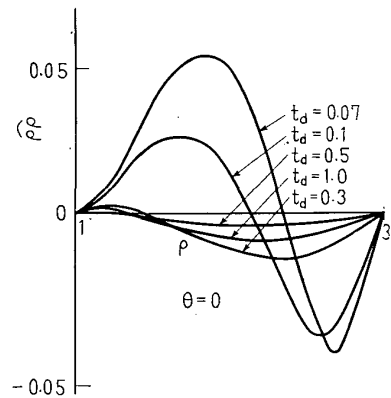


図 9 瞬間点熱源が外側境界上にある場合の σ_{rr} の分布 ($\hat{\rho}\rho = a^2 \sigma_{rr} / KQ$)

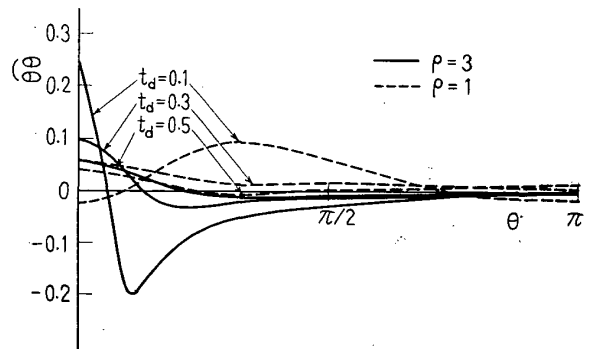


図 10 内外両境界上の $\sigma_{\theta\theta}$ の分布 ($\hat{\theta}\theta = a^2 \sigma_{\theta\theta} / KQ$)

* 本報告の結果で中空円板の場合は, 円板の上下両表面からの熱放散が十分小さくて, その影響が無視できる場合に正しい.

の各場合について行った。 $H_a=H_b=\infty$ というのは境界での熱伝達が非常によい場合である。いずれの場合も円筒の内外半径比は $\rho_0=3$ にとっている。

(a) 瞬間点熱源が領域内部にある場合 ($\rho_1=2, \beta=0, H_a=H_b=\infty$)

この場合の温度分布を図 2, 無次元応力 $\widehat{\theta\theta}, \widehat{\rho\rho}$ の $\theta=0$ の軸上の分布を図 3, 4 に示す。図 5 は $\rho=2$ 上の応力分布を θ について示したもので、図 6 は内外両境界上の応力分布を θ について示したものである。いずれの場合も無次元化時刻 t_d をパラメータとしている。この場合温度分布は点熱源の近傍では、急激に変化するが、 $\theta=\pi$ 上ではほとんど温度上昇が起こらない。フープ応力は図 3 のように熱源近傍で最大圧縮応力となり、 $\theta=0$ 軸上の両境界では大きな引張応力となっている。 $\theta=\pi$ 上では $\widehat{\theta\theta}$ は極めて小さく、 $\widehat{\rho\rho}$ に至っては 0 に近い。なお図 6 よりわかるように、内側の $\widehat{\theta\theta}$ のほうが外側の $\widehat{\theta\theta}$ よりわずかに大きい引張応力となっている。

(b) 瞬間点熱源が外側境界上にある場合 ($\rho_1=3, \beta=0, H_a=H_b=1$)

この場合の温度分布を図 7, $\theta=0$ 上の応力分布を図 8, 9 に、内外両境界上の $\widehat{\theta\theta}$ を図 10 に示す。ごく短い時刻における熱源近傍の応力分布は、熱源位置では数学的に特異点となるので正しくはつかめない

が、全体の傾向としては Hsu の無孔板の分布状態に似ている。また熱源位置はただちに塑性変形を生じるはずであるから、弾性論的に厳密性を追及しても無意味である。すなわち図 8 において、 $\rho=3$ で ∞ の圧縮応力を $t_d=0$ で発生し、その後図の状態の分布になる。

(b) の場合では熱放散の影響で、点熱源位置では、最初の瞬間に ∞ の圧縮応力が現れた直後は図 8 のように引張応力に転じ、かえって熱源位置より内部に大きな圧縮応力が現れている。このことは温度分布の図 7 からも最高温度が時刻とともに内部に移動していることより了解される。なお、中空になることの著しい差異は、中実の場合には $\theta=\pi$ 上にいくらかの熱応力を発生していたのが、中空の場合には $\theta=\pi$ 上ではほとんど熱応力を発生しないことである。

本報告では京都大学および名古屋大学の大型電算機センターを利用した。

文 献

- (1) 竹内, 機論, 32-242 (昭 41-10), 1470.
- (2) Hsu, T.R., *Trans. ASME, Ser. E*, 36-1 (1969-3), 113.
- (3) Boley, B.A. and Weiner, J.E., *Theory of Thermal Stresses*, (1960), 292, J. Wiley; 本式の詳細な誘導法については竹内, 熱応力, (昭 46), 53, 日新出版, を参照のこと。

討 論

〔質問〕 福井 清 (立命館大学理工学部)

典型的, 基礎的であるが取扱いがむずかしいリング状体における瞬間点熱源問題の解を誘導されていることに対して敬意を表する。

(1) 本問題の解を得るためであれば、 $\theta=\beta$ ではなく、 $\theta=0$ として解析しても、本物体が軸対称体であるので、解の一般性は損なわれず、解の結果もまた手数も相当簡単になると考えられる。

(2) 図 8 において、熱源の存在する点 (この場合は外側の境界上) の近傍における諸応力は圧縮になると考えられるが、本図において、 $\widehat{\theta\theta}$ が正になっているように見受けられる。これでよいのだろうか。

〔回答〕 (1) $\theta=\beta$ について対称として解析をおこなったが、 $\theta=0$ として解析した場合と比較して手数はほとんどかわらない上、種々の応用 (異なった位置の多数点熱源の問題) の面上、一般性が多いと思う。

(2) 図 8 の応力分布はいずれも瞬間点熱源が作用した後、ある程度時間が経過後のものであるから、図 7 を参照すると各時間に対する最高温度は瞬間点熱源の位置 (境界上) よりも内側に移動していることに対応し、境界より内側で最大圧縮応力が生じ、温度の低い境界上では引張応力が生じると考える。