539.377.01 : 536.33

表面から熱放散のある有限中空円筒の非定常熱応力*

野田直剛**, 竹内洋一郎***, 村沢観治****

1. 緒 言

軸方向に温度変化を生じる円柱または円筒の熱応力問題はエンジンのシリンダ，圧延ロール，切削加工時の被削材，溶接，金型鋳造，ディスクブレーキなどの工業上の実際問題の有用性より，従来多数の研究[1]がなされている．この場合の解析法は円柱座標系によるのが適切であり，ことに温度変化が (r, z) の 2 変数に依存するいわゆる軸対称問題は，解析も比較的容易であり，実用上の応用も多いから特に研究されているが，それらの多くは端面効果の入らない無限円柱，または半無限体に対する解析である．しかし現実の問題では，どうしても端面効果を考慮しなければならない有限長さの中実円柱，または中空円筒の工業上の実際例が多くある．これに対応し，中実有限円柱については小泉[2]が表面温度を規定した短円柱の熱応力問題を，R. A. Valentin-J. Carey[3] が一様な熱発生のある有限長さの中実円柱の熱応力問題を解析している．そこで本研究では，表面から熱放散のある有限長さの中空円筒の非定常熱応力の解析をおこない，熱応力分布の数値計算結果を図示した．解析は熱弾性変位ポテンシャル[4]と Love の変位関数[5]を用いた．なお解析に当たっては非連成，準静的処理し，また材料の物性値は温度に無関係に一定とした．

2. 温 度 分 布

図1に示すような内半径 a，外半径 b，長さ $2l$ の中空円筒の各表面から，熱放散がある場合の軸対称中空円筒の温度分布について考える．三次元軸対称熱伝導方程式は

$$\nabla^2 T=\frac{1}{\kappa}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad \cdots\cdots(1)$$

ここで，T は温度変化，t は時間，κ は温度伝導率，

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

である．

* 昭和50年3月17日 東海支部第24期総会講演会において講演．原稿受付 昭和50年5月26日．

** 正員，静岡大学工学部(浜松市城北 3-5-1).
*** 正員，大阪府立大学工学部.
**** 准員，三井造船会社.

初期条件として

$$t=0 \text{ で } T=T_0 \qquad \cdots\cdots(2)$$

境界条件として

$$r=a \text{ で } \frac{\partial T}{\partial r}-h_1T=0 \qquad \cdots\cdots(3)$$

$$r=b \text{ で } \frac{\partial T}{\partial r}+h_2T=0 \qquad \cdots\cdots(4)$$

$$z=l \text{ で } \frac{\partial T}{\partial z}+h_3T=0 \qquad \cdots\cdots(5)$$

$$z=-l \text{ で } \frac{\partial T}{\partial z}-h_3T=0 \qquad \cdots\cdots(6)$$

と仮定する．ここで，h_i $(i=1,2,3)$ は相対熱伝達率である．式(1)の一般解を変数分離法により求め，式中に含まれる未知係数を式(2)～(6)から決定すると，温度分布は無次元表示で次式となる．

$$T=T_0\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_{jm}u_0(\beta_m\rho)\cos\mu_j\zeta e^{-(\mu_j^2+\beta_m^2)\tau} \qquad \cdots\cdots(7)$$

ただし，

$$u_n(\beta\rho)=J_n(\beta\rho)-\frac{\beta J_1(\beta\rho_1)-\gamma_2J_0(\beta\rho_1)}{\beta Y_1(\beta\rho_1)-\gamma_2Y_0(\beta\rho_1)}Y_n(\beta\rho) \quad (n=0,1)$$

$$A_{jm}=\frac{\sin\mu_j\zeta_1}{\mu_jq_j\beta_mP_m}\{\rho_1u_1(\beta_m\rho_1)-u_1(\beta_m)\}$$

$$q_j=\frac{1}{2}\left[\zeta_1+\frac{\gamma_3}{\mu_j^2+\gamma_3^2}\right]$$

$$P_m=\frac{1}{2}\{\rho_1^2u_0^2(\beta_m\rho_1)+\rho_1^2u_1^2(\beta_m\rho_1)-u_0^2(\beta_m)-u_1^2(\beta_m)\}$$

ここで，次式で表される無次元量を用いた．

$$\rho=\frac{r}{a},\quad \rho_1=\frac{b}{a},\quad \zeta=\frac{z}{a},\quad \zeta_1=\frac{l}{a}$$

$$\tau=\frac{\kappa t}{a^2},\quad \gamma_i=h_ia \quad (i=1,2,3)$$

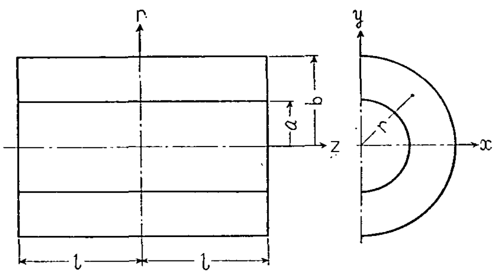


図 1 有限長さの中空円筒

また，$J_n(\rho)$ と $Y_n(\rho)$ はそれぞれ第1種，第2種の n 次のベッセル関数であり，β_m は次式を満足する β の第 m 番めの正根である.

$$\beta u_1(\beta)+\gamma_1 u_0(\beta)=0 \qquad (8)$$

μ_j は次式を満足する μ の第 j 番めの正根である.

$$\mu\sin\mu\zeta_1-\gamma_3\cos\mu\zeta_1=0 \qquad (9)$$

3. 応力解析

半径方向変位を u，軸方向変位を w とすれば，温度変化を考慮した変位のつりあい方程式は

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2 u-\frac{u}{r^2}+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial r}=2\frac{1+\nu}{1-2\nu}\alpha_t\frac{\partial T}{\partial r}\\&\nabla^2 w+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial z}=2\frac{1+\nu}{1-2\nu}\alpha_t\frac{\partial T}{\partial z}\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

ここで，

$$e=\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+\frac{\partial w}{\partial z}$$

α_t は線膨張係数，ν はポアソン比である．式(10)を解くために，次式で定義される熱弾性変位ポテンシャル Φ と，Love の変位関数 L を導入する.

$$\left.\begin{aligned}&u=\frac{\partial\Phi}{\partial r}-\frac{1}{2G}\frac{\partial^2 L}{\partial r\partial z}\\&w=\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\frac{1}{2G}\left\{2(1-\nu)\nabla^2 L-\frac{\partial^2 L}{\partial z^2}\right\}\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

ここで，G は横弾性係数である．Φ と L はそれぞれ次式を満足しなければならない.

$$\nabla^2\Phi=\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t T \qquad (12)$$

$$\nabla^2\nabla^2 L=0 \qquad (13)$$

各応力成分は Φ と L を用いて次式で表される.

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_{rr}=2G\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}-\nabla^2\Phi\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\nabla^2 L-\frac{\partial^2 L}{\partial r^2}\right),\quad \sigma_{\theta\theta}=2G\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}-\nabla^2\Phi\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\nabla^2 L-\frac{1}{r}\frac{\partial L}{\partial r}\right)\\&\sigma_{zz}=2G\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}-\nabla^2\Phi\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left\{(2-\nu)\nabla^2 L-\frac{\partial^2 L}{\partial z^2}\right\},\quad \sigma_{rz}=2G\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial z}+\frac{\partial}{\partial r}\left\{(1-\nu)\nabla^2 L-\frac{\partial^2 L}{\partial z^2}\right\}\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

式 (12) の特解は式 (7) を考慮して

$$\frac{\Phi}{a^2}=-K\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_{jm}}{\mu_j^2+\beta_m^2}u_0(\beta_m\rho)\cos\mu_j\zeta e^{-(\mu_j^2+\beta_m^2)\tau} \qquad (15)$$

となる．ここで，$K=(1+\nu)/(1-\nu)\alpha_t T_0$．式 (13) を満足する一般解として，本問題に適する項を採用すると

$$\begin{aligned}\frac{L}{a^3}=&A_0\frac{\zeta^3}{6}+B_0\zeta\ln\rho+C_0\frac{\zeta\rho^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k_n^3}\{A_n' I_0(k_n\rho)+B_n' k_n\rho I_1(k_n\rho)+A_n'' K_0(k_n\rho)\\&+B_n'' k_n\rho K_1(k_n\rho)\}\sin k_n\zeta+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_s^3}(C_s'\sinh\lambda_s\zeta+D_s'\lambda_s\zeta\cosh\lambda_s\zeta)C_0(\lambda_s\rho)\\&+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_j^3}\{E_j' I_0(\mu_j\rho)+F_j'\mu_j\rho I_1(\mu_j\rho)+E_j'' K_0(\mu_j\rho)+F_j''\mu_j\rho K_1(\mu_j\rho)\}\sin\mu_j\zeta\end{aligned} \qquad (16)$$

ただし，

$$C_n(\lambda_s\rho)=J_n(\lambda_s\rho)-\frac{J_1(\lambda_s\rho_1)}{Y_1(\lambda_s\rho_1)}Y_n(\lambda_s\rho)$$

ここで，$k_n=n\pi/\zeta_1$，$I_n(\rho)$，$K_n(\rho)$ はそれぞれ第1種，第2種の n 次の変形ベッセル関数であり，λ_s は次式を満足する λ の第 s 番めの正根である.

$$C_1(\lambda)=0$$

次に式 (15) と (16) を式 (14) に代入すると，各応力成分は次式で与えられる.

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}=&A_0\nu+\frac{B_0}{\rho^2}+C_0(2\nu-1)+\sum_{n=1}^{\infty}\Big[A_n'\left\{-I_0(k_n\rho)+\frac{I_1(k_n\rho)}{k_n\rho}\right\}-B_n'\{(1-2\nu)I_0(k_n\rho)+k_n\rho I_1(k_n\rho)\}\\&-A_n''\left\{K_0(k_n\rho)+\frac{K_1(k_n\rho)}{k_n\rho}\right\}+B_n''\{(1-2\nu)K_0(k_n\rho)-k_n\rho K_1(k_n\rho)\}\Big]\cos k_n\zeta\\&+\sum_{s=1}^{\infty}\Big[C_0(\lambda_s\rho)[C_s'\cosh\lambda_s\zeta+D_s'\{(1+2\nu)\cosh\lambda_s\zeta+\lambda_s\zeta\sinh\lambda_s\zeta\}]-\frac{C_1(\lambda_s\rho)}{\lambda_s\rho}\{C_s'\cosh\lambda_s\zeta\\&+D_s'(\cosh\lambda_s\zeta+\lambda_s\zeta\sinh\lambda_s\zeta)\}\Big]+\sum_{j=1}^{\infty}\Big[E_j'\left\{-I_0(\mu_j\rho)+\frac{I_1(\mu_j\rho)}{\mu_j\rho}\right\}-F_j'\{(1-2\nu)I_0(\mu_j\rho)\\&+\mu_j\rho I_1(\mu_j\rho)\}-E_j''\left\{K_0(\mu_j\rho)+\frac{K_1(\mu_j\rho)}{\mu_j\rho}\right\}+F_j''\{(1-2\nu)K_0(\mu_j\rho)-\mu_j\rho K_1(\mu_j\rho)\}\Big]\cos\mu_j\zeta\\&-2GK\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_{jm}}{\mu_j^2+\beta_m^2}\left\{\mu_j^2 u_0(\beta_m\rho)+\frac{\beta_m u_1(\beta_m\rho)}{\rho}\right\}\cos\mu_j\zeta e^{-(\mu_j^2+\beta_m^2)\tau}\end{aligned} \qquad (17)$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_{\theta\theta}=&A_0\nu-\frac{B_0}{\rho^2}+(2\nu-1)C_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{-A_n'\frac{I_1(k_n\rho)}{k_n\rho}-B_n'(1-2\nu)I_0(k_n\rho)+A_n''\frac{K_1(k_n\rho)}{k_n\rho}\right.\\
&\left.+B_n''(1-2\nu)K_0(k_n\rho)\right\}\cos k_n\zeta+\sum_{s=1}^{\infty}\left[C_0(\lambda_s\rho)D_s'2\nu\cosh\lambda_s\zeta\right.\\
&\left.+\frac{C_1(\lambda_s\rho)}{\lambda_s\rho}\{C_s'\cosh\lambda_s\zeta+D_s'(\cosh\lambda_s\zeta+\lambda_s\zeta\sinh\lambda_s\zeta)\}\right]+\sum_{j=1}^{\infty}\left\{-E_j'\frac{I_1(\mu_j\rho)}{\mu_j\rho}\right.\\
&\left.-F_j'(1-2\nu)I_0(\mu_j\rho)+E_j''\frac{K_1(\mu_j\rho)}{\mu_j\rho}+F_j''(1-2\nu)K_0(\mu_j\rho)\right\}\cos\mu_j\zeta\\
&+2GK\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_{jm}\left\{\frac{\beta_m u_1(\beta_m\rho)}{(\mu_j^2+\beta_m^2)\rho}-u_0(\beta_m\rho)\right\}\cos\mu_j\zeta e^{-(\mu_j^2+\beta_m^2)\tau}
\end{aligned}\tag{18}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_{zz}=&(1-\nu)A_0+2(2-\nu)C_0+\sum_{n=1}^{\infty}[A_n'I_0(k_n\rho)+B_n'\{2(2-\nu)I_0(k_n\rho)+k_n\rho I_1(k_n\rho)\}\\
&+A_n''K_0(k_n\rho)-B_n''\{2(2-\nu)K_0(k_n\rho)-k_n\rho K_1(k_n\rho)\}]\cos k_n\zeta+\sum_{s=1}^{\infty}C_0(\lambda_s\rho)\\
&\times[-C_s'\cosh\lambda_s\zeta+D_s'\{(1-2\nu)\cosh\lambda_s\zeta-\lambda_s\zeta\sinh\lambda_s\zeta\}]+\sum_{j=1}^{\infty}[E_j'I_0(\mu_j\rho)\\
&+F_j'\{2(2-\nu)I_0(\mu_j\rho)+\mu_j\rho I_1(\mu_j\rho)\}+E_j''K_0(\mu_j\rho)-F''\{2(2-\nu)K_0(\mu_j\rho)\\
&-\mu_j\rho K_1(\mu_j\rho)\}]\cos\mu_j\zeta-2GK\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_{jm}\beta_m^2}{\mu_j^2+\beta_m^2}u_0(\beta_m\rho)\cos\mu_j\zeta e^{-(\mu_j^2+\beta_m^2)\tau}
\end{aligned}\tag{19}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_{rz}=&\sum_{n=1}^{\infty}[A_n'I_1(k_n\rho)+B_n'\{2(1-\nu)I_1(k_n\rho)+k_n\rho I_0(k_n\rho)\}-A_n''K_1(k_n\rho)+B_n''\{2(1-\nu)K_1(k_n\rho)\\
&-k_n\rho K_0(k_n\rho)\}]\sin k_n\zeta+\sum_{s=1}^{\infty}C_1(\lambda_s\rho)\{C_s'\sinh\lambda_s\zeta+D_s'(2\nu\sinh\lambda_s\zeta+\lambda_s\zeta\cosh\lambda_s\zeta)\}\\
&+\sum_{j=1}^{\infty}[E_j'I_1(\mu_j\rho)+F_j'\{2(1-\nu)I_1(\mu_j\rho)+\mu_j\rho I_0(\mu_j\rho)\}-E_j''K_1(\mu_j\rho)+F_j''\{2(1-\nu)K_1(\mu_j\rho)\\
&-\mu_j\rho K_0(\mu_j\rho)\}]\sin\mu_j\zeta-2GK\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_{jm}\mu_j\beta_m}{\mu_j^2+\beta_m^2}u_1(\beta_m\rho)\sin\mu_j\zeta e^{-(\mu_j^2+\beta_m^2)\tau}
\end{aligned}\tag{20}
$$

ここで，A_0, B_0, C_0, A_n', B_n', A_n'', B_n'', C_s', D_s', E_j', F_j', E_j'', F_j'' は，境界条件から決定される未知係数である．

境界条件は外力の作用のない場合

$$\rho=1 \quad で \quad \sigma_{rr}=0 \tag{21}$$

$$\rho=\rho_1 \quad で \quad \sigma_{rr}=0 \tag{22}$$

$$\rho=1 \quad で \quad \sigma_{rz}=0 \tag{23}$$

$$\rho=\rho_1 \quad で \quad \sigma_{rz}=0 \tag{24}$$

$$\zeta=\pm\zeta_1 \quad で \quad \sigma_{rz}=0 \tag{25}$$

$$\zeta=\pm\zeta_1 \quad で \quad \sigma_{zz}=0 \tag{26}$$

で与えられる．

境界条件から各未知係数を決定する．式 (23) と (24) から，$\sin k_n\zeta$ と $\sin\mu_j\zeta$ の各係数を零に等置すると次式が得られる．

$$A_n'I_1(k_n)+B_n'\{2(1-\nu)I_1(k_n)+k_nI_0(k_n)\}-A_n''K_1(k_n)+B_n''\{2(1-\nu)K_1(k_n)-k_nK_0(k_n)\}=0 \tag{27}$$

$$
\begin{aligned}
&E_j'I_1(\mu_j)+F_j'\{2(1-\nu)I_1(\mu_j)+\mu_jI_0(\mu_j)\}-E_j''K_1(\mu_j)+F_j''\{2(1-\nu)K_1(\mu_j)\\
&\quad-\mu_jK_0(\mu_j)\}=2GK\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_{jm}\mu_j\beta_m}{\mu_j^2+\beta_m^2}u_1(\beta_m)e^{-(\mu_j^2+\beta_m^2)\tau}
\end{aligned}\tag{28}
$$

$$
\begin{aligned}
&A_n'I_1(k_n\rho_1)+B_n'\{2(1-\nu)I_1(k_n\rho_1)+k_n\rho_1I_0(k_n\rho_1)\}-A_n''K_1(k_n\rho_1)\\
&\quad+B_n''\{2(1-\nu)K_1(k_n\rho_1)-k_n\rho_1K_0(k_n\rho_1)\}=0
\end{aligned}\tag{29}
$$

$$
\begin{aligned}
&E_j'I_1(\mu_j\rho_1)+F_j'\{2(1-\nu)I_1(\mu_j\rho_1)+\mu_j\rho_1I_0(\mu_j\rho_1)\}-E_j''K_1(\mu_j\rho_1)+F_j''\{2(1-\nu)K_1(\mu_j\rho_1)\\
&\quad-\mu_j\rho_1K_0(\mu_j\rho_1)\}=2GK\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_{jm}\mu_j\beta_m}{\mu_j^2+\beta_m^2}u_1(\beta_m\rho_1)e^{-(\mu_j^2+\beta_m^2)\tau}
\end{aligned}\tag{30}
$$

式 (21) と式 (22) より，$\cosh\lambda_s\zeta$, $\lambda_s\zeta\sinh\lambda_s\zeta$ を領域 $-\zeta_1\leqq\zeta\leqq\zeta_1$ において $\cos k_n\zeta$ に関するフーリエ級数に展開したのち，$\cos\mu_j\zeta$ と $\cos k_n\zeta$ の各係数を零と置くことにより次式を得る．

$$A_0\nu+B_0+(2\nu-1)C_0+\sum_{s=1}^{\infty}C_0(\lambda_s)\left[C_s'\frac{\sinh\lambda_s\zeta_1}{\lambda_s\zeta_1}+D_s'\left(\cosh\lambda_s\zeta_1+2\nu\frac{\sinh\lambda_s\zeta_1}{\lambda_s\zeta_1}\right)\right]=0 \quad\cdots\cdots(31)$$

$$E_j'\left\{-I_0(\mu_j)+\frac{I_1(\mu_j)}{\mu_j}\right\}-F_j'\{(1-2\nu)I_0(\mu_j)+\mu_jI_1(\mu_j)\}-E_j''\left\{K_0(\mu_j)+\frac{K_1(\mu_j)}{\mu_j}\right\}$$
$$+F_j''\{(1-2\nu)K_0(\mu_j)-\mu_jK_1(\mu_j)\}=2GK\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_{jm}}{\mu_j^2+\beta_m^2}\{\mu_j^2u_0(\beta_m)+\beta_mu_1(\beta_m)\}e^{-(\mu_j^2+\beta_m^2)\tau} \quad\cdots\cdots(32)$$

$$A_n'\left\{-I_0(k_n)+\frac{I_1(k_n)}{k_n}\right\}-B_n'\{(1-2\nu)I_0(k_n)+k_nI_1(k_n)\}-A_n''\left\{K_0(k_n)+\frac{K_1(k_n)}{k_n}\right\}+B_n''$$
$$\times\{(1-2\nu)K_0(k_n)-k_nK_1(k_n)\}+\sum_{s=1}^{\infty}C_0(\lambda_s)\left[C_s'\frac{2\lambda_s(-1)^n\sinh\lambda_s\zeta_1}{\zeta_1(\lambda_s^2+k_n^2)}\right.$$
$$\left.+D_s'\left\{\frac{2\lambda_s(-1)^n(2\nu\sinh\lambda_s\zeta_1+\lambda_s\zeta_1\cosh\lambda_s\zeta_1)}{\zeta_1(\lambda_s^2+k_n^2)}+\frac{4\lambda_sk_n^2(-1)^n\sinh\lambda_s\zeta_1}{\zeta_1(\lambda_s^2+k_n^2)^2}\right\}\right]=0 \quad\cdots\cdots(33)$$

$$A_0\nu+\frac{B_0}{\rho_1^2}+(2\nu-1)C_0+\sum_{s=1}^{\infty}C_0(\lambda_s\rho_1)\left[C_s'\frac{\sinh\lambda_s\zeta_1}{\lambda_s\zeta_1}+D_s'\left(\cosh\lambda_s\zeta_1+2\nu\frac{\sinh\lambda_s\zeta_1}{\lambda_s\zeta_1}\right)\right]=0 \quad\cdots\cdots(34)$$

$$E_j'\left\{-I_0(\mu_j\rho_1)+\frac{I_1(\mu_j\rho_1)}{\mu_j\rho_1}\right\}-F_j'\{(1-2\nu)I_0(\mu_j\rho_1)+\mu_j\rho_1I_1(\mu_j\rho_1)\}$$
$$-E_j''\left\{K_0(\mu_j\rho_1)+\frac{K_1(\mu_j\rho_1)}{\mu_j\rho_1}\right\}+F_j''\{(1-2\nu)K_0(\mu_j\rho_1)-\mu_j\rho_1K_1(\mu_j\rho_1)\}$$
$$=2GK\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_{jm}}{\mu_j^2+\beta_m^2}\left\{\mu_j^2u_0(\beta_m\rho_1)+\frac{\beta_mu_1(\beta_m\rho_1)}{\rho_1}\right\}e^{-(\mu_j^2+\beta_m^2)\tau} \quad\cdots\cdots(35)$$

$$A_n'\left\{-I_0(k_n\rho_1)+\frac{I_1(k_n\rho_1)}{k_n\rho_1}\right\}-B_n'\{(1-2\nu)I_0(k_n\rho_1)+k_n\rho_1I_1(k_n\rho_1)\}-A_n''\left\{K_0(k_n\rho_1)+\frac{K_1(k_n\rho_1)}{k_n(\rho_1)}\right\}$$
$$+B_n''\{(1-2\nu)K_0(k_n\rho_1)-k_n\rho_1K_1(k_n\rho_1)\}+\sum_{s=1}^{\infty}C_0(\lambda_s\rho_1)\left[C_s'\frac{2\lambda_s(-1)^n\sinh\lambda_s\zeta_1}{\zeta_1(\lambda_s^2+k_n^2)}\right.$$
$$\left.+D_s'\left\{\frac{2\lambda_s(-1)^n(2\nu\sinh\lambda_s\zeta_1+\lambda_s\zeta_1\cosh\lambda_s\zeta_1)}{\zeta_1(\lambda_s^2+k_n^2)}+\frac{4\lambda_sk_n^2(-1)^n\sinh\lambda_s\zeta_1}{\zeta_1(\lambda_s^2+k_n^2)^2}\right\}\right]=0 \quad\cdots\cdots(36)$$

式 (28), (30), (32) と式 (35) より，連立方程式を解くことにより各係数 E_j', F_j', E_j'' と F_j'' は決定される．式 (26) より，関数 $u_0(\beta_m\rho)$, $I_0(k_n\rho)$, $k_n\rho I_1(k_n\rho)$, $K_0(k_n\rho)$, $k_n\rho K_1(k_n\rho)$, $I_0(\mu_j\rho)$, $\mu_j\rho I_1(\mu_j\rho)$, $K_0(\mu_j\rho)$ と $\mu_j\rho K_1(\mu_j\rho)$ を領域 $1\leq\rho\leq\rho_1$ において，$C_0(\lambda_s\rho)$ に関するベッセル級数に展開し，$C_0(\lambda_s\rho)$ の係数を零と置くと次式が得られる．

$$(1-\nu)A_0+2(2-\nu)C_0+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n[A_n'a_{0n}+B_n'\{2(2-\nu)a_{0n}+b_{0n}\}+A_n''c_{0n}$$
$$-B_n''\{2(2-\nu)c_{0n}-d_{0n}\}]+\sum_{j=1}^{\infty}[E_j'l_{0j}+F_j'\{2(2-\nu)l_{0j}+p_{0j}\}+E_j''q_{0j}-F''\{2(2-\nu)q_{0j}$$
$$-r_{0j}\}]\cos\mu_j\zeta_1=2GK\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_{jm}\beta_m^2}{\mu_j^2+\beta_m^2}g_{0m}\cos\mu_j\zeta_1e^{-(\mu_j^2+\beta_m^2)\tau} \quad\cdots\cdots(37)$$

$$-C_s'\cosh\lambda_s\zeta_1+D_s'\{(1-2\nu)\cosh\lambda_s\zeta_1-\lambda_s\zeta_1\sinh\lambda_s\zeta_1\}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n[A_n'a_{sn}+B_n'\{2(2-\nu)a_{sn}+b_{sn}\}$$
$$+A_n''c_{sn}-B_n''\{2(2-\nu)c_{sn}-d_{sn}\}]+\sum_{j=1}^{\infty}\cos\mu_j\zeta_1[E_j'l_{sj}+F_j'\{2(2-\nu)l_{sj}+p_{sj}\}+E_j''q_{sj}$$
$$-F_j''\{2(2-\nu)q_{sj}-r_{sj}\}]=2GK\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_{jm}\beta_m^2}{\mu_j^2+\beta_m^2}g_{sm}\cos\mu_j\zeta_1e^{-(\mu_j^2+\beta_m^2)\tau} \quad\cdots\cdots(38)$$

ここで，g_{0m} と g_{sm}, a_{0n} と a_{sn}, b_{0n} と b_{sn}, c_{0n} と c_{sn}, d_{0n} と d_{sn}, l_{0j} と l_{sj}, p_{0j} と p_{sj}, q_{0j} と q_{sj}, r_{0j} と r_{sj} は，それぞれ関数 $u_0(\beta_m\zeta)$, $I_0(k_n\rho)$, $k_n\rho I_1(k_n\rho)$, $K_0(k_n\rho)$, $k_n\rho K_1(k_n\rho)$, $I_0(\mu_j\rho)$, $\mu_j\rho I_1(\mu_j\rho)$, $K_0(\mu_j\rho)$, $\mu_j\rho K_1(\mu_j\rho)$ を領域 $1\leq\rho\leq\rho_1$ において，$C_0(\lambda_s\rho)$ に関するベッセル級数に展開したときの係数で次式で与えられる．

$$g_{0m}=\frac{2\{\beta_m\rho_1u_1(\beta_m\rho_1)-\beta_mu_1(\beta_m)\}}{(\beta_m\rho_1)^2-\beta_m^2},$$

$$g_{sm}=\frac{2\{\beta_m\rho_1C_0(\lambda_s\rho_1)u_1(\beta_m\rho_1)-\beta_mC_0(\lambda_s)u_1(\beta_m)\}}{(\beta_m^2-\lambda_s^2)\{\rho_1^2C_0^2(\lambda_s\rho_1)-C_0^2(\lambda_s)\}},$$

$$a_{0n}=\frac{2\{k_n\rho_1I_1(k_n\rho_1)-k_nI_1(k_n)\}}{(k_n\rho_1)^2-k_n^2},$$

$$a_{sn}=\frac{2\{k_n\rho_1C_0(\lambda_s\rho_1)I_1(k_n\rho_1)-k_nC_0(\lambda_s)I_1(k_n)\}}{(k_n^2+\lambda_s^2)\{\rho_1^2C_0^2(\lambda_s\rho_1)-C_0^2(\lambda_s)\}},$$

$$b_{0n}=\frac{2\{k_n\rho_1{}^2I_0(k_n\rho_1)-2\rho_1I_1(k_n\rho_1)-k_nI_0(k_n)+2I_1(k_n)\}}{k_n(\rho_1{}^2-1)},$$

$$b_{sn}=\frac{2}{(k_n{}^2+\lambda_s{}^2)\{\rho_1{}^2C_0{}^2(\lambda_s\rho_1)-C_0{}^2(\lambda_s)\}}\Big[(k_n\rho_1)^2I_0(k_n\rho_1)C_0(\lambda_s\rho_1)-k_n{}^2I_0(k_n)C_0(\lambda_s)$$
$$-\frac{2k_n{}^2}{k_n{}^2+\lambda_s{}^2}\{k_n\rho_1C_0(\lambda_s\rho_1)I_1(k_n\rho_1)-k_nC_0(\lambda_s)I_1(k_n)\}\Big],$$

$$c_{0n}=\frac{2\{-\rho_1K_1(k_n\rho_1)+K_1(k_n)\}}{k_n(\rho_1{}^2-1)},\qquad c_{sn}=\frac{2k_n\{-\rho_1C_0(\lambda_s\rho_1)K_1(k_n\rho_1)+C_0(\lambda_s)K_1(k_n)\}}{(k_n{}^2+\lambda_s{}^2)\{\rho_1{}^2C_0{}^2(\lambda_s\rho_1)-C_0{}^2(\lambda_s)\}},$$

$$d_{0n}=\frac{2}{k_n(\rho_1{}^2-1)}\{-k_n\rho_1{}^2K_0(k_n\rho_1)-2\rho_1K_1(k_n\rho_1)+k_nK_0(k_n)+2K_1(k_n)\},$$

$$d_{sn}=\frac{2k_n{}^2}{(k_n{}^2+\lambda_s{}^2)\{\rho_1{}^2C_0{}^2(\lambda_s\rho_1)-C_0{}^2(\lambda_s)\}}\Big[-\rho_1{}^2K_0(k_n\rho_1)C_0(\lambda_s\rho_1)+K_0(k_n)C_0(\lambda_s)$$
$$+\frac{2k_n}{k_n{}^2+\lambda_s{}^2}\{-\rho_1C_0(\lambda_s\rho_1)K_1(k_n\rho_1)+C_0(\lambda_s)K_1(k_n)\}\Big],$$

$$l_{0j}=\frac{2\{\rho_1I_1(\mu_j\rho_1)-I_1(\mu_j)\}}{\mu_j(\rho_1{}^2-1)},\qquad l_{sj}=\frac{2\mu_j\{\rho_1C_0(\lambda_s\rho_1)I_1(\mu_j\rho_1)-C_0(\lambda_s)I_1(\mu_j)\}}{(\mu_j{}^2+\lambda_s{}^2)\{\rho_1{}^2C_0{}^2(\lambda_s\rho_1)-C_0{}^2(\lambda_s)\}},$$

$$p_{0j}=\frac{2}{\mu_j(\rho_1{}^2-1)}\{\mu_j\rho_1{}^2I_0(\mu_j\rho_1)-2\rho_1I_1(\mu_j\rho_1)-\mu_jI_0(\mu_j)+2I_1(\mu_j)\},$$

$$p_{sj}=\frac{2\mu_j{}^2}{(\mu_j{}^2+\lambda_s{}^2)\{\rho_1{}^2C_0{}^2(\lambda_s\rho_1)-C_0{}^2(\lambda_s)\}}\Big[\rho_1{}^2I_0(\mu_j\rho_1)C_0(\lambda_s\rho_1)-I_0(\mu_j)C_0(\lambda_s)$$
$$-\frac{2\mu_j}{\mu_j{}^2+\lambda_s{}^2}\{\rho_1C_0(\lambda_s\rho_1)I_1(\mu_j\rho_1)-C_0(\lambda_s)I_1(\mu_j)\}\Big],$$

$$q_{0j}=\frac{2\{-\rho_1K_1(\mu_j\rho_1)+K_1(\mu_j)\}}{\mu_j(\rho_1{}^2-1)},\qquad q_{sj}=\frac{2\mu_j\{-\rho_1C_0(\lambda_s\rho_1)K_1(\mu_j\rho_1)+C_0(\lambda_s)K_1(\mu_j)\}}{(\mu_j{}^2+\lambda_s{}^2)\{\rho_1{}^2C_0{}^2(\lambda_s\rho_1)-C_0{}^2(\lambda_s)\}},$$

$$r_{0j}=\frac{2}{\mu_j(\rho_1{}^2-1)}\{-\mu_j\rho_1{}^2K_0(\mu_j\rho_1)-2\rho_1K_1(\mu_j\rho_1)+\mu_jK_0(\mu_j)+2K_1(\mu_j)\},$$

$$r_{sj}=\frac{2\mu_j{}^2}{(\mu_j{}^2+\lambda_s{}^2)\{\rho_1{}^2C_0{}^2(\lambda_s\rho_1)-C_0{}^2(\lambda_s)\}}\Big[-\rho_1{}^2K_0(\mu_j\rho_1)C_0(\lambda_s\rho_1)+K_0(\mu_j)C_0(\lambda_s)$$
$$+\frac{2\mu_j}{\mu_j{}^2+\lambda_s{}^2}\{-\rho_1C_0(\lambda_s\rho_1)K_1(\mu_j\rho_1)+C_0(\lambda_s)K_1(\mu_j)\}\Big]\quad\cdots\cdots(39)$$

式 (25) より，関数 $u_1(\beta_m\rho)$, $I_1(\mu_j\rho)$, $\mu_j\rho I_0(\mu_j\rho)$, $K_1(\mu_j\rho)$, $\mu_j\rho K_0(\mu_j\rho)$ を領域 $1<\rho<\rho_1$ において，$C_1(\lambda_s\rho)$ に関するベッセル級数に展開し，$C_1(\lambda_s\rho)$ の各係数を零と置くと次式を得る．

$$C_s'\sinh\lambda_s\zeta_1+D_s'(2\nu\sinh\lambda_s\zeta_1+\lambda_s\zeta_1\cosh\lambda_s\zeta_1)-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_s\sin\mu_j\zeta_1}{\mu_j}[E_j'l_{sj}+F_j'\{2(1-\nu)l_{sj}+p_{sj}\}$$
$$+E_j''q_{sj}-F_j''\{2(1-\nu)q_{sj}-r_{sj}\}]=2GK\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_{jm}\mu_j\lambda_s}{\mu_j{}^2+\lambda_s{}^2}g_{sm}\sin\mu_j\zeta_1e^{-(\mu_j{}^2+\beta_m{}^2)\tau}\quad\cdots\cdots(40)$$

式 (27), (29) と式 (39) を考慮すると，式 (37) は

$$A_0(1-\nu)+2C_0(2-\nu)=0\quad\cdots\cdots(41)$$

となる．式 (31), (34), (40) と式 (41) より，A_0, B_0, C_0 が次式のように求められる．

$$B_0=\frac{\rho_1{}^2}{\rho_1{}^2-1}\sum_{s=1}^{\infty}\{C_0(\lambda_s\rho_1)-C_0(\lambda_s)\}\Big[\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sin\mu_j\zeta_1}{\mu_j\zeta_1}[E_j'l_{sj}+F_j'\{2(1-\nu)l_{sj}+p_{sj}\}+E_j''q_{sj}$$
$$-F_j''\{2(1-\nu)q_{sj}-r_{sj}\}]+2GK\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_{jm}\mu_j}{(\mu_j{}^2+\beta_m{}^2)\zeta_1}g_{sm}\sin\mu_j\zeta_1e^{-(\mu_j{}^2+\beta_m{}^2)\tau}\Big]\quad\cdots\cdots(42)$$

$$C_0=\frac{1-\nu}{1+\nu}\frac{1}{\rho_1{}^2-1}\sum_{s=1}^{\infty}\{\rho_1{}^2C_0(\lambda_s\rho_1)-C_0(\lambda_s)\}\Big[\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sin\mu_j\zeta_1}{\mu_j\zeta_1}[E_j'l_{sj}+F_j'\{2(1-\nu)l_{sj}+p_{sj}\}$$
$$+E_j''q_{sj}-F_j''\{2(1-\nu)q_{sj}-r_{sj}\}]+2GK\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_{jm}\mu_j}{(\mu_j{}^2+\beta_m{}^2)\zeta_1}g_{sm}\sin\mu_j\zeta_1e^{-(\mu_j{}^2+\beta_m{}^2)\pi}\Big]\quad\cdots\cdots(43)$$

$$A_0=-\frac{2(2-\nu)}{1-\nu}C_0\quad\cdots\cdots(44)$$

式 (27), (29), (33), (36), (38) と式 (40) を用いて変形すると次式を得る．

$$B_n'\left[-2(1-\nu)\frac{I_1(k_n)}{k_n}-k_nI_1(k_n)-\frac{[\rho_1I_0(k_n\rho_1)-k_nI_0(k_n)\{I_0(k_n)K_1(k_n\rho_1)+I_1(k_n\rho_1)K_0(k_n)\}]}{K_1(k_n\rho_1)I_1(k_n)-K_1(k_n)I_1(k_n\rho_1)}\right]$$
$$+B_n''\left[-2(1-\nu)\frac{K_1(k_n)}{k_n}-k_nK_1(k_n)+\frac{[\rho_1K_0(k_n\rho_1)-k_nK_0(k_n)\{I_0(k_n)K_1(k_n\rho_1)+I_1(k_n\rho_1)K_0(k_n)\}]}{K_1(k_n\rho_1)I_1(k_n)-K_1(k_n)I_1(k_n\rho_1)}\right]$$
$$+\sum_{s=1}^{\infty}D_s'\frac{4\lambda_sk_n^2(-1)^n\sinh\lambda_s\zeta_1}{\zeta_1(\lambda_s^2+k_n^2)^2}C_0(\lambda_s)=-\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{2\lambda_s^2(-1)^n\sin\mu_j\zeta_1}{\mu_j\zeta_1(\lambda_s^2+k_n^2)}C_0(\lambda_s)$$
$$\times[E_j'l_{sj}+F_j'\{2(1-\nu)l_{sj}+p_{sj}\}+E_j''q_{sj}-F_j''\{2(1-\nu)q_{sj}-r_{sj}\}]$$
$$-2GK\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{2A_{jm}\lambda_s^2\mu_j(-1)^n\sin\mu_j\zeta_1}{\zeta_1(\mu_j^2+\beta_m^2)(\lambda_s^2+k_n^2)}g_{sm}C_0(\lambda_s\rho)e^{-(\mu_j^2+\beta_m^2)\tau}\quad\cdots\cdots(45)$$

$$B_n'\left[-\frac{2(1-\nu)+k_n^2\rho_1^2}{k_n\rho_1}I_1(k_n\rho_1)+\frac{[\rho_1^{-1}I_0(k_n)-k_n\rho_1I_0(k_n\rho_1)\{I_0(k_n\rho_1)K_1(k_n)+I_1(k_n)K_0(k_n\rho_1)\}]}{K_1(k_n\rho_1)I_1(k_n)-K_1(k_n)I_1(k_n\rho_1)}\right]$$
$$+B_n''\left[-\frac{2(1-\nu)+k_n^2\rho_1^2}{k_n\rho_1}K_1(k_n\rho_1)-\frac{[\rho_1^{-1}K_0(k_n)-k_n\rho_1K_0(k_n\rho_1)\{I_0(k_n\rho_1)K_1(k_n)+I_1(k_n)K_0(k_n\rho_1)\}]}{K_1(k_n\rho_1)I_1(k_n)-K_1(k_n)I_1(k_n\rho_1)}\right]$$
$$+\sum_{s=1}^{\infty}D_s'\frac{4\lambda_sk_n^2(-1)^n\sinh\lambda_s\zeta_1}{\zeta_1(\lambda_s^2+k_n^2)^2}C_0(\lambda_s\rho_1)=-\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{2\lambda_s^2(-1)^n\sin\mu_j\zeta_1}{\mu_j\zeta_1(\lambda_s^2+k_n^2)}C_0(\lambda_s\rho_1)$$
$$\times[E_j'^*l_{sj}+F_j'^*\{2(1-\nu)l_{sj}+p_{sj}\}+E_j''q_{sj}-F_j''\{2(1-\nu)q_{sj}-r_{sj}\}]$$
$$-2GK\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{2A_{jm}\lambda_s^2\mu_j(-1)^n\sin\mu_j\zeta_1}{\zeta_1(\mu_j^2+\beta_m^2)(\lambda_s^2+k_n^2)}g_{sm}C_0(\lambda_s\rho_1)e^{-(\mu_j^2+\beta_m^2)\tau}\cdots\cdots(46)$$

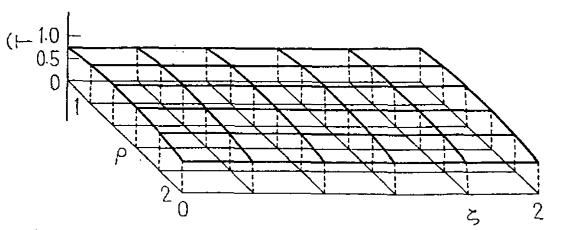
$$D_s'\left(\cosh\lambda_s\zeta_1+\frac{\lambda_s\zeta_1}{\sinh\lambda_s\zeta_1}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4\lambda_s^2(-1)^n}{(k_n^2+\lambda_s^2)^2\{\rho_1^2C_0^2(\lambda_s\rho_1)-C_0^2(\lambda_s)\}}[B_n'\{k_n\rho_1C_0(\lambda_s\rho_1)I_1(k_n\rho_1)\right.$$
$$\left.-k_nC_0(\lambda_s)I_1(k_n)\}+B_n''\{k_n\rho_1C_0(\lambda_s\rho_1)K_1(k_n\rho_1)-k_nC_0(\lambda_s)K_1(k_n)\}]\right]$$
$$=2GK\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_{jm}}{\mu_j^2+\beta_m^2}g_{sm}\left\{\frac{\cosh\lambda_s\zeta_1}{\sinh\lambda_s\zeta_1}\mu_j\lambda_s\sin\mu_j\zeta_1+\beta_m^2\cos\mu_j\zeta_1\right\}e^{-(\mu_j^2+\beta_m^2)\tau}$$
$$+\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\frac{\lambda_s\cosh\lambda_s\zeta_1}{\mu_j\sinh\lambda_s\zeta_1}\sin\mu_j\zeta_1-\cos\mu_j\zeta_1\right\}[E_j'^*l_{sj}+F_j'^*\{2(1-\nu)l_{sj}+p_{sj}\}+E_j''q_{sj}$$
$$-F_j''\{2(1-\nu)q_{sj}-r_{sj}\}]-\sum_{j=1}^{\infty}2\cos\mu_j\zeta_1(F_j'l_{sj}-F_j''q_{sj})\cdots\cdots(47)$$

式 (45)～(47) の無限級数を有限項で近似し，連立方程式を解くことにより，B_n', B_n'', D_s' が求まる．それを式 (33), (36), (40) に代入することにより，A_n', A_n'', C_s' が求まる．よってすべての未知係数が決定されたから，これらを式 (17)～(20) に代入することにより各応力成分が求まる．

4. 数値計算結果および考察

数値計算にあたって，温度，各応力成分をつぎのように無次元化した．

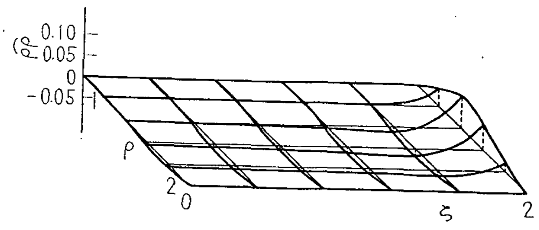
$$\widehat{T}=\frac{T}{T_0},\quad \widehat{\rho\rho}=\frac{\sigma_{rr}}{2GK},\quad \widehat{\theta\theta}=\frac{\sigma_{\theta\theta}}{2GK}$$
$$\widehat{\zeta\zeta}=\frac{\sigma_{zz}}{2GK}$$



$\rho_1=2.0$,　$\zeta_1=2.0$,　$\gamma_1=1.0$,　$\gamma_2=1.0$,　$\gamma_3=0.001$,　$\tau=0.1$

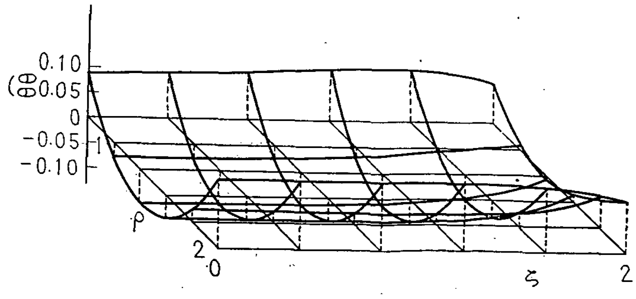
図 2　温度分布

材料のポアソン比を $\nu=0.25$, 内・外半径の比を $\rho_1=2$，無次元相対熱伝達率をそれぞれ $\gamma_1=1.0$, $\gamma_2=1.0$, $\gamma_3=0.001$ とし，円筒の内径 $2a$ と長さ $2l$ の比を，



$\rho_1=2.0$,　$\zeta_1=2.0$,　$\gamma_1=1.0$,　$\gamma_2=1.0$,　$\gamma_3=0.001$,　$\tau=0.1$

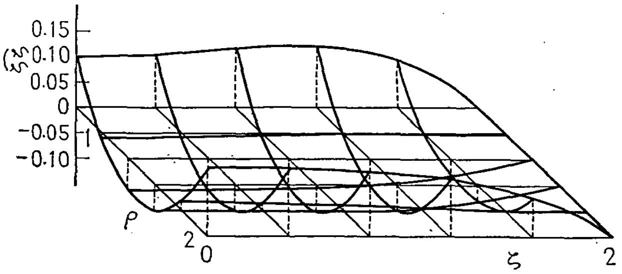
図 3　半径応力分布



$\rho_1=2.0$,　$\zeta_1=2.0$,　$\gamma_1=1.0$,　$\gamma_2=1.0$,　$\gamma_3=0.001$,　$\tau=0.1$

図 4　フープ応力分布

$\zeta_1=0.5$, 1.0, 2.0, 5.0 の場合について数値計算をおこなった．図2から7は $\zeta_1=2$ の場合について図示した．図2はフーリエ数 τ が 0.1 の場合の温度分布を示す．図3から5には $\tau=0.1$ の場合の半径応力，フープ応力，軸応力を示す．各応力とも端面効果の影響により，端面近傍で応力がかく乱されているが，端面より内半径程度内側になると応力のかく乱は小さくなる．図6には内側境界上のフープ応力と軸応力を示す．内側境界上では，フープ応力も軸応力も端面近くで大きな応力が生じる．図7には外側境界上のフープ応力と軸応力を示す．図において実線は厳密解であり，破線は端面の境界条件を合力，合モーメントで満足させた，いわゆる St. Venant の原理を用いて解析した近似解である．すなわち，本研究の式 (16) の未知係数のなかで $A_0=B_0=C_0=A_n'=B_n'=A_n''=$



$\rho_1=2.0$, $\zeta_1=2.0$, $\gamma_1=1.0$, $\gamma_2=1.0$, $\gamma_3=0.001$, $\tau=0.1$

図 5　軸応力分布

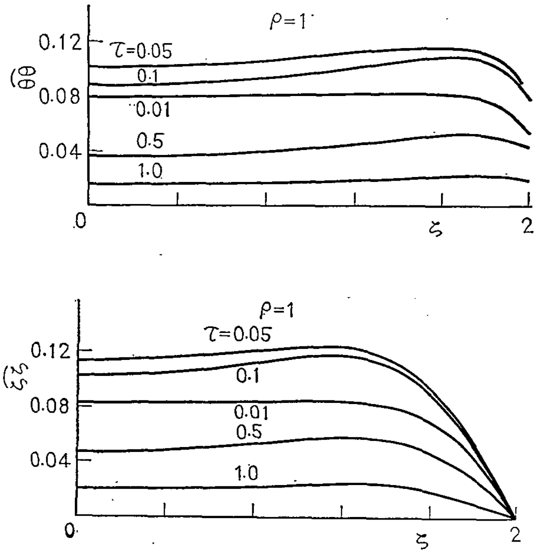
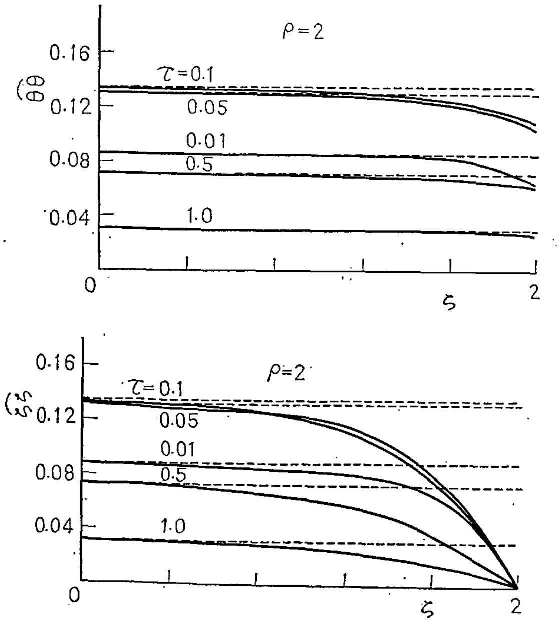


図 6　内側境界上のフープ応力と軸応力



実線は厳密解，破線は近似解

図 7　外側境界上のフープ応力と軸応力

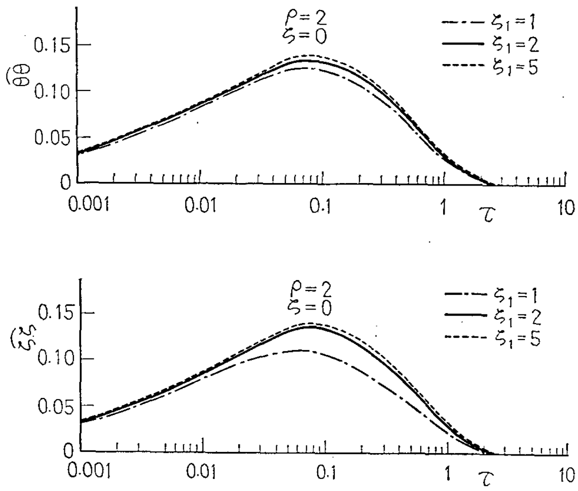


図 8　中央外表面上のフープ応力と軸応力の時間的変動

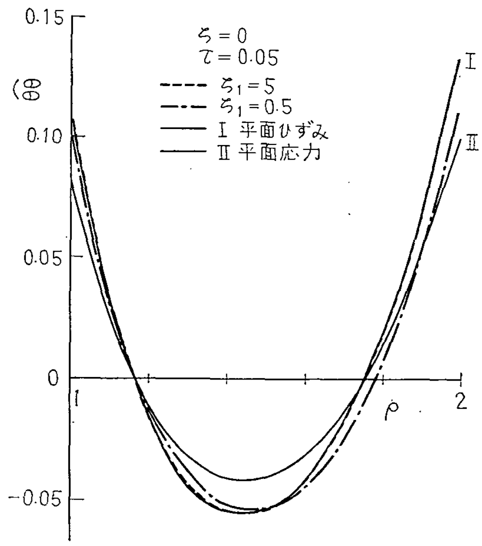


図 9　中央面のフープ応力と平面応力状態，平面ひずみ状態におけるフープ応力との比較

$B_n''=C_s'=D_s'=0$ とおき，境界条件式 (21)～(24) を用いて残りの未知係数を決定することにより得られる解である．図6と7から，各応力とも中央の外側境界で応力がいちばん大きくなることがわかる．図7より，近似解はフープ応力に対して端面近傍まで厳密解と比較的良く一致しているが，軸応力に対しては端面近傍ではほとんど一致しない．図8には最大応力が生じる中央外表面上のフープ応力と，軸応力の時間的変化を $\zeta_1=1,2,5$ の場合について示す．$\zeta_1=1,2,5$ の場合とも最大応力は $\tau=0.08$ 近傍で生じる．$\zeta_1=1$ の場合最大応力はフープ応力であるが，$\zeta_1=2,5$ の場合，軸応力とフープ応力はほとんど同じ大きさの応力を持つ．図9には中央面のフープ応力について，$\zeta_1=0.5$, 5.0 の場合と平面ひずみ状態，平面応力状態と考えて解析した場合について示す．$\zeta_1=5$ の場合の応力分布は，平面ひずみ状態と考えた場合と差異はなく，図面上で一致する．$\zeta_1=0.5$ と 5.0 の場合とも，平面応力状態と平面ひずみ状態のあいだに応力が分布している．図8と9から，内径と長さの比が大きくなるにしたがって応力は増加し，平面ひずみ状態の解に近づくことがわかる．

最後に，数値計算にあたっては名古屋大学・京都大学大型計算機センターを利用した．

文　　献

(1) 例えば Youngdahl, C.K. and Sternberg, E., *Trans. ASME*, Ser. E, **28**-1 (1961-3), 25; Sokolowski, M., *Arch. Mech. Stos.*, **10**-6 (1958-6), 811.
(2) 小泉，機論，**30**-218 (昭 39-10), 1183.
(3) Valentin, R.A. and Carey, J.J., *Nucl. Engng. & Des.*, **12**-3 (1970), 277.
(4) Goodier, J.N., *Phil. Mag.*, **23** (1937), 1017.
(5) Love, A.E., *Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 4th ed., (1944), 274, Oxford Univ. Press.

討　　論

〔質問〕　渥 美　光 (東北大学工学部)

(1) 結果の信頼性につながる数値計算の精度についての説明がない．この点についてお尋ねしたい．

(2) 数値例で $\gamma_1=1.0$, $\gamma_3=0.001$ とおいている．これは円筒の端面が熱絶縁に近い場合を想定したものと思うが，ほかに特に理由などがあれば伺いたい．

〔回答〕　(1) 数値計算において，無限級数を有限級数で近似して計算した．例えば $\zeta_1=2$ の場合，m, n, s, j の和に対して上限を 20 とした．これは上限を 15 とした場合と比較して，有効数字の3けためが多少変化する程度である．上限を 20 とした結果，式(45)～(47) の未知数 B_n', B_n'', D_s' の解の精度は 10^{-18}～10^{-32} のオーダであり，応力成分による精度は時間，位置により多少異なるが，境界上で零でなければならない半径応力，軸応力，せん断応力は最大応力に対し，それぞれ，約 2%, 2%, 0.000 1% 程度である．よって，数値計算は信頼できるものと考えられる．

(2) 数値例で $\gamma_1=\gamma_2=1.0$, $\gamma_3=0.001$ と選んだ特に大きな理由はないが，平面応力状態，平面ひずみ状態は端面が断熱であるため，それらと厳密解を比較するため，γ_3 を小さな値に選んだ．$\gamma_3=0$ としなかったのは，本解法では $\gamma_3 \neq 0$ と仮定して式変形を進めており，$\gamma_3=0$ とした場合は式が異なるため，断熱に近い状態ということで，γ_3 を小さな値に選んだ．

〔質問〕　宮 尾 嘉 寿・五 島 孝 仁 (富山大学工学部)

(1) 熱的境界条件として，一様な温度場にある媒質に対する熱放散を取扱われているが，実際には円筒の内側と外側で媒質の温度が異なったり，軸方向に媒質温度が一様でなかったりすることも多いと思われるが，そのような場合に対しての本解析の適用について考え方をご教示いただきたい．

(2) 本数値計算では，端面の無次元相対熱伝達率 γ_3 が内，外面の γ_1, γ_2 に比べかなり小さい場合を取り上げて，端面効果の影響を検討されているようであるが，γ_3 が大きくなれば端面効果の影響もかなり大きくなると考える．加えて図8に示される応力の時間的変動も，相対熱伝達率の大きさにより大きく左右されるものと思われるが，本問題のような場合ビオー数の変化による影響を検討する必要性はないのか．

〔回答〕　(1) いずれの場合も同様な方法で解析することができる．例えば著者らは軸方向に温度変化のある場合の有限円柱(付1)について，発表している．

(2) ご指摘のとおり，ビオー数の変化による影響を検討することも重要と考えるが，本研究は厳密解とサンブナンの原理を用いた近似解，平面応力状態，平面ひずみ状態とした場合との比較により重点をおいて，数値計算を実行した．

ご指摘のとおり，γ_3 を大きくすれば端面の影響もかなり大きくなると思われるが，平面応力状態，平面ひずみ状態は端面が断熱の解であるので，それらと比較するため，γ_3 を小さな値を用いた．

(付 1) 野田・竹内，第 25 回応用力学連合講演会講演論文抄録集，(昭 50-10), 407.