

539.384.08 : 530.17 : 539.377.01

各種異形板の微小たわみの測定*

竹内洋一郎**, 野田直剛***

1. 緒 言

自由境界をもつ二次元熱応力問題と周辺固定の平板曲げ問題が相似関係にあることは従来よりよく知られていることである⁽¹⁾。したがって本研究は著者らが研究している熱源が作用する二次元熱応力問題に関する研究⁽²⁾⁻⁽⁹⁾の一部をなすものである。しかし異形板の微小たわみの解析それ自身も、いまなお理論解が全面的に得られていない問題であるので、本報告では周辺固定に限定しないで、理論解の得られにくい異形板の微小たわみの光波干渉法による実験解析法と、多くの各種異形板に関する微小たわみの測定結果を示した。この実験的解析法は光弾性装置が利用できるため装置作成が容易であり、フリンジが鮮明に得られ、しかも板のたわみの全体としてののはあくが一挙に得られるだけでなく、単色光の波長をそのまま物指しとして利用できるから、微小なたわみが高精度に得られる利点がある。

2. 相似理論

自由境界をもつ二次元熱応力問題において熱応力関数 χ と熱応力成分 σ_t (注1) の基礎式および境界条件 (B を境界を表わす添字とする) は次式で与えられる。(単連結領域の場合)

$$\Delta\chi = -k\Delta\tau \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\sigma_t = \partial^2\chi/\partial n^2 \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$(\chi)_B = 0, (\partial\chi/\partial n)_B = 0 \quad \dots\dots\dots(3)$$

ただし

 τ : 温度変化 k : 平面応力問題に対し $\alpha_t E$, 平面ひずみ問題に対し $\alpha_t E/(1-\nu)$ α_t : 線膨張係数 E : 縦弾性係数 ν : ポアソン比

* 昭和45年6月19日 東海支部浜松地方講演会において講演, 原稿受付 昭和45年7月24日。

** 正員, 静岡大学工学部 (浜松市城北 3-5-1)。

*** 准員, 静岡大学工学部。

注1) σ_t は境界上において考えるとき, 境界の接線方向の垂直応力成分で, たとえば境界が円の場合は $n \rightarrow r$ となるから $\sigma_{\theta\theta}$ となる。 n : 境界法線

$$\Delta: \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$$

周辺固定の平板の曲げ問題において, 垂直たわみ w と曲げモーメント M_n の基礎式および境界条件は次式で与えられる。

$$\Delta\Delta w = p/D \quad \dots\dots\dots(4)$$

$$M_n = -D \cdot \partial^2 w / \partial n^2 \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$(w)_B = 0, (\partial w / \partial n)_B = 0 \quad \dots\dots\dots(6)$$

ただし p : 垂直分布荷重 D : 板の曲げ剛性上の関係より, 比例定数を K とすれば

$$\chi = Kw \quad \dots\dots\dots(7)$$

となる。もし熱源 q がある場合の定常熱伝導の基礎式は λ_t を熱伝導率とすれば

$$\Delta\tau = -q/\lambda_t \quad \dots\dots\dots(8)$$

式(8)を式(1)に代入すれば

$$\Delta\chi = kq/\lambda_t \quad \dots\dots\dots(9)$$

式(4)と式(9)を比較すると, 式(7)は

$$\chi = (kqD/p\lambda_t) \cdot w \quad \dots\dots\dots(10)$$

$$K = kqD/p\lambda_t \quad \dots\dots\dots(11)$$

上式よりたわみ w が求まると熱応力関数 χ が決定されることになる。

3. 測 定

3.1 装置 光波干渉法による平板の微小たわみの測定装置として, 光弾性測定装置より偏光板, 検光板を除いたレンズ系よりなる図1に示す測定装置を製作した。波長 $\lambda = 5893 \text{ \AA}$ のナトリウム単色光源 (A) (あるいはガスレーザ光源) から出た光は, 集光レンズ (C) と絞り (D) により点光源となる。点光源からの光はとつ (凸) レンズ (E) により平行光線となり, ハーフミラー (G) により直角に反射した平行光線は, 下方の水晶製 60ϕ のオプティカルフラット (F) の下面と試料の上面とで反射した光の干渉によって干渉じまを形成する。この干渉じまを凸レンズ (H) を通して, カメラ (I) よりガラス製の乾板により撮映する。干渉じまの読みとりには万能投影機を使用した。荷重装置は, 集中荷重は直径 3ϕ の鋼球をスピンドルを介してマルトーリングに接続する方法と (図2),

レバー方式を併用し、分布荷重は圧縮機による約 $1 \sim 0.1 \text{ kg/cm}^2$ の空気圧を加える(図3)方法によった。

3・2 試料 実験に使用した試料(図4)は SS 41 炭素鋼で、その寸法の一列を図5に示す。測定部と取付部をアルダイトで接着したものをおもに採用し、一部に測定部と取付部が一体のものも使用した。周辺固定の条件を満足するように、測定部の寸法の2~3倍の大きい円柱形状に作った。試料表面はラッピング加工し鏡面に仕上げる注2)。試料表面は完全で平面であることが望ましいが、わずかな初期のたわみは修正して差引くので必ずしも完全な平面に仕上げる必要はない。実際には初期のたわみとして干渉じまが数本以内になるよう仕上げた。したがって初期の最大高低差は 1μ 以内となる。

3・3 測定原理 干渉じまはオプチカルフラットの下面と試料の上面との垂直距離を d とすれば

$$d = (2n-1) \cdot (\lambda/4) \dots\dots\dots (12)$$

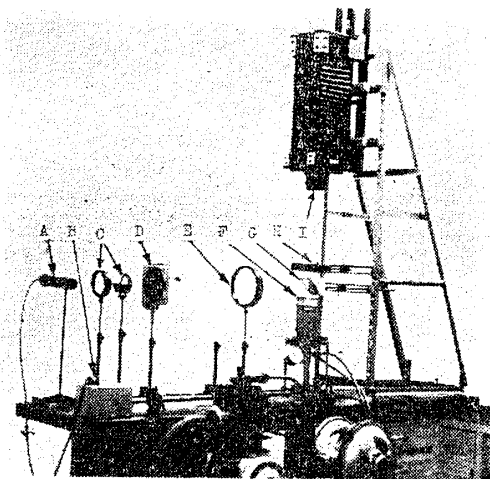


図1 測定装置

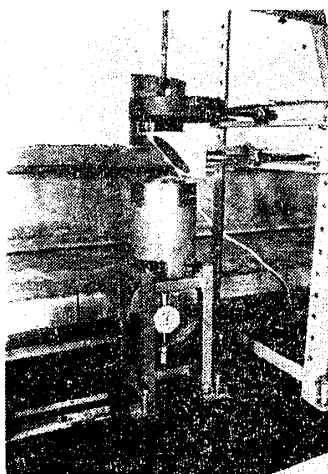


図2 集中荷重装置

注2) 研摩法は平滑な定盤とのすり合わせにより、まず GC 400#, 600#, 1000#, 1500# の順に研摩剤を用い湿式ハンドラッピングを行ない、後に酸化クロムで乾式ラッピングを行なった。

の位置で光は干渉して、明るいしまを作る。すなわち $1/4$ 波長の奇数倍のところで光は強めあい、図6のように連続した干渉じま模様を形成する。したがって干渉じま群の間隔は $1/2$ 波長の垂直距離の変化を表わしている。図6の点Aを基準として、図7は試料のたわみをフリンジの写真より導く方法を示している。この結果よりオプチカルフラットの傾斜による影響は修正

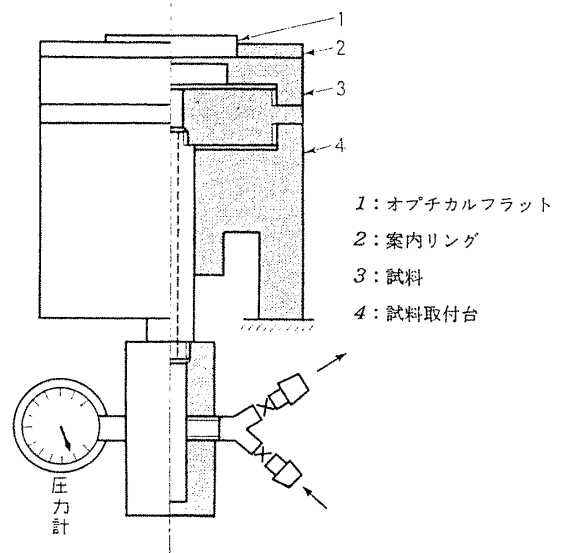


図3 一様分布荷重の荷重装置

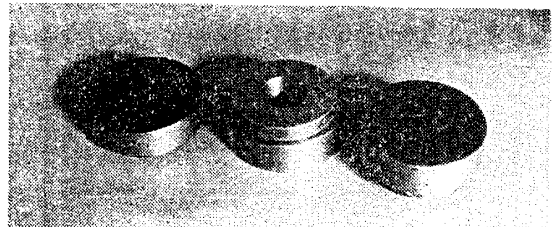
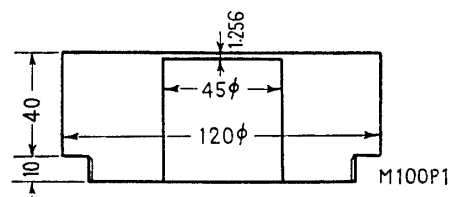
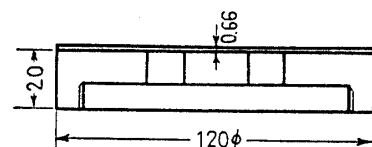


図4 試料

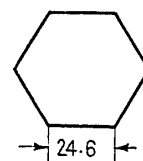


(a) 一体試料



(b) 接着試料

図5 試料寸法



される。

3・4 測定結果 理論解の求められている簡単な形状のもの、すなわち円、正三角形、2等辺三角形、正方形、半円、同心円板について、理論解とほぼ完全に一致するたわみの測定の結果を得たので⁽¹⁰⁾、本報告では理論解の得られにくい、自由境界の円孔をもつ正四角形板に一樣分布荷重が作用する場合（図 8, 9）注3）、内周自由境界の偏心円孔板に、中心集中荷重および偏心集中荷重が作用する場合（図 10, 11）、正六角形板（図 12, 13）、台形板（図 14, 15）、平行四辺形板（図 16）にそれぞれ集中荷重および一樣分布荷重が作用する各形状板について測定し、それらのフリンジ写真およびたわみ曲線を図 8～16 に示した。

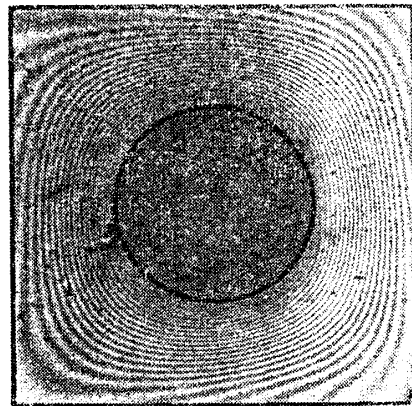
各図において垂直たわみ w をミクロン (μ) 単位で与えている。また集中荷重の作用点は図 11 を除いて、図形の中心である。

4. 応 用

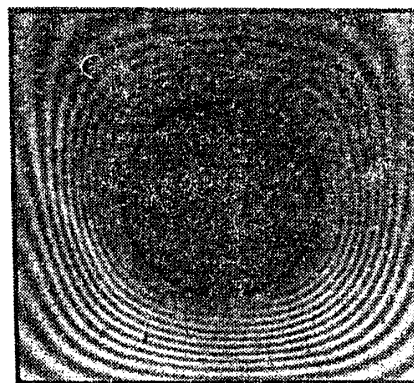
板の微小たわみの測定結果より、熱応力の相似解析に対する応用を示す。一様な熱源 q が作用する円板の定常軸対称熱応力の相似解析は式 (2), (11) より

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{Dkq}{\lambda_i p} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{Dkq}{\lambda_i p} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

上の結果を利用して熱応力成分を求めるには、穴の



(a) $p = 0.49 \text{ kg/cm}^2$



(b) $p = 0.12 \text{ kg/cm}^2$

辺の長さ：35 mm，円孔直径：17.5 mm，
板厚：0.88 mm

図 8 分布荷重をうける円孔をもつ正方形板

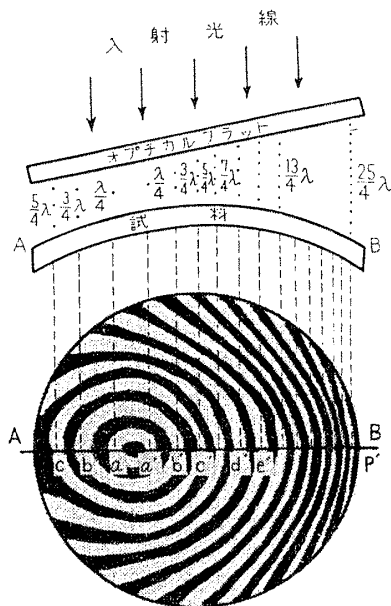


図 6 干渉じまの形成

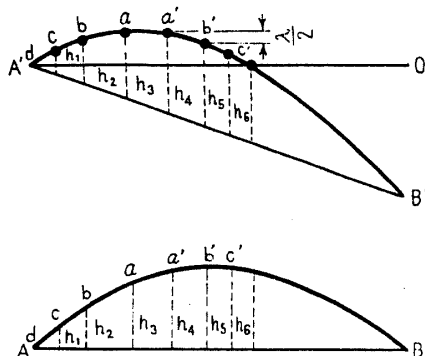


図 7 たわみ曲線の求め方

注3) この場合の加圧法は、試料に接してやわらかいスポンジ、続いてそれより堅いスポンジをはさんで、その下に四角形の金属板を当てて下部より金属板を押し上げる。

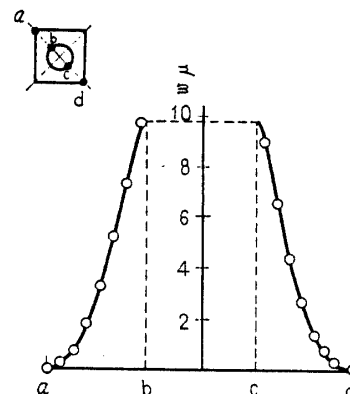
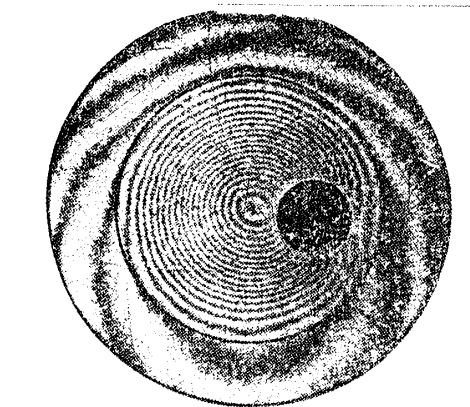
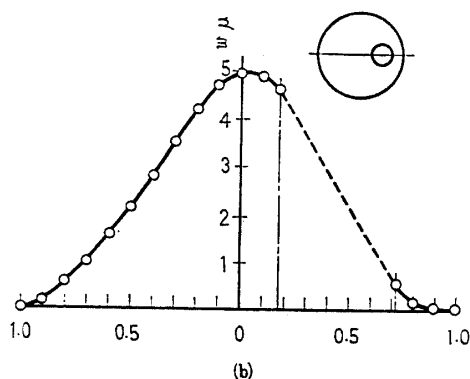


図 9 $p=0.49 \text{ kg/cm}^2$ の一様分布荷重をうける円孔をもつ正方形板のたわみ〔図 8(a)に対応〕



(a)

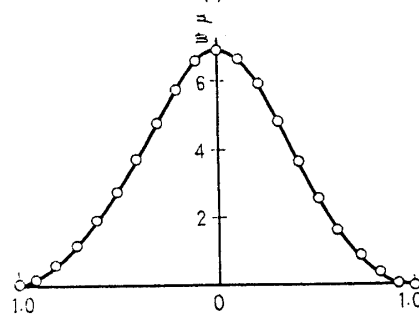


円板直径: 40 mm, 円孔直径: 11 mm, 偏心円孔の中心の偏心: 10.5 mm, 板厚: 1.15 mm

図 10 中心に集中荷重 ($P=1.14$ kg) をうける偏心円孔板



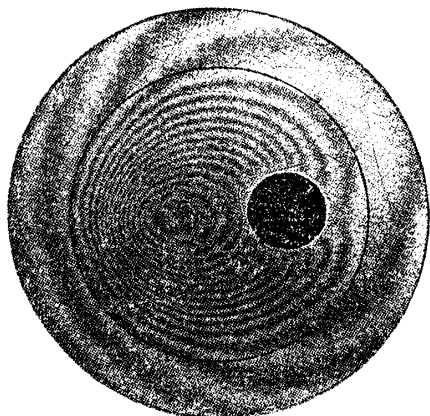
(a)



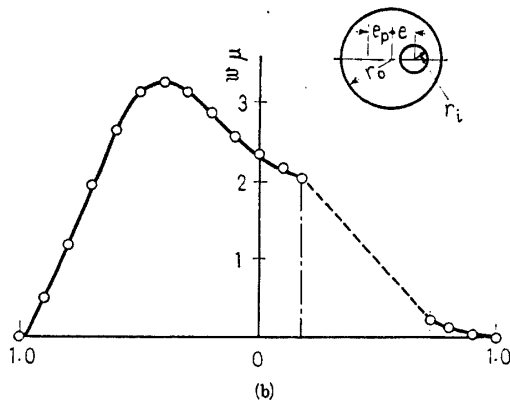
(b)

一辺の長さ: 25.08 mm, 板厚: 0.658 mm

図 12 集中荷重 ($P=0.368$ kg) をうける正六角形板, たわみは対角線のものを示す

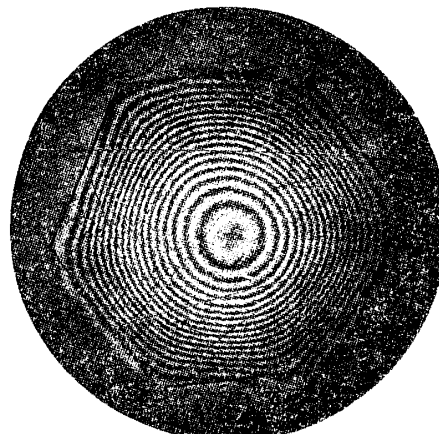


(a)

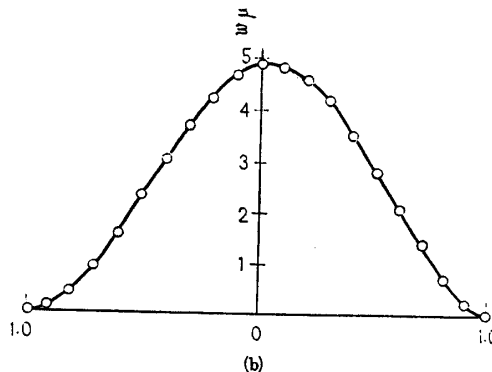


円板直径: 40 mm, 円孔直径: 11 mm, 偏心 e : 10.5 mm, 荷重の偏心 e_p : 10 mm, 板厚: 1.15 mm

図 11 偏心集中荷重 ($P=1.45$ kg) をうける偏心円孔板



(a)

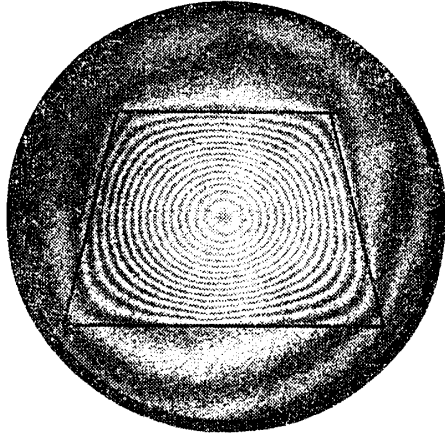


(b)

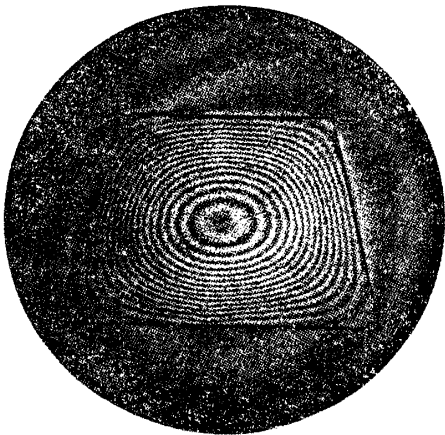
一辺の長さ: 25.08 mm, 板厚: 0.658 mm

図 13 一様分布荷重 ($p=0.1$ kg/cm²) をうける正六角形板, たわみは対角線のものを示す

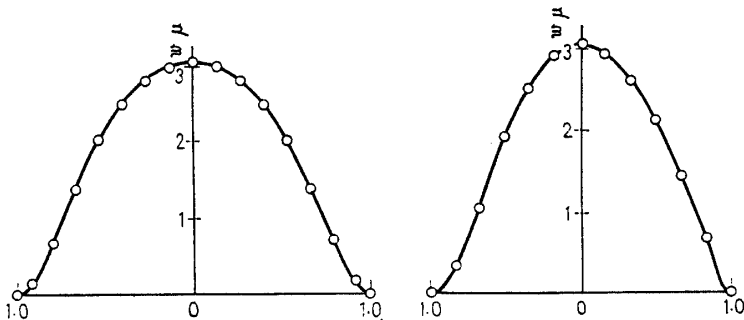
ない単連結領域に対しては式 (1), (2) および式 (4), (5) の対比により, 周辺固定のたわみ測定の結果, たわみ曲線を描き, たわみ曲線の数値微分によって相似



上底: 30.35 mm, 下底: 44.53 mm
高さ: 29.85 mm, 板厚: 0.638 mm
図 14 集中荷重 ($P=0.326$ kg) をうける等脚台形板



(a)



(b) 脚の中点を結ぶ線上のたわみ (c) 上下両辺の中点を結ぶ線上のたわみ
上底: 30.35 mm, 下底: 44.53 mm, 高さ: 29.85 mm, 板厚: 0.638 mm
図 15 一様分布荷重 ($p=0.14$ kg/cm²) をうける等脚台形板

計算をすればよい。本報告ではフリンジ写真よりたわみ曲線を描き, この曲線より補間公式を作り, つぎの数値微分公式⁽¹¹⁾を用いて熱応力を計算した。すなわち測定結果より作製したたわみ曲線上の r に対応する w を読みとり, それぞれの値を x, y とするとき,

(a) 基準点中央の等間隔部分の数値微分公式

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0} = \frac{1}{s} \left\{ \frac{2}{3} (y_1 - y_{-1}) - \frac{1}{12} (y_2 - y_{-2}) \right\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

ただし, $x=0$ の点を中心に左右に等間隔 $s, 2s$ をへだてた値をそれぞれ, y_{-1}, y_{-2} および y_1, y_2 とする。

(b) 基準点端の等間隔部分の数値微分公式

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0} = \frac{1}{s} \left(-\frac{25}{12} y_0 + 4y_1 - 3y_2 + \frac{4}{3} y_3 - \frac{1}{4} y_4 \right) \quad \dots\dots\dots (15)$$

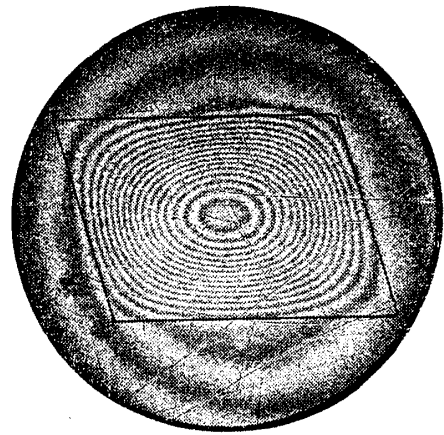
(c) 端のほうについて不等間隔 ξs (ただし $\xi \leq 1$) となる場合の基準点端の数値微分公式

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0} = \frac{1}{s} \left\{ -\frac{1+2\xi}{\xi(1+\xi)} y_0 + \frac{1+\xi}{\xi} y_1 - \frac{\xi}{1+\xi} y_2 \right\} (\xi \leq 1) \quad \dots\dots\dots (16)$$

このようにして熱応力分布を求めた一例として, 中央に点熱源が作用する場合, 図 17 のフリンジ写真より図 18 の熱応力分布が得られる。穴のある複連結領域の問題に対しては, 第 1 の境界に対しては式 (3), (6) の対比関係でよいが, 第 2 の境界に対しては特別の熱的境界条件の場合を除いて別の考察が必要となる。すなわち著者の別の報告⁽³⁾に明らかなように, 熱応力関数は第 2 の境界に対しては一般につぎのように置かねばならない。

$$(X)_B = C_{11}x + C_{21}y + C_{31} \quad \dots\dots\dots (17)$$

中空円板の軸対称問題では $C_{31}=0$ となる温度分布^{注 4)}の場合には, 内外周で



長辺: 39.50 mm, 短辺: 30.375 mm
板厚: 0.646 mm, 長対角線: 54.19 mm
短対角線: 43.78 mm

図 16 一様分布荷重 ($p=0.09$ kg/cm²) が作用する平行四辺形板

注 4) 著者の文献 (3) より, 対称問題では

$$C_{11}=C_{21}=0$$

ゆえに $C_{31}=0$ となるためには, 内側境界で T_i , 外側境界で 0 で, 一様な熱源 q があるときには

$$-(4D_{00} + k\bar{B}_{00})/4D_{00} = 0$$

この場合の内側境界の温度条件を上の関係より文献 (3) に従って計算すれば

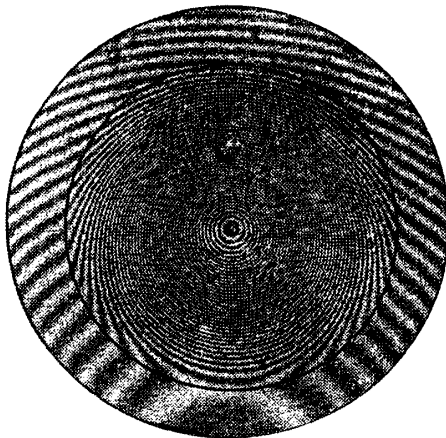
$$T_i = \frac{q}{4\lambda} (b^2 - a^2) \left\{ 1 - \frac{\ln(b/a)}{2} \frac{(b^2 - a^2)(a^2 + b^2) - 4a^2b^2 \ln(b/a)}{(b^2 - a^2)^2 - 4a^2b^2} \right\}$$

ただし, a および b : 円板の内外両半径。

$(w)_B = (\partial w / \partial n)_B = 0$ となるから, この場合の熱応力問題の一例として一様分布熱源が作用する中空円板の熱応力問題を考える. これは図 19 のように内外両周辺固定の同心中空円板に一様分布荷重が作用する場合のフリンジ写真より, 図 20 のたわみ曲線, 図 21 の熱応力分布を得る. 単連結および複連結のいずれの場合についても, 熱応力の分布曲線について, 理論解と良好な一致を示している.

5. 結 論

(1) 板の微小たわみに関し, たわみ分布の理論解が求められている簡単な形状のものについては, 別の報告⁽¹⁰⁾により, 本報告で用いた光波干渉法による微小たわみの測定法は理論解と一致する精度の高い結果を得られたので, 本報告には理論解の得られにくい各種異形板の微小たわみの測定を集中荷重および一様分布荷重の代表的な場合について行ない, たわみの全体としてはあく, および簡単な熱応力問題に対する応用に言及した. なお単, 複両領域のいずれの場合についても一般的な温度分布の場合の熱応力問題の相似解析については別の機会に発表する予定である.



円板直径: 45 mm, 板厚: 0.868 mm
図 17 中央集中荷重 ($P=1.5$ kg) が作用する円板

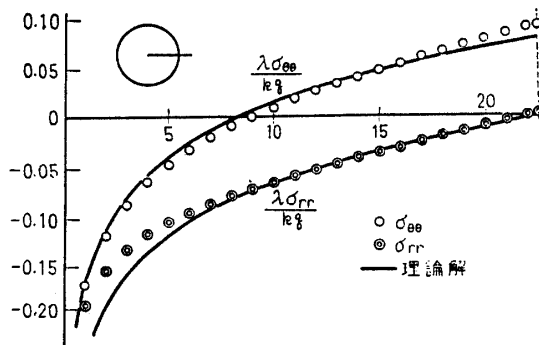
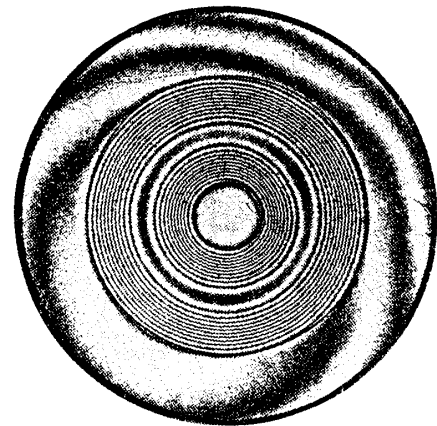


図 18 点熱源による円板の熱応力分布

(2) 本実験に及ぼす誤差としては, (i) オプティカルフラットの平面度の誤差, (ii) レンズ系の球面収差の影響, (iii) はばをもつフリンジのしまの読取り誤差, (iv) 板厚はたわみに高次の影響をもつから, 試料の厚みの不均一による誤差, などが考えられるが, これらは理論解のわかっている簡単な形状における測定結果と理論値との比較により, 無視できる程度のものである.

(3) 熱応力解析に対する応用としては, 2 回の数値



円孔の直径: 10.7 mm, 円板直径: 39.4 mm
板 厚: 0.83 mm

図 19 一様分布荷重 ($p=1$ kg/cm²) をうける両境界固定の同心円孔板

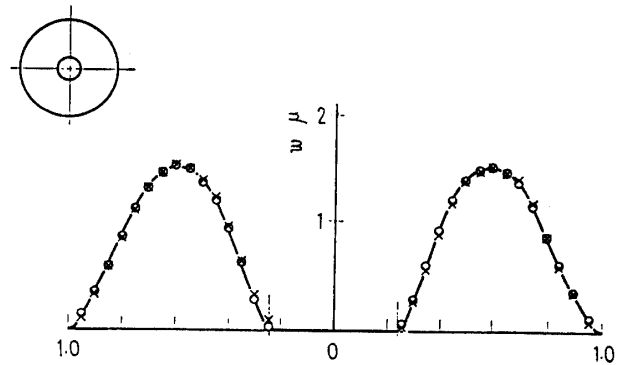


図 20 一様分布荷重をうける同心円孔板のたわみ (図 17 に対応する)

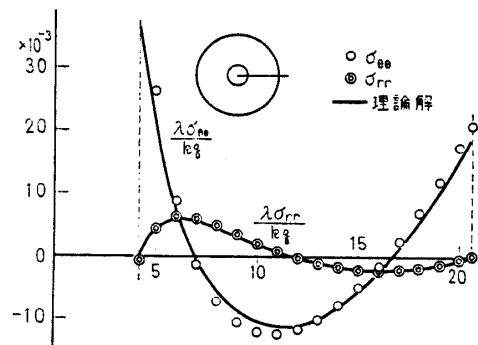


図 21 一様分布熱源による同心円孔板の熱応力分布

あるいは図式微分を行なうため、誤差のはいる余地は大きい。ことに最大応力を生じることが予想される境界上の応力については、境界端における傾斜の算定のしかたに正確を期することは困難であるが、境界を離れた位置の応力については理論解と良好な一致を見た。

(4) 初期たわみは後で差し引いて修正されるので、試料は完全な平面でなくてもよいが、正負の傾向の判然とした数本の同心円の干渉じまが得られるように試料を仕上げることに努力した。またオプチカルフラットの傾斜の影響もたわみ曲線作成にさいし、除去されるから傾斜があってもよいが、たわみの全体としてはあくがフリンジ写真より一挙に得られるためにはオプチカルフラットに傾斜がなく、初期たわみがない場合が望ましい。この場合は等干渉じま曲線はすなわち等たわみ曲線に最初から一致している。

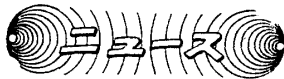
(5) 本方法は原始的な原理によるものであるが、光弾性装置を利用できるため装置が簡単であり、しかもたわみの全体としてはあくが一挙にしてわかり、フリンジ写真が鮮明であるなどの多くの長所をもって

るから、熱応力の相似解析の応用をさておいても、理論解の得られにくい異形板の微小たわみの測定には良好な方法であるといえる。

本研究は文部省科学研究費による研究の一部をなすもので、徳島大学大学院学生、元谷良行、村部憲二、戸井憲三の諸氏の協力によって行なわれたものである。

文 献

- (1) たとえば, Ross, A.L., *Trans. ASME, Ser. D*, **85-4** (1963-12), 579.
- (2) 竹内, 機論, **34-242** (昭 41-10), 1470.
- (3) 竹内・ほか 2 名, 機論, **34-259** (昭 43-3), 403.
- (4) 竹内・ほか 2 名, 機論, **34-264** (昭 43-8), 1400.
- (5) 竹内・須見, 機論, **36-282** (昭 45-2), 193.
- (6) 竹内・野田, 機論, **36-290** (昭 45-10), 1630.
- (7) Takeuti, Y. and Sekiya, T., *Z. AMM*, **48-4** (1968), 237.
- (8) Takeuti, Y. and Sumi, N., *Int. J. Engng. Sci.*, **6-9** (1968), 539.
- (9) Takeuti, Y., *Z. AMM*, **45-4** (1965), 177.
- (10) Takeuti, Y. and Noda, N., *Trans. ASME, Ser. E*, **37-4** (1970-12), 1182.
- (11) 根来, 応用物理, **8-12** (昭 14), 5.



ISO/TC 108 WG 7 の最近の活動情況

ISO/TC 108 機械振動と衝撃調査班 主査 国枝正春

振動衝撃の人体の暴露の問題を取扱っている ISO/TC 108 WG 7 の今までの活動は機械学会誌⁽¹⁾または標準化と品質管理⁽²⁾に紹介されているが、これよりも新しい活動情況をお伝えするには、1970年7月ジュネーブで開かれた TC 108 の総会のようすを記述することが最も手短かであると思い、以下に箇条書きに示す。

(1) 数年来、全身振動の暴露の基準、主として乗物に利用できる、が議論されてきた。今回小修正の後に ISO 推奨案となった。また建造物、船、救急車、振動公害などでの人間の暴露基準は correction table の形で別の document にすることになった。

(2) 手腕系の振動、さく岩機やチェーンソー（木を切る機械）など振動工具使用者の手指にレイノー病という一種の循環障害が起こるため、各国で手腕系の振動を問題にしているが、まず始めに計測法を規準化することになった。すなわち、三方向加速度計を使って、速度で周波数荷重した回路で 2~1 400 Hz 以内の振動のレベル (dB) を読むことになる模様。でき得れば印加されたパワーをも推定するように考えて行くことになるだろう。また暴露基準は現在あるデータでまず試

案を作ってみるとのこと。

(3) 衝撃の暴露基準, car clash の問題に関連して人体の衝撃の暴露基準を作るようである。

(4) seat 上の振動の計測, ヨーロッパ経済開発協力機構 (OECD) で seat 上の振動の測定法が規準化された。WG 7 でもこの問題を取上げるとのこと。

(5) 全身の機械インピーダンスの規準化, 人体の dummy は広くパラシュートテスト, ejection seat, 自動車衝突の問題に利用されているが、この構造を規格化するために、まず人体の機械インピーダンスの規準化を進めるとのこと。

以上のように WG 7 の作業はますます増大して行きつつある。これに対処するために日本でも機械学会の中に“WG 7, 人体に対する振動衝撃許容限調査班”〔主査 国枝正春(鉄研)〕が発足をみた。この調査班の作業を円滑にするために多くのご意見をお寄せくださることを期待いたします。(文責 三輪俊輔)

文 献

- (1) 機誌, **72-606** (昭 44-7), 954.
- (2) 標準化と品質管理, **23-4** (昭 45-4), 74.