

539.377::539.371

多数の連続点熱源による直交異方性中空円板の非定常熱応力*

野田直剛**, 竹内洋一郎***, 井出千秀****

1. 緒 言

近年工業材料の多種多様化に伴い、異方性体に属する工業材料も多く現れ、異方性材料の熱応力は重要問題となってきた。異方性体は等方性体に比較して、数学的取扱いが複雑になるため、比較的研究発表が少なく今後の課題とされている。例えば、等方性円板に熱源が作用する問題について、竹内は瞬間熱源が作用する円板の熱応力⁽¹⁾⁽²⁾を、T. R. Hus は瞬間および連続点熱源が作用する円板の熱応力⁽³⁾⁽⁴⁾を解析した。これらの研究は、いずれも単連結領域であるので、変位の一個性の吟味を必要としないが、中空円板になると複連結領域となり、応力関数法による時、回転、変位が一個であるためのミッチェルの条件が付加され問題が複雑になる。この種の問題については、野田らは瞬間点熱源が作用する中空円板の熱応力⁽⁵⁾を解析した。一方、異方性円板については、J. Parida と A. K. Das は瞬間点熱源による直交異方性円板の熱応力⁽⁶⁾を、さらに竹内らは瞬間点熱源による直交異方性中空円板の熱応力⁽⁷⁾を解析した。そこで本研究では実際問題に近づける意味で、多数の連続点熱源が作用する直交異方性中空円板の非定常熱応力を回転・変位の一個性を保証するミッチェルの条件を用いて解析した。温度分布はこの種の問題に効果的なラプラス、フーリエ余弦、有限ハンケルの各変換を用いて解析した。

度、 W は単位時間、単位面積当たりの発熱量、 $H(t)$ はヘビサイドのステップ関数である。

図 1 に示すように内半径 a 、外半径 b の中空円板上の半径 r_1 の円周上に等間隔に並ぶ p 個の同じ強さ Q の偏心点熱源が作用するとき、

$$\frac{W}{\lambda r} = Q \frac{\delta(r-r_1)}{\lambda r} \sum_{i=1}^p \delta\left\{\theta - \frac{2\pi}{p}(i-1)\right\} \dots\dots\dots (2)$$

と置くことができる。ここで、 δ はディラックの δ 関

表 1 記号

T : 温度	J_n, Y_n : n 次のベッセル関数
t : 時間	ϵ_{ij} : ひずみ成分
$H(t)$: ヘビサイドのステップ関数	σ_{ij} : 応力成分
$\alpha^2 = \lambda_\theta / \lambda_r$	α_1, α_2 : r, θ 方向の線膨張係数
$\beta^2 = \lambda_0 / c\gamma$	$a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{66}$: 弾性定数
$\lambda_r, \lambda_\theta$: r, θ 方向の熱伝導率	χ : 応力関数
c : 比熱	$\beta_1 = a_{11} / a_{22}$
γ : 密度	$\beta_2 = (a_{12} + a_{66}) / a_{22}$
W : 単位時間、単位面積当たりの発熱量	$\nu = \alpha_1 / \alpha_2$
Q : 点熱源の強さ	$\rho = r/a$
a : 内半径	$\rho_0 = b/a$
b : 外半径	$\rho_1 = r_1/a$
p : 熱源の数	$t_d = \beta^2 t / a^2$
r_1 : 熱源の位置	$H_a = ah_a$
δ : ディラックの δ 関数	$H_b = ah_b$
δ_{ij} : クロネッカーのデルタ	$\tau = \lambda_0 T / Q$
h_a, h_b : 内、外側境界での相対熱伝達率	$\hat{\rho}\rho = \lambda_0 \sigma_{rr} / \nu Q$
	$\hat{\theta}\theta = \lambda_0 \sigma_{\theta\theta} / \nu Q$

2. 解 析

2.1 温度分布 極座標系表示 (r, θ) による r, θ 方向の直交異方性材料の二次元非定常熱伝導方程式は、

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\alpha^2}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{W}{\lambda r} H(t) \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 T は温度、 $\alpha^2 = \lambda_\theta / \lambda_r$ 、 $\beta^2 = \lambda_0 / c\gamma$ 、 $\lambda_r, \lambda_\theta$ はそれぞれ r, θ 方向の熱伝導率、 c は比熱、 γ は密

* 昭和 51 年 6 月 30 日 関西支部第 235 回講演会において講演、原稿受付 昭和 52 年 8 月 12 日。
 ** 正員、静岡大学工学部 (浜松市城北 3-5-1)。
 *** 正員、大阪府立大学工学部。
 **** 学生員、静岡大学大学院。

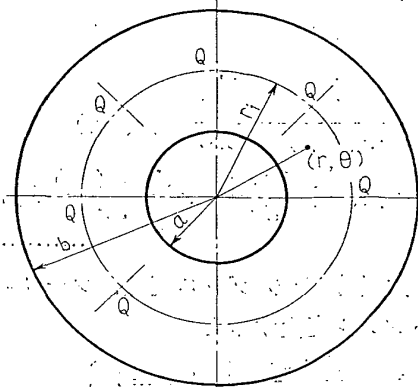


図 1 多数の連続点熱源を有する直交異方性中空円板

数である。初期条件と境界条件は

$$t=0 \text{ で } T=0 \dots\dots\dots(3)$$

$$\left. \begin{aligned} r=a \text{ で } \frac{\partial T}{\partial r} - h_a T &= 0 \\ r=b \text{ で } \frac{\partial T}{\partial r} + h_b T &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4)$$

とする。ここで、 h_a と h_b はそれぞれ内・外境界における相対熱伝達率である。

T のラプラス変換を T^* と書き、 s をラプラス変換のパラメータとすると、式(3)を用いて式(1)をラプラス変換すれば、

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^*}{\partial r} + \frac{\alpha^2}{r^2} \frac{\partial^2 T^*}{\partial \theta^2} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 s T^* - Q \frac{\delta(r-r_1)}{\lambda r s r} \sum_{i=1}^p \delta\left\{\theta - \frac{2\pi}{p}(i-1)\right\} \dots\dots(5)$$

となる。フーリエ余弦変換を

$$T_n^* = \int_0^{2\pi} T^* \cos n\theta d\theta \dots\dots\dots(6)$$

で定義し、式(5)をフーリエ余弦変換すれば

$$\frac{d^2 T_{pn}^*}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT_{pn}^*}{dr} - \frac{p^2 n^2 \alpha^2}{r^2} T_{pn}^* = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 s T_{pn}^* - \frac{pQ}{sr\lambda r} \delta(r-r_1) \dots\dots\dots(7)$$

となる。ただし

$$T_{pn}^* = \int_0^{2\pi} T^* \cos pn\theta d\theta$$

有限ハンケル変換を次式で定義する。

$$\bar{f}(\xi) = \int_a^b r u_{\alpha pn}(\xi r) f(r) dr \dots\dots\dots(8)$$

ただし、

$$\begin{aligned} u_{\alpha pn}(\xi r) &= \left\{ \left(1 - \frac{\alpha pn}{ah_a}\right) J_{\alpha pn}(\xi a) \right. \\ &+ \frac{\xi}{h_a} J_{\alpha pn+1}(\xi a) \left. \right\} Y_{\alpha pn}(\xi r) \\ &- \left\{ \left(1 - \frac{\alpha pn}{ah_a'}\right) Y_{\alpha pn}(\xi a) \right. \\ &+ \frac{\xi}{h_a} Y_{\alpha pn+1}(\xi a) \left. \right\} J_{\alpha pn}(\xi r) \dots\dots\dots(9) \end{aligned}$$

ここで、 J_n, Y_n は n 次のベッセル関数である。式(7)を有限ハンケル変換すると、

$$\begin{aligned} \bar{T}_{pn} &= \frac{1}{\xi^2 + (\alpha/\beta)^2 s} \left\{ \frac{pQ}{\lambda r s} u_{\alpha pn}(\xi r_1) \right. \\ &+ \left[r u_{\alpha pn}(\xi r) \frac{dT_{pn}^*}{dr} - r \frac{du_{\alpha pn}(\xi r)}{dr} T_{pn}^* \right]_a^b \left. \right\} \dots\dots\dots(10) \end{aligned}$$

境界条件式(4)をラプラス変換、フーリエ余弦変換、有限ハンケル変換すると

$$\left. \begin{aligned} r=a \text{ で } \frac{d\bar{T}_{pn}^*}{dr} - h_a \bar{T}_{pn}^* &= 0 \\ r=b \text{ で } \frac{d\bar{T}_{pn}^*}{dr} + h_b \bar{T}_{pn}^* &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(11)$$

となる。さて、 $\xi_{n,m}$ を次式を満足する ξ_n の第 m 番目の正根とする。

$$\left(1 + \frac{\alpha pn}{bh_b}\right) u_{\alpha pn}(b\xi_n) - \frac{\xi_n}{h_b} v_{\alpha pn}(b\xi_n) = 0 \dots\dots(12)$$

ただし、

$$\begin{aligned} v_{\alpha pn}(\xi r) &= \left\{ \left(1 - \frac{\alpha pn}{ah_a}\right) J_{\alpha pn}(\xi a) \right. \\ &+ \frac{\xi}{h_a} J_{\alpha pn+1}(\xi a) \left. \right\} Y_{\alpha pn+1}(\xi r) \\ &- \left\{ \left(1 - \frac{\alpha pn}{ah_a}\right) Y_{\alpha pn}(\xi a) \right. \\ &+ \frac{\xi}{h_a} Y_{\alpha pn+1}(\xi a) \left. \right\} J_{\alpha pn+1}(\xi r) \dots\dots\dots(13) \end{aligned}$$

式(11)と(12)を式(10)に代入すると、像空間における温度分布として次式を得る。

$$\bar{T}_{pn}^* = \frac{pQ u_{\alpha pn}(\xi_n r_1)}{\lambda r s \{(\alpha^2/\beta^2)s + \xi_n^2\}} \dots\dots\dots(14)$$

さて、式(14)を有限ハンケル逆変換、フーリエ余弦逆変換、ラプラス逆変換を行う。まず有限ハンケル逆変換を行うと

$$T_{pn}^* = \frac{pQ}{\lambda r s} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{u_{\alpha pn}(\xi_{n,m} r_1)}{q_{\alpha pn}(\xi_{n,m})} \frac{u_{\alpha pn}(\xi_{n,m} r)}{(\alpha^2/\beta^2)s + \xi_{n,m}^2} \dots\dots\dots(15)$$

ただし、

$$q_{\alpha pn}(\xi_{n,m}) = \int_a^b r u_{\alpha pn}^2(\xi_{n,m} r) dr$$

次に、式(15)をフーリエ余弦逆変換すると

$$\begin{aligned} T^* &= \frac{pQ}{\lambda r s} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{u_{\alpha pn}(\xi_{n,m} r_1)}{\pi \varepsilon_n q_{\alpha pn}(\xi_{n,m})} \\ &\times \frac{u_{\alpha pn}(\xi_{n,m} r)}{(\alpha^2/\beta^2)s + \xi_{n,m}^2} \cos pn\theta \dots\dots\dots(16) \end{aligned}$$

ただし、 $\varepsilon_0=2, \varepsilon_1=\varepsilon_2=\dots=1$ 。

最後に式(16)をラプラス逆変換すると、求める温度分布は次式となる。

$$\begin{aligned} T &= \frac{Q}{\pi \lambda r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{u_{\alpha pn}(\xi_{n,m} r_1)}{\varepsilon_n q_{\alpha pn}(\xi_{n,m})} \\ &\times \frac{u_{\alpha pn}(\xi_{n,m} r)}{\xi_{n,m}^2} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\beta^2}{\alpha^2} \xi_{n,m}^2 t\right) \right\} \cos pn\theta \dots\dots\dots(17) \end{aligned}$$

2.2 熱応力解析 極座標方向 (r, θ) の直交異方性体の応力-ひずみ関係式は

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= a_{11}\sigma_{rr} + a_{12}\sigma_{\theta\theta} + \alpha_1 T \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= a_{12}\sigma_{rr} + a_{22}\sigma_{\theta\theta} + \alpha_2 T \\ \varepsilon_{r\theta} &= a_{66}\sigma_{r\theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(18)$$

ただし、 ε_{ij} はひずみ成分、 σ_{ij} は応力成分、 α_1 と α_2 はそれぞれ r, θ 方向の線膨張係数、 $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{66}$ は弾性定数である。

応力関数を χ とすると, χ が満足すべき基礎式は

$$\left\{ r^4 \frac{\partial^4}{\partial r^4} + 2r^3 \frac{\partial^3}{\partial r^3} - \beta_1 r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \beta_1 r \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} - 2\beta_2 r \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta^2} + 2\beta_2 r^2 \frac{\partial^4}{\partial r^2 \partial \theta^2} + (2\beta_1 + \beta_2) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \beta_1 \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} \right\} \chi$$

$$= -\nu \left\{ r^4 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + (2-\mu)r^3 \frac{\partial}{\partial r} + \mu r^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} T \dots\dots\dots (19)$$

ただし, $\beta_1 = a_{11}/a_{22}$, $\beta_2 = (a_{12} + a_{66})/a_{22}$, $\nu = \alpha_2/a_{22}$, $\mu = \alpha_1/\alpha_2$.

熱応力は,

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2}, \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right) \dots\dots\dots (19)'$$

境界条件は,

$$\left. \begin{aligned} r=a \text{ で } \quad \chi = \frac{\partial \chi}{\partial r} = 0 \\ r=b \text{ で } \quad \chi = C_1 x + C_2 y + C_3, \quad \frac{\partial \chi}{\partial r} = C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

回転, 変位が一価であるためのミッチェルの条件は, 極座標系表示で

$$\left. \begin{aligned} \oint \left[\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\beta_2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} \chi - (\beta_1 - 1) \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} \right. \\ \left. - (\beta_1 - \beta_2) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} - \nu \frac{\partial T}{\partial r} - \nu(\mu - 1) \frac{T}{r} \right] r d\theta = 0 \\ \oint \left[\cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \beta_2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \beta_1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} \right) + \mu \nu T \right\} \right. \\ \left. - r \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \beta_2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} \right) + \nu T \right\} \right] r d\theta = 0 \\ \oint \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \beta_2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \beta_1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} \right) + \mu \nu T \right\} \right. \\ \left. + r \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \beta_2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} \right) + \nu T \right\} \right] r d\theta = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

式 (19) の χ の一般解を求めるため, 式 (17) を考慮して, 応力関数 χ を次のように置く.

$$x = \frac{\nu p Q}{\lambda r \pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} R_{pn}(\xi_n, mr) \frac{u_{\alpha pn}(\xi_n, mr)}{\varepsilon_n \xi_n, m^2 q_{\alpha pn}(\xi_n, m)} \left\{ 1 - \exp \left(-\frac{\beta^2}{\alpha^2} \xi_n, m^2 t \right) \right\} \cos pn\theta \dots\dots\dots (22)$$

式 (22) を式 (19) に代入すると, $R_{pn}(\xi_n, mr)$ が満足すべき方程式として次式を得る.

$$\left[\frac{d^4}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3}{dr^3} - \frac{\beta_1 + 2\beta_2 p^2 n^2}{r^2} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\beta_1 + 2\beta_2 p^2 n^2}{r^3} \frac{d}{dr} \right. \\ \left. + \frac{\beta_1 (p^2 n^2 - 1)^2 - (\beta_1 + 2\beta_2 p^2 n^2)}{r^4} \right] R_{pn}(\xi_n, mr) = -f_{pn}(\xi_n, mr) \dots\dots\dots (23)$$

ただし,

$$r^2 f_{pn}(\xi_n, mr) = \{ (\alpha^2 - \mu) p^2 n^2 + (1 - \mu) \alpha p n - \xi_n, m^2 r^2 \} u_{\alpha pn}(\xi_n, mr) + (\mu - 1) \xi_n, m r \nu_{\alpha pn}(\xi_n, mr)$$

式 (23) の一般解は

1) $n=0$ でかつ $\beta_1=1$ のとき

$$R_{p0}(\xi_0, mr) = C_{01} + C_{02} r^2 + C_{03} \ln r + C_{04} r^2 \ln r + \frac{1}{4} \left\{ \int_a^r r^3 (\ln r - 1) f_{p0}(\xi_0, mr) \right. \\ \left. \times dr + r^2 \int_a^r r (\ln r + 1) f_{p0}(\xi_0, mr) dr - \ln r \int_a^r r^3 f_{p0}(\xi_0, mr) dr - r^2 \ln r \int_a^r r f_{p0}(\xi_0, mr) dr \right\} \dots\dots\dots (24)$$

2) $pn=1$ ($p=1$ でかつ $n=1$) のとき,

$$R_{11}(\xi_1, mr) = C_{11} r + C_{12} r^{1+\lambda} + C_{13} r^{1-n} + C_{14} r \ln r + \frac{1}{\lambda^2} \left\{ -r \int_a^r r^2 \ln r f_{11}(\xi_1, mr) dr \right. \\ \left. - \frac{r^{1+\lambda}}{2\lambda} \int_a^r r^{2-\lambda} f_{11}(\xi_1, mr) dr + \frac{r^{1-\lambda}}{2\lambda} \int_a^r r^{\lambda+2} f_{11}(\xi_1, mr) dr + r \ln r \int_a^r r^2 f_{11}(\xi_1, mr) dr \right\} \dots\dots\dots (25)$$

3) 1) と 2) 以外のとき

$$R_{pn}(\xi_{n,m}r) = C_{n1}r^{1-s_2} + C_{n2}r^{1-s_1} + C_{n3}r^{s_2+1} + C_{n4}r^{1+s_2} + \frac{1}{2(s_2^2-s_1^2)} \\ \times \left\{ \frac{r^{1+s_1}}{s_1} \int_a^r r^{2-s_1} f_{pn}(\xi_{n,m}r) dr - \frac{r^{1-s_1}}{s_1} \int_a^r r^{2+s_1} f_{pn}(\xi_{n,m}r) dr \right. \\ \left. - \frac{r^{1+s_2}}{s_2} \int_a^r r^{2-s_2} f_{pn}(\xi_{n,m}r) dr + \frac{r^{1-s_2}}{s_2} \int_a^r r^{2+s_2} f_{pn}(\xi_{n,m}r) dr \right\} \dots\dots\dots(26)$$

ただし, $\lambda^2 = 1 + \beta_1 + 2\beta_2$, s_1^2 と s_2^2 は方程式

$$s^4 - (1 + \beta_1 + 2\beta_2 p^2 n^2) s^2 + \beta_1 (p^2 n^2 - 1)^2 = 0 \dots\dots\dots(27)$$

の2実根であり, $n=0$ のとき, $s_1^2 = \beta_1$, $s_2^2 = 1$ である.

式(22) と式(24)~(26) をミッチェルの条件式(21) に代入すると,

$$C_{04} = \left. \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \left\{ (\mu-1) \frac{1}{ah_a} - 1 \right\} & \beta_1 = 1 \text{ のとき} \\ \frac{1}{\pi(1-\beta_1)} \left(\frac{\mu-1}{ah_a} - 1 \right) & \beta_1 \neq 1 \text{ のとき} \end{cases} \right\} \dots\dots\dots(28)$$

$$C_{14} = \frac{2a}{\pi\lambda^2} \left(1 - \frac{\mu}{ah_a} \right)$$

を得る.

偏心点熱源の位置の対称性と式(22) を考慮すると, 境界条件式(20) は

$$\left. \begin{aligned} r=a \text{ で } \chi &= \frac{\partial \chi}{\partial r} = 0 \\ r=b \text{ で } \chi &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\nu p Q u_{\alpha p n}(\xi_{n,m}r_1)}{\lambda r \pi \varepsilon n \xi_{n,m}^2 q_{\alpha p n}(\xi_{n,m})} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\beta^2}{\alpha^2} \xi_{n,m}^2 t\right) \right\} \\ &\quad \times (A \delta_{n1} \delta_{p1} x + C \delta_{n0}) \\ r=b \text{ で } \partial \chi / \partial r &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\nu p Q u_{\alpha p n}(\xi_{n,m}r_1)}{\lambda r \pi \varepsilon n \xi_{n,m}^2 q_{\alpha p n}(\xi_{n,m})} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\beta^2}{\alpha^2} \xi_{n,m}^2 t\right) \right\} \\ &\quad \times A \delta_{n1} \delta_{p1} \cos \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(29)$$

と書き直すことができる. 式(24)~(26) の未知定数は式(29) より決定される.

1) $n=0$ であつ $\beta_1=1$ のとき

$$\left. \begin{aligned} C_{01} + C_{02}a^2 + C_{03} \ln a &= -\frac{1}{2\pi} \left\{ (\mu-1) \frac{1}{ah_a} - 1 \right\} a^2 \ln a \\ 2C_{02}a + C_{03}a^{-1} &= -\frac{a}{2\pi} \left\{ (\mu-1) \frac{1}{ah_a} - 1 \right\} (2 \ln a + 1) \\ C_{01} + C_{02}b^2 + C_{03} \ln b - C &= -\frac{b^2}{2\pi} \left\{ (\mu-1) \frac{1}{ah_a} - 1 \right\} \ln b - D_{01}(\xi_{0,m}) \\ 2C_{02}b + C_{03}b^{-1} &= -\frac{b}{2\pi} \left\{ (\mu-1) \frac{1}{ah_a} - 1 \right\} (2 \ln b + 1) - D_{02}(\xi_{0,m}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(30)$$

ただし,

$$D_{01}(\xi_{0,m}) = \frac{1}{4} \left\{ \int_a^b r^3 (\ln r - 1) f_{p0}(\xi_{0,m}r) dr + b^2 \int_a^b r (\ln r + 1) f_{p0}(\xi_{0,m}r) dr \right. \\ \left. - \ln b \int_a^b r^3 f_{p0}(\xi_{0,m}r) dr - b^2 \ln b \int_a^b r f_{p0}(\xi_{0,m}r) dr \right\}$$

$$D_{02}(\xi_{0,m}) = \frac{1}{4} \left\{ 2b \int_a^b r (\ln r + 1) f_{p0}(\xi_{0,m}r) dr - b^{-1} \int_a^b r^3 f_{p0}(\xi_{0,m}r) dr \right. \\ \left. - b(2 \ln b + 1) \int_a^b r f_{p0}(\xi_{0,m}r) dr \right\}$$

2) $pn=1$ ($p=1$ であつ $n=1$) のとき

$$\left. \begin{aligned} C_{11}a + C_{12}a^{1+\lambda} + C_{13}a^{1-\lambda} &= -\frac{2a}{\lambda^2\pi} \left(1 - \frac{\mu}{aha}\right) a \ln a \\ C_{11} + (1+\lambda)C_{12}a^\lambda + (1-\lambda)C_{13}a^{-\lambda} &= -\frac{2a}{\lambda^2\pi} \left(1 - \frac{\mu}{aha}\right) (\ln a + 1) \\ C_{11}b + C_{12}b^{1+\lambda} + C_{13}b^{1-\lambda} - Ab &= -\frac{2a}{\lambda^2\pi} \left(1 - \frac{\mu}{aha}\right) b \ln b - D_{11}(\xi_{1,m}) \\ C_{11} + (1+\lambda)C_{12}b^\lambda + (1-\lambda)C_{13}b^{-\lambda} - A &= -\frac{2a}{\lambda^2\pi} \left(1 - \frac{\mu}{aha}\right) (\ln b + 1) - D_{12}(\xi_{1,m}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

ただし,

$$\begin{aligned} D_{11}(\xi_{1,m}) &= \frac{1}{\lambda^2} \left\{ -b \int_a^b r^2 \ln r f_{11}(\xi_{1,m}r) dr - \frac{b^{1+\lambda}}{2\lambda} \int_a^b r^{2-\lambda} f_{11}(\xi_{1,m}r) dr \right. \\ &\quad \left. + \frac{b^{1-\lambda}}{2\lambda} \int_a^b r^{\lambda+2} f_{11}(\xi_{1,m}r) dr + b \ln b \int_a^b r^2 f_{11}(\xi_{1,m}r) dr \right\} \\ D_{12}(\xi_{1,m}) &= \frac{1}{\lambda^2} \left\{ -\frac{1+\lambda}{2\lambda} b^\lambda \int_a^b r^{2-\lambda} f_{11}(\xi_{1,m}r) dr + \frac{1-\lambda}{2\lambda} b^{-\lambda} \int_a^b r^{\lambda+2} \right. \\ &\quad \left. \times f_{11}(\xi_{1,m}r) dr + (\ln b + 1) \int_a^b r^2 f_{11}(\xi_{1,m}r) dr \right\} \end{aligned}$$

3) 1) と 2) 以外のとき

$$\left. \begin{aligned} C_{n1}a^{1-s_2} + C_{n2}a^{1-s_1} + C_{n3}a^{1+s_1} + C_{n4}a^{1+s_2} &= -\frac{a^2}{\pi(1-\beta_1)} \left(\frac{\mu-1}{aha} - 1\right) \delta_{0n} \\ (1-s_2)C_{n1}a^{-s_2} + (1-s_1)C_{n2}a^{-s_1} + (1+s_1)C_{n3}a^{s_1} + (1+s_2)C_{n4}a^{s_2} &= -\frac{2a}{\pi(1-\beta_1)} \left(\frac{\mu-1}{aha} - 1\right) \delta_{0n} \\ C_{n1}b^{1-s_2} + C_{n2}b^{1-s_1} + C_{n3}b^{1+s_1} + C_{n4}b^{1+s_2} &= -\frac{b^2}{\pi(1-\beta_1)} \left(\frac{\mu-1}{aha} - 1\right) \delta_{0n} - D_{n1}(\xi_{n,m}) \\ (1-s_2)C_{n1}b^{-s_2} + (1-s_1)C_{n2}b^{-s_1} + (1+s_1)C_{n3}b^{s_1} + (1+s_2)C_{n4}b^{s_2} &= -\frac{2b}{\pi(1-\beta_1)} \left(\frac{\mu-1}{aha} - 1\right) \delta_{0n} - D_{n2}(\xi_{n,m}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

ただし, δ_{ij} はデルタ関数,

$$\begin{aligned} D_{n1}(\xi_{n,m}) &= \frac{1}{2(s_2^2 - s_1^2)} \left\{ \frac{b^{1+s_1}}{s_1} \int_a^b r^{2-s_1} f_{pn}(\xi_{n,m}r) dr - \frac{b^{1-s_1}}{s_1} \int_a^b r^{2+s_1} f_{pn}(\xi_{n,m}r) dr \right. \\ &\quad \left. - \frac{b^{1+s_2}}{s_2} \int_a^b r^{2-s_2} f_{pn}(\xi_{n,m}r) dr + \frac{b^{1-s_2}}{s_2} \int_a^b r^{2+s_2} f_{pn}(\xi_{n,m}r) dr \right\} \\ D_{n2}(\xi_{n,m}) &= \frac{1}{2(s_2^2 - s_1^2)} \left\{ \frac{1+s_1}{s_1} b^{s_1} \int_a^b r^{2-s_1} f_{pn}(\xi_{n,m}r) dr - \frac{1-s_1}{s_1} b^{-s_1} \int_a^b r^{2+s_1} f_{pn}(\xi_{n,m}r) dr \right. \\ &\quad \left. - \frac{1+s_2}{s_2} b^{s_2} \int_a^b r^{2-s_2} f_{pn}(\xi_{n,m}r) dr + \frac{1-s_2}{s_2} \int_a^b r^{2+s_2} f_{pn}(\xi_{n,m}r) dr \right\} \end{aligned}$$

未知定数は上記の四元連立一次方程式を解くことにより決定される.

よって, 各熱応力成分は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{\nu p Q}{\lambda r \pi} \left[\delta_{1\beta_1} \sum_{m=1}^{\infty} \left[2C_{02} + C_{08}r^{-2} + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\mu-1}{aha} - 1\right) (2 \ln r + 3) + \frac{1}{4} \left\{ 2 \int_a^r r (\ln r + 1) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times f_0(\xi_{0,m}r) dr - r^2 \int_a^r r^3 f_0(\xi_{0,m}r) dr - (2 \ln r + 3) \int_a^r r f_0(\xi_{0,m}r) dr \right\} \right] \\ &\quad \times \frac{u_0(\xi_{0,m}r_1)}{2\xi_{0,m}^2 q_0(\xi_{0,m})} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\beta^2}{\alpha^2} \xi_{0,m}^2 t\right) \right\} + (1 - \delta_{1\beta_1}) \sum_{m=1}^{\infty} \left[-(\eta - 1) C_{02} r^{-\eta-1} - C_{08} (\eta + 1) r^{\eta+1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\pi(1-\beta_1)} \left(\frac{\mu-1}{aha} - 1\right) + \frac{1}{2(1-\beta_1)\eta} \left\{ (\eta - 1) r^{-\eta-1} \int_a^r r^{\eta+2} f_{p0}(\xi_{0,m}r) dr + (\eta + 1) r^{\eta-1} \int_a^r r^{2-\eta} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times f_{p0}(\xi_{0,m}r) dr - 2\eta \int_a^r r f_{p0}(\xi_{0,m}r) dr \right\} \right] \frac{u_0(\xi_{0,m}r_1)}{2\xi_{0,m}^2 q_0(\xi_{0,m})} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\beta^2}{\alpha^2} \xi_{0,m}^2 t\right) \right\} \\ &\quad \left. + \delta_{1\beta} \sum_{m=1}^{\infty} \left[C_{12} \lambda r^{\lambda-1} - C_{13} \lambda r^{-\lambda-1} + \frac{2a}{\pi \lambda^2} \left(1 - \frac{\mu}{aha}\right) r^{-1} + \frac{1}{2\lambda^2} \left\{ -r^{\lambda-1} \int_a^r r^{2-\lambda} \right. \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times f_{11}(\xi_{1,mr})dr - r^{-\lambda-1} \int_a^r r^{\lambda+2} f_{11}(\xi_{1,mr})dr + r^{-1} \int_a^r r^2 f_{11}(\xi_{1,mr})dr \Big] \frac{u_\alpha(\xi_{1,mr_1})}{\xi_{1,m^2} q_1(\xi_{1,m})} \\
& \times \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\beta^2}{\alpha^2} \xi_{p,m^2} t\right) \right\} \cos \theta + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_p^n \left[-C_{n1}(s_2 + p^2 n^2 - 1) r^{-s_2-1} - C_{n2}(s_1 + p^2 n^2 - 1) \right. \\
& \times r^{-s_1-1} + C_{n3}(s_1 - p^2 n^2 + 1) r^{s_1-1} + C_{n4}(s_2 - p^2 n^2 + 1) r^{s_2-1} + \frac{1}{2(s_2^2 - s_1^2)} \left\{ -\frac{s_1 + 1 - p^2 n^2}{s_1} r^{s_1-1} \right. \\
& \times \int_a^r r^{2-s_1} f_{pn}(\xi_{n,mr})dr + \frac{s_2 + 1 - p^2 n^2}{s_2} r^{s_2-1} \int_a^r f_{pn}(\xi_{n,mr}) r^{-s_2+2} dr + \frac{s_2 - 1 + p^2 n^2}{s_2} \\
& \times r^{-s_2-1} \int_a^r f_{pn}(\xi_{n,mr}) r^{s_2+2} dr - \frac{s_1 - 1 + p^2 n^2}{s_1} r^{-s_1-1} \int_a^r f_{pn}(\xi_{n,mr}) r^{s_1+2} dr \Big] \\
& \times \frac{u_{\alpha pn}(\xi_{n,mr_1})}{\xi_{n,m^2} q_{\alpha pn}(\xi_{n,m})} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\beta^2}{\alpha^2} \xi_{n,m^2} t\right) \right\} \cos pn\theta \Big] \dots \dots \dots (33) \\
\sigma_{\theta\theta} = & \frac{\nu p Q}{\lambda r \pi} \left[\delta_{1\beta_1} \sum_{m=1}^{\infty} \left[2C_{02} - C_{08} r^{-2} + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\mu-1}{ah_a} - 1 \right) (2 \ln r + 3) + \frac{1}{4} \left\{ 2 \int_a^r r (\ln r + 1) \right. \right. \right. \\
& \times f_0(\xi_{0,mr})dr + r^{-2} \int_a^r r^3 f_0(\xi_{0,mr})dr - (2 \ln r + 3) \int_a^r r f_0(\xi_{0,mr})dr \Big] \frac{u_0(\xi_{0,mr_1})}{2\xi_{0,m^2} q_0(\xi_{0,m})} \\
& \times \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\beta^2}{\alpha^2} \xi_{0,m^2} t\right) \right\} + (1 - \delta_{1\beta_1}) \sum_{m=1}^{\infty} \left[\eta(\eta-1) C_{02} r^{-\eta-1} + \eta(\eta+1) r^{\eta-1} C_{08} + \frac{2}{\pi(1-\beta_1)} \right. \\
& \times \left(\frac{\mu-1}{ah_a} - 1 \right) + \frac{1}{2(1-\beta_1)} \left\{ (1-\eta) r^{-\eta-1} \int_a^r r^{\eta+2} f_{p0}(\xi_{0,mr})dr + (\eta+1) r^{\eta-1} \int_a^r r^{2-\eta} f_{p0}(\xi_{0,mr})dr \right. \\
& \left. \left. - 2 \int_a^r r f_{p0}(\xi_{0,mr})dr \right] \frac{u_0(\xi_{0,mr_1})}{2\xi_{0,m^2} q_0(\xi_{0,m})} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\beta^2}{\alpha^2} \xi_{0,m^2} t\right) \right\} + \delta_{1p} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\lambda(\lambda+1) C_{12} r^{\lambda-1} \right. \right. \\
& + \lambda(\lambda-1) C_{18} r^{-\lambda-1} + \frac{2a}{\pi \lambda^2} \left(1 - \frac{\mu}{ah_a} \right) r^{-1} + \frac{1}{\lambda^2} \left\{ -\frac{\lambda+1}{2} r^{\lambda-1} \int_a^r r^{2-\lambda} f_{11}(\xi_{1,mr})dr \right. \\
& + \frac{\lambda-1}{2} r^{-\lambda-1} \int_a^r r^{2+\lambda} f_{11}(\xi_{1,mr})dr + r^{-1} \int_a^r r^2 f_{11}(\xi_{1,mr})dr \Big] \frac{u_\alpha(\xi_{1,mr_1})}{\xi_{1,m^2} q_1(\xi_{1,m})} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\beta^2}{\alpha^2} \xi_{1,m^2} t\right) \right\} \\
& \times \cos \theta + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_p^n \left[C_{n1} s_2 (s_2 - 1) r^{-s_2-1} + C_{n2} s_1 (s_1 - 1) r^{-s_1-1} + C_{n3} s_1 (s_1 + 1) \right. \\
& \times r^{s_1-1} + C_{n4} s_2 (s_2 + 1) r^{s_2-1} + \frac{1}{2(s_2^2 - s_1^2)} \left\{ (s_1 + 1) r^{s_1-1} \int_a^r r^{2-s_1} f_{pn}(\xi_{n,mr})dr \right. \\
& - (s_1 - 1) r^{-s_1-1} \int_a^r r^{s_1+2} f_{pn}(\xi_{n,mr})dr - (s_2 + 1) r^{s_2-1} \int_a^r r^{2-s_2} f_{pn}(\xi_{n,mr})dr \\
& \left. \left. + (s_2 - 1) r^{-s_2-1} \int_a^r r^{s_2+2} f_{pn}(\xi_{n,mr})dr \right] \frac{u_{\alpha pn}(\xi_{n,mr_1})}{\xi_{n,m^2} q_{\alpha pn}(\xi_{n,m})} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\beta^2}{\alpha^2} \xi_{n,m^2} t\right) \right\} \cos pn\theta \Big] \dots \dots \dots (34)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{r\theta} = & \frac{\nu p Q}{\lambda r \pi} \left[\delta_{1p} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\lambda C_{12} r^{\lambda-1} - \lambda C_{18} r^{-\lambda-1} + \frac{2a}{\pi \lambda^2} \left(1 - \frac{\mu}{ah_a} \right) r^{-1} + \frac{1}{2\lambda^2} \right. \right. \\
& \times \left\{ -r^{\lambda-1} \int_a^r r^{2-\lambda} f_{11}(\xi_{1,mr})dr - r^{-\lambda-1} \int_a^r r^{\lambda+2} f_{11}(\xi_{1,mr})dr + 2r^{-1} \int_a^r r^2 f_{11}(\xi_{1,mr})dr \right\} \\
& \times \frac{u_\alpha(\xi_{1,mr_1})}{\xi_{1,m^2} q_1(\xi_{1,m})} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\beta^2}{\alpha^2} \xi_{1,m^2} t\right) \right\} \sin \theta + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_p^n pn \left[-C_{n1} s_2 r^{-s_2-1} \right. \\
& - C_{n2} s_1 r^{-s_1-1} + C_{n3} s_1 r^{s_1-1} + C_{n4} s_2 r^{s_2-1} + \frac{1}{2(s_2^2 - s_1^2)} \left\{ r^{s_1-1} \int_a^r r^{2-s_1} f_{pn}(\xi_{n,mr})dr \right. \\
& + r^{-s_1-1} \int_a^r r^{s_1+2} f_{pn}(\xi_{n,mr})dr - r^{s_2-1} \int_a^r r^{2-s_2} f_{pn}(\xi_{n,mr})dr - r^{-s_2-1} \int_a^r r^{2+s_2} \\
& \left. \left. \times f_{pn}(\xi_{n,mr})dr \right] \frac{u_{\alpha pn}(\xi_{n,mr_1})}{\xi_{n,m^2} q_{\alpha pn}(\xi_{n,m})} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\beta^2}{\alpha^2} \xi_{n,m^2} t\right) \right\} \sin pn\theta \Big] \dots \dots \dots (35)
\end{aligned}$$

ただし, γ_p^n は $p=1$ かつ $n=1$ のとき零で, それ以外のとき 1 の値をとる.

3. 数値計算結果と考察

数値計算にあたり、次の無次元量を導入する。

$$\left. \begin{aligned} \rho &= r/a, \quad \rho_0 = b/a, \quad \rho_1 = r_1/a \\ t_d &= \beta^2 t/a^2, \quad H_a = ah_a, \quad H_b = ah_b \\ \tau &= \lambda_0 T/Q, \quad \widehat{\rho\rho} = \lambda_0 \sigma_{rr}/\nu Q \\ \widehat{\theta\theta} &= \lambda_0 \sigma_{\theta\theta}/\nu Q \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(36)$$

表 2 材料定数

材料定数 記号	α	β_1	β_2	μ
I	1	1	1	1
II	2	1	1	1
III-1	1	0.3	1	1
III-2	1	0.5	1	1
III-3	1	0.7	1	1
N-1	1	1	1.5	1
N-2	1	1	1.7	1
N-3	1	1	2.0	1
V-1	1	1	1	0.5
V-2	1	1	1	0.7
V-3	1	1	1	1.3

$\alpha^2 = \lambda_0/\lambda_r, \quad \mu = \alpha_1/\alpha_2, \quad \beta_1 = a_{11}/a_{22}, \quad \beta_2 = (a_{12} + a_{66})/a_{22}$

表 2 に示す材料定数の場合に対し、 $\rho_0=3, \rho_1=2, H_a=H_b=\infty$ について数値計算を実行した。表 2 において、記号 I は等方性材料であり、II は r, θ 方向の熱伝導率のみが異なる場合であり、III は β_1 のみが変わる場合であり、IV は β_2 のみが変わる場合であり、V は r, θ 方向の線膨張係数のみが異なる場合である。

図 2 から 10 には、点熱源の数が 1 個の場合の温度分布と各熱応力分布を示す。図 2 にはフーリエ数 (t_d) に対する $\theta=0^\circ$ 軸上の温度分布を示す。実線は等方性材料 (I)、破線は II の場合を示すが、 $\rho=2$ の点は特異点であるため、温度は無限大になる。 r 方向より θ 方向の熱伝導率が大きいため、II の場合の温度は等方性材料より高くなる。図 3 と 4 には定常状態におけるフープ応力 ($\widehat{\theta\theta}$) と半径応力 ($\widehat{\rho\rho}$) を示す。両応力とも $\rho=2, \theta=0^\circ$ の特異点で無限大の圧縮応力が生じるが、熱源位置から θ 方向へ少し移動した位置では、応力は非常に小さくなる。フープ応力は $\theta=0^\circ$ 軸上の内外境界上で大きな引張応力である。そこで、図 5, 6 にはフーリエ数をパラメータにとり、大きな

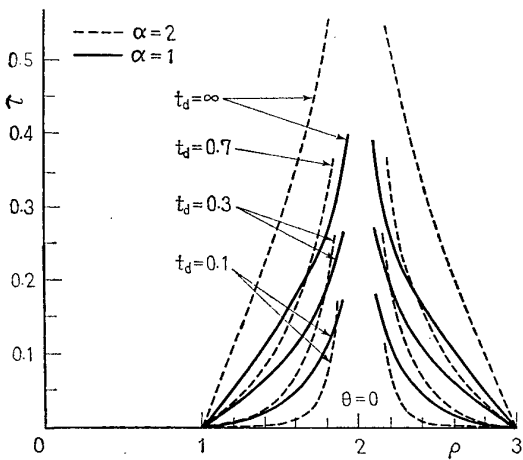


図 2 $\theta=0^\circ$ 軸上の温度分布
 $H_a=H_b=\infty, p=1, \rho_1=2$

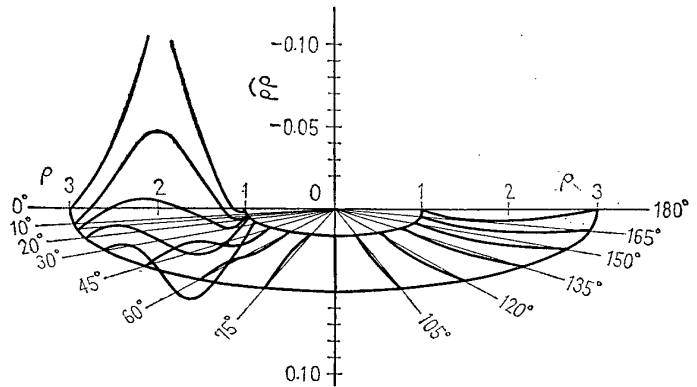


図 4 半径応力分布
 $H_a=H_b=\infty, t_d=\infty, p=1, \rho_1=2, \text{III-3 } (\beta_1=0.7)$

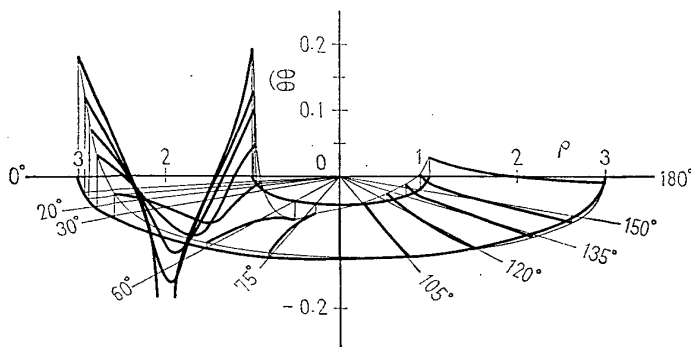


図 3 円周応力分布
 $H_a=H_b=\infty, t_d=\infty, p=1, \rho_1=2, \text{III-3 } (\beta_1=0.7)$

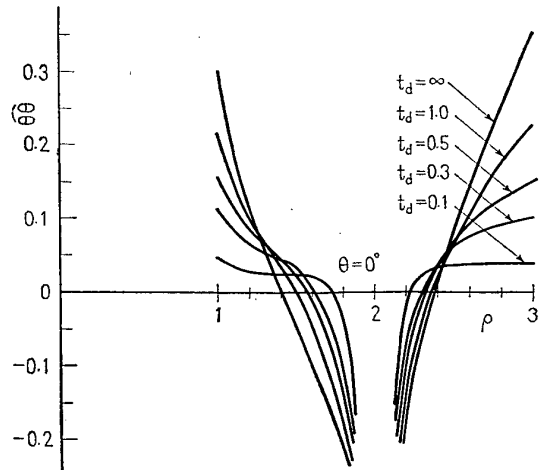
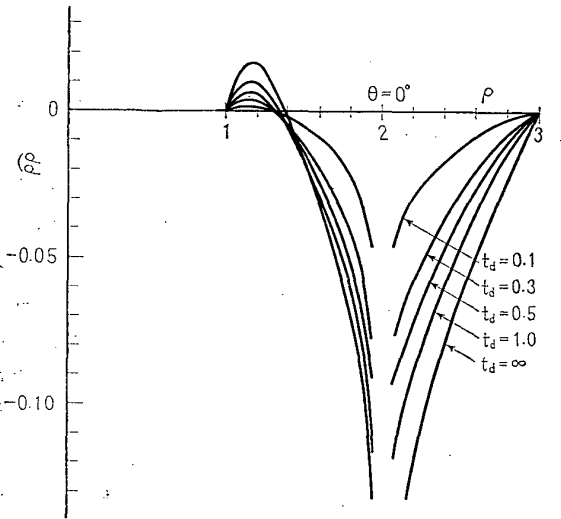


図 5 $\theta=0^\circ$ 軸上の円周応力
II ($a=2$), $H_a=H_b=\infty, p=1, \rho_1=2$

応力変化が生じる $\theta=0^\circ$ 軸上のフープ応力と半径応力を示す。フーリエ数が大きくなるに従って応力は増大し、定常状態が最大の応力状態を示す。定常状態の外側境界で最大の引張応力が生じる。

図7から図11に最大応力状態を示す定常状態における熱応力を、材料定数をパラメータとして示す。図7



II ($a=2$), $p=1$, $\rho_1=2$, $H_a=H_b=\infty$

図6 $\theta=0^\circ$ 軸上の半径応力

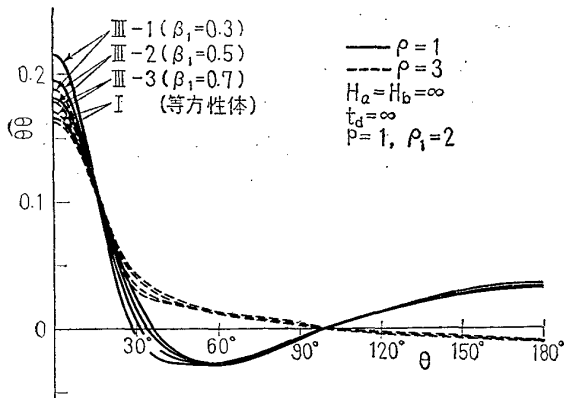


図7 内外境界上の円周応力

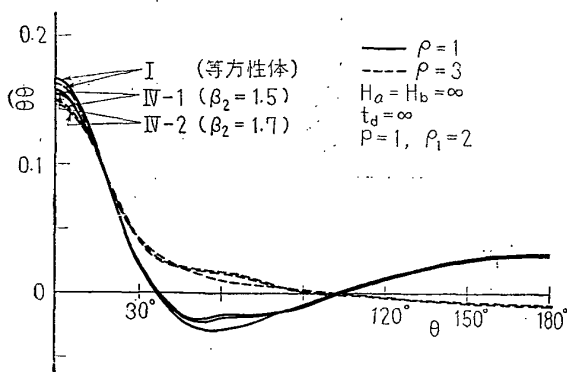


図8 内外境界上の円周応力

~9にはそれぞれ β_1 , β_2 , μ をパラメータにとり、内外境界上のフープ応力を示す。実線は内側境界上、破線は外側境界上のフープ応力を示す。 β_1 の値は、小さくなるほど、 μ の値が大きくなるほど応力は大き

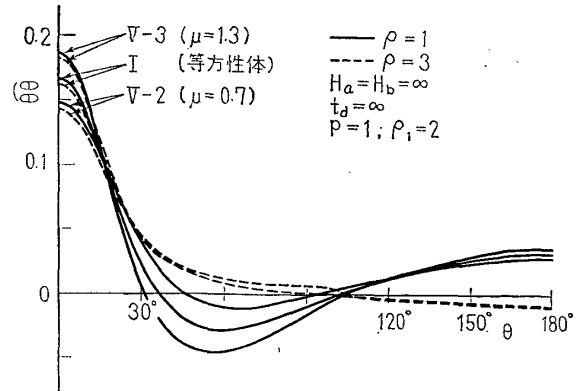
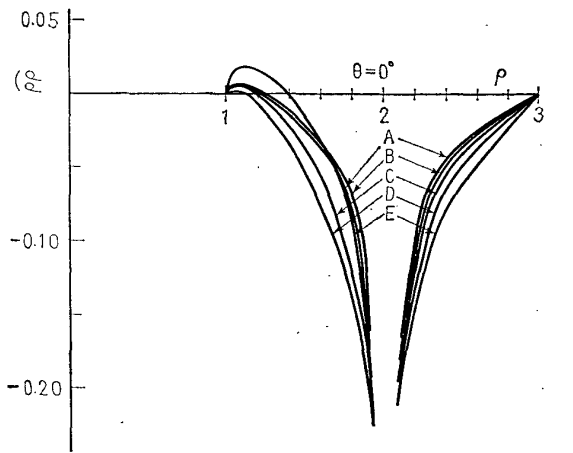


図9 内外境界上の円周応力



A V-1 ($\beta_2=1.5$), B V-2 ($\mu=0.7$), C I (等方性)
D III-2 ($\beta_1=0.5$), E II ($a=2$)
 $H_a=H_b=\infty$, $t_d=\infty$, $p=1$, $\rho_1=2$

図10 $\theta=0^\circ$ 軸上の半径応力

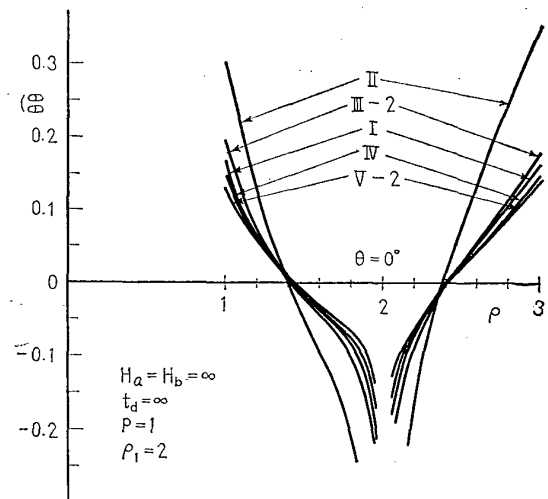


図11 $\theta=0^\circ$ 軸上の円周応力

くなるが、 β_2 は値が大きくなるほど応力は減少する。内側境界のフープ応力は θ が増加するにつれ、引張応力・圧縮応力・引張応力と変化し、 $\theta=0^\circ$ で最大の引張応力を示し、 $\theta=60^\circ$ 近傍で最大の圧縮応力を示すが、最大の引張応力にくらべて小さな応力である。この場合、最大引張応力は内側境界で生じる。図 10 と 11 には各種材料定数をパラメータにとり、定常状態における $\theta=0^\circ$ 軸上の半径応力とフープ応力を示す。図に示した 5 種類の材料定数に対しては II の場合が最大応力を示す。また最大の引張応力は II の場合は外側境界で生じるが、他の場合は内側境界で生じる。

図 12 から図 15 には点熱源の数を種々に変化させた場合の温度分布と各熱応力分布を示す。図 12 は熱源の数をパラメータにとり、 $\theta=0^\circ$ 軸上の温度分布を等

方性材料について示す。熱源の数が増加するにつれ、温度は上昇するが大きな温度上昇はない。図 13 は III-3 の場合に対する $\theta=0^\circ$ 軸上のフープ応力を、図 14 は III-3 の場合の内側境界上のフープ応力を示す。図 15 は熱源の数による最大引張応力の変化を示す。各種材料に対して、熱源の数が増加しても最大の引張応力は増加するとはかぎらない。点熱源が 1 個、2 個、4 個の場合を例にとりこのことにつき考える。熱源の数 (p) が 2 個の場合は $\theta=0^\circ$ と $\theta=180^\circ$ に熱源が存在するため、熱源が 1 個の場合の $\theta=0^\circ$ と $\theta=180^\circ$ の応力を重ね合わせることで、熱源の数が 2 個の場合の $\theta=0^\circ, 180^\circ$ 上の応力が得られる。 $p=1$ の場合、 $\theta=0^\circ, 180^\circ$ 上の外側境界での応力は引張応力であるため、 $p=2$ の場合の引張応力は $p=1$ の場合の引張応力より大きい。次に熱源の和が 2 個と 4 個の場合を比較する。上述と同様な理由により、 $p=4$ の場合は $p=1$ の場合の $\theta=0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ における応力を重ね合わせることで、 $p=4$ の場合の $\theta=0^\circ$ 上の応力が得られる。 $p=1$ の場合の外側境界上の応力は $\theta=0^\circ, 180^\circ$ のとき引張りであり、 $\theta=90^\circ, 270^\circ$

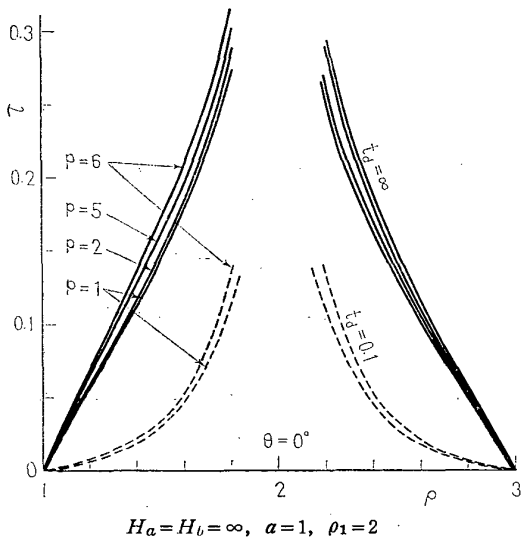


図 12 $\theta=0^\circ$ 軸上の温度分布

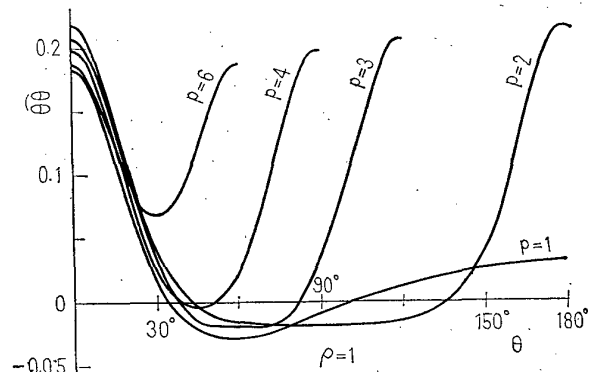


図 14 内側境界上の円周応力

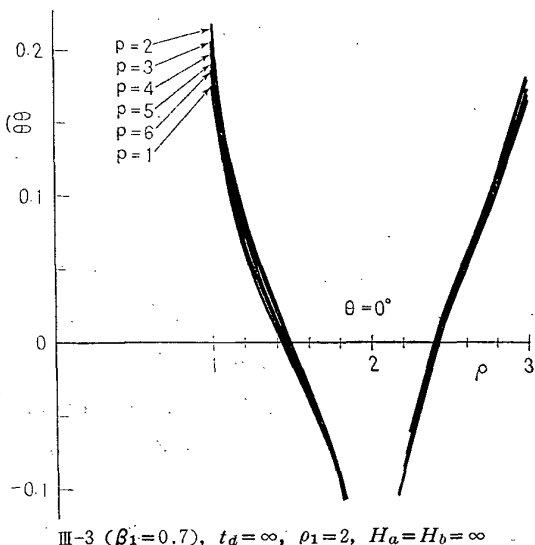


図 13 $\theta=0^\circ$ 軸上の円周応力

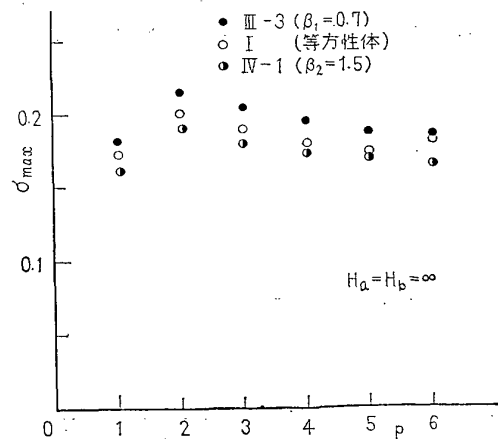


図 15 熱源の数による最大引張応力の変化

のとき圧縮であるため、 $p=4$ の最大引張応力は $p=2$ の場合の最大引張応力より小さい。

4. 結 論

多数の連続点熱源による直交異方性中空円板の非定常熱応力を理論解析し、かつ $\rho_0=3$, $\rho_1=2$, $H_a=H_b=\infty$ の場合について数値計算を実行した結果、この場合に対し、次の結論を得た。

(1) β_1 の値が小さくなるにつれ、内外境界上の最大応力は増大する。

(2) μ が増加するにつれ、内外境界上の最大応力は増大する。

(3) β_2 が増加するにつれ、内外境界上の最大応力は減少する。

(4) 点熱源の数が増加しても、必ずしも最大引張応力は増大しない。

(5) 最大引張応力が生ずる位置は材料定数の値により異なる。

文 献

- (1) Takeuti, Y., *Z. AMM*, **45-4** (1965-4), 177.
- (2) 竹内, 機論, **32-242** (昭 41-10), 1470.
- (3) Hsu, T.R., *Trans. ASME*, Ser. E, **36-1** (1969-3), 113.
- (4) Hsu, T.R., *Trans. ASME*, Ser. B, **92-2** (1970-5), 357.
- (5) 野田・竹内, 機論, **40-329** (昭 49-1), 125.
- (6) Parida, J. and Das, A.R., *Acta Mechanica*, **13-4** (1972-4), 205.
- (7) 竹内・ほか3名, 機論, **42-358** (昭 51-6), 1677.

討 論

〔質問〕 宮尾嘉寿 (富山大学工学部)

数学的に困難かつ複雑な問題を明快に解かれたことに敬意を表す。

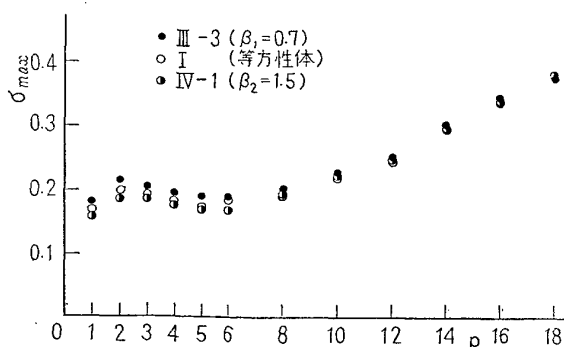
図 15 に熱源の数による最大引張応力の変化が記載してある。この図は各材料の場合の $p=1$ の曲線から簡単に得られるものであるから、 $p=6$ の場合にとどめず、 $p=10$ 以上のものも記入すれば、熱源の数によって最大応力が増加することもわかっておもしろいと思うがいかがか。

〔回答〕 ご指摘のとおり、 $p=8, 10, 12, 14, 16, 18$ の場合を付記して付図 1 に示す。

〔質問〕 藤井石根 (明治大学工学部)

たいへんむずかしい問題を処理されたことに敬意を表す。

(1) 式(1)の左辺はたとえば、機械学会、伝熱工学資料で採用している単位を用いれば $^{\circ}\text{C}/\text{m}^2$ なる次



付図 1 熱源の数による最大引張応力の変化

元となる。いま λ_r の次元は $\text{kcal}/\text{mh}^{\circ}\text{C}$ 、また 3395 ページ右欄 1 行めならびに表 1 によると W の単位は $\text{kcal}/\text{m}^2\text{h}$ ということになり、したがって

$$\frac{W}{\lambda_r} H(t) \text{ は } \frac{\text{kcal} \text{ mh}^{\circ}\text{C}}{\text{m}^2\text{h} \text{ kcal}} = \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{m}}$$

なる単位となり W の単位は一般に採用されている $\text{kcal}/\text{m}^2\text{h}$ としないと次元的に合わないように思われるが、 $H(t)$ に特別な意味をもたせてあるのか。

(2) 数値計算では α^2 , μ , β_1 , β_2 などを変えて検討されており、 α^2 , μ などの値を変えることによる材料の性質の変化についてはよく理解することができるが、 β_1 , β_2 に関しては判然としないので、これらの値を変えたことによって考えられる材料はどのような性質をもったものなのか具体的に説明していただきたい。

(3) 図 8 のグラフで $\theta=60^{\circ}$ 付近で $\hat{\theta}\theta$ の値が $\beta_2=1.5$ 及び 1.7 の場合に限り正の方向に若干もち上がったような傾向の曲線になっているが、これは物理的にはどういうことなのか。

(4) 3403 ページ右欄 5 行めに図 15 に関する説明文が書かれているが、この場合の引張り最大応力 σ_{\max} の位置は内側境界上と解釈してもよろしいか。また結論 (5) で σ_{\max} の生ずる位置は材料定数により異なるとあるが、どのように変わるのか具体的に説明していただきたい。

〔回答〕 (1) ご指摘のとおりである。ただ、本研究は平面問題の解析であり、平面上でのみ応力変化が

生じるため、平面上から見たときの熱源形状で表すのがよいと考え、題目を点熱源としている。正確には軸方向には線熱源である。その趣旨と同様に平面内で熱源形状が変化すると考えられるので、平面内で熱量としたほうがわかりやすいと思ったので、このような書き方をした。正確にはご指摘のとおりである。

(2) この記号は文献 (6) に従った。 r, θ 方向のそれぞれの縦弾性係数を E_r, E_θ 、ポアソン比を $\nu_{r\theta}, \nu_{\theta r}$ 、横弾性係数を G' とすると、平面応力状態では $a_{11}=1/E_r, a_{22}=1/E_\theta, a_{12}=-\nu_{r\theta}/E_r=-\nu_{\theta r}/E_\theta, a_{66}=1/G'$ だから、 $\beta_1=a_{11}/a_{22}=E_\theta/E_r$ 。よって β_1 は

縦弾性係数の比である。 β_2 は β_1 ほど具体的には説明できず、 $\beta_2=E_\theta/G'-\nu_{\theta r}$ である。

(3) ご指摘の傾向は $\beta_2 \neq 1$ の場合に見られ、 β_2 の値が影響しているのではないかと考えられる。

(4) $\beta_1=0.7, \beta_2=1.5$ の場合、 $p=1\sim 6$ に対して最大応力は内側境界上で、等方性体の場合、 $p=5$ までは内側境界上で、 $p=6$ のときは外側境界上で最大応力が生じる。

熱源が 1 個の場合、II の場合のみ外側境界上で、その他のときは内側境界上で最大応力が生じる。