

内部熱発生を伴う円孔を持つ正方形領域の非定常熱応力\*

野 田 直 剛\*\*, 竹 内 洋 一 郎\*\*\*

1. 緒 言

円孔をもつ正多角形領域の熱応力問題は、セル的配列の一種と見なすと原子炉構造に遭遇する重要問題として、従来定常温度分布の場合について、各種温度条件、境界条件に対してすでに解析されている<sup>(1)~(4)</sup>。原子炉が定常運転状態では定常熱応力問題と考えられるが、始動、停止時には非定常熱応力問題となる。この場合に対してはやはり重要問題ではあるがこの種の領域に対する非定常熱伝導問題の解析の困難性のためまだ解かれていない。本研究では定常の場合と同様に辺点法を利用して、一様な内部熱発生のある円孔をもつ正多角形領域の非定常熱伝導問題をラプラス変換法により解析し、その温度分布の結果より同一領域の非定常熱応力問題を辺点法を利用して解析した。この種の問題は多重連結領域の平面熱弾性問題になるため、熱応力関数法による解析のさい、変位および回転が一価でなければならない物理的条件であるいわゆる Michell の条件式を満足させることにより、多重連結領域に対する未知定数を決定した。数値計算は両境界が零度に保たれ、一様な内部熱発生のある円孔をもつ正方形領域に対して行って、温度分布および熱応力分布を求めた。

2. 解 析

2.1 温度分布 図 1 に示された内径  $a$ 、内接円の半径  $b$  なる正  $n$  角形領域について考える。単位時間、単位体積当たり一様な内部熱発生  $Q$  を持つ二次元非定常熱伝導方程式は

$$\frac{1}{\kappa} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \Delta \tau + \frac{Q}{\lambda} \dots\dots (1)$$

ただし、 $\Delta = \partial^2/\partial r^2 + r^{-1}\partial/\partial r + r^{-2}\partial^2/\partial \theta^2$ 、 $\tau$  は温度上昇、 $t$  は時間、 $\kappa$  は温度伝導率、 $\lambda$  は熱伝導率である。

境界条件は解析を容易にするため両境界一定温度(簡単のため  $0^\circ$ ) とする。すなわち、

$$r=a, \quad x=b \text{ で } \tau=0 \dots\dots (2)$$

初期条件は

$$t=0 \text{ で } \tau=0 \dots\dots (3)$$

式 (1) を解くためにラプラス変換法を用いる。 $\tau(r, \theta, t)$  のラプラス変換を次式で表す。

$$\tau^*(r, \theta, p) = \int_0^\infty \tau(r, \theta, t) e^{-pt} dt$$

ただし、 $p$  はラプラス変換のパラメータである。式 (3) を考慮して式 (1) をラプラス変換すれば

$$\left(\Delta - \frac{p}{\kappa}\right) \tau^* = -\frac{Q}{\lambda p} \dots\dots (4)$$

式 (4) の一般解は特解と右辺を零とした同次方程式の一般解との和で与えられる。まず特解  $\tau_p^*$  は視察により

$$\tau_p^* = \kappa Q / \lambda p^2$$

また式 (4) の同次方程式の一般解  $\tau_c^*$  は二次元極座標系に対し

$$\begin{aligned} \tau_c^* = & \bar{A}_0 I_0(qr) + \bar{B}_0 K_0(qr) \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} [(\bar{A}_m I_m(qr) + \bar{B}_m K_m(qr)) \cos m\theta \\ & + (\bar{C}_m I_m(qr) + \bar{D}_m K_m(qr)) \sin m\theta] \end{aligned}$$

ただし、 $q^2 = p/\kappa$ 、 $I_m$ 、 $K_m$  は変形ベッセル関数である。したがって式 (4) の一般解は

$$\begin{aligned} \tau^* = & \tau_c^* + \tau_p^* = \frac{\kappa Q}{\lambda p^2} + \bar{A}_0 I_0(qr) + \bar{B}_0 K_0(qr) \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} [(\bar{A}_m I_m(qr) + \bar{B}_m K_m(qr)) \cos m\theta \\ & + (\bar{C}_m I_m(qr) + \bar{D}_m K_m(qr)) \sin m\theta] \dots\dots (5) \end{aligned}$$

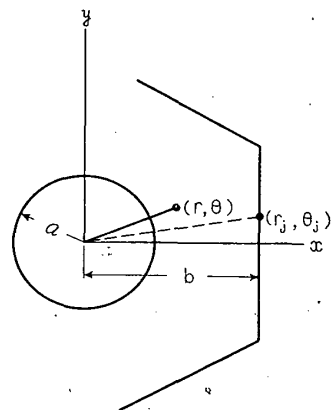


図 1 円孔をもつ正多角形領域

\* 昭和 48 年 6 月 9 日 関西支部第 230 回講演会において講演、原稿受付 昭和 48 年 7 月 17 日。

\*\* 正員、静岡大学工学部

\*\*\* 正員、大阪府立大学工学部(堺市百舌鳥梅町 4-804)。

いま考えている領域は正  $n$  角形領域であるから, 対称性を考慮すると式 (5) は

$$\tau^* = \frac{\kappa Q}{\lambda p^2} + \bar{A}_0 I_0(qr) + \bar{B}_0 K_0(qr) + \sum_{m=1}^{\infty} \{ \bar{A}_{nm} I_{nm}(qr) + \bar{B}_{nm} K_{nm}(qr) \} \cos nm\theta \dots (6)$$

式 (2) をラプラス変換すると

$$r=a, \quad x=b \quad \text{で} \quad \tau^*=0 \dots (7)$$

式 (6) を式 (7) の内側境界条件に代入すると

$$\bar{A}_0 = -\frac{\kappa Q}{\lambda p^2} \frac{1}{I_0(qa)} - \frac{K_0(qa)}{I_0(qa)} \bar{B}_0, \quad \bar{A}_{nm} = -\frac{K_{nm}(qa)}{I_{nm}(qa)} \bar{B}_{nm} \dots (8)$$

よって内側境界条件を満足する  $\tau^*$  として

$$\tau^* = \frac{\kappa Q}{\lambda p^2} \frac{I_0(qa) - I_0(qr)}{I_0(qa)} - \frac{\bar{B}_0}{I_0(qa)} \{ I_0(qr) K_0(qa) - K_0(qr) I_0(qa) \} \\ - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\bar{B}_{nm}}{I_{nm}(qa)} \{ I_{nm}(qr) K_{nm}(qa) - I_{nm}(qa) K_{nm}(qr) \} \cos nm\theta \dots (9)$$

式 (9) の未知定数  $\bar{B}_0, \bar{B}_{nm} (m=1, 2, \dots, \infty)$  は式 (7) の外側境界条件より決定される. しかし式 (9) は極座標表示であるので, 式 (7) の外側境界条件を正確に満足させることはできない. そこで式 (9) の  $\sum_{m=1}^{\infty}$  を  $\sum_{m=1}^s$  で近似し, 外側境界上  $r_j \cos \theta_j = b (j=0, 1, 2, \dots, s)$  を満足する  $s+1$  点で境界条件を満足させる辺点法を用いる. この結果各辺点における境界条件より  $s+1$  元連立一次方程式ができるから, その連立方程式を解くことにより  $(s+1)$  個の未知定数  $\bar{B}_0, \bar{B}_{nm} (m=1, 2, \dots, s)$  が決定され, 式 (9) に代入することにより像領域での温度分布  $\tau^*$  が次式で与えられる.

$$\tau^* = \frac{\kappa Q}{\lambda p^2 I_0(qa) \bar{D}} \left[ \bar{D} \{ I_0(qa) - I_0(qr) \} - \bar{D}_0 \{ I_0(qr) K_0(qa) - K_0(qr) I_0(qa) \} \right. \\ \left. - \sum_{m=1}^s \bar{D}_{nm} \{ I_{nm}(qr) K_{nm}(qa) - K_{nm}(qr) I_{nm}(qa) \} \cos nm\theta \right] \dots (10)$$

ただし

$$\bar{D} = |A_{ji}| \quad (j, i=1, 2, \dots, s+1) \dots (11)$$

$$A_{ji} = \{ I_{n(i-1)}(qr_{j-1}) K_{n(i-1)}(qa) - K_{n(i-1)}(qr_{j-1}) I_{n(i-1)}(qa) \} \cos n(i-1)\theta_{j-1} \dots (12)$$

$\bar{D}_{nm}$  は行列式  $\bar{D}$  の第  $(m+1)$  列めの要素を  $I_0(qa) - I_0(qr_{j-1})$  で置き換えることにより得られる行列式である.

式 (10) をラプラス逆変換することにより (付録参照), 求める温度分布は

$$\tau = \frac{Qa^2}{4\lambda} \left[ 1 - \frac{r^2}{a^2} - F_0 \ln \frac{r}{a} - \sum_{m=1}^{\infty} F_{nm} \left\{ \left( \frac{r}{a} \right)^{nm} - \left( \frac{r}{a} \right)^{-nm} \right\} \cos nm\theta \right. \\ \left. + 8 \sum_{m=0}^s \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{H_{\alpha m} g_{nm}(r, a, \mu_{\alpha})}{(a\mu_{\alpha})^3 J_0(a\mu_{\alpha})} \exp(-\kappa \mu_{\alpha}^2 t) \cos nm\theta \right] \dots (13)$$

ここで,  $\mu_{\alpha}$  は次式を満足する  $\mu$  の第  $\alpha$  番めの正根である.

$$\begin{vmatrix} g_0(r_0, a, \mu) \dots g_{nm}(r_0, a, \mu) \cos nm\theta_0 \dots g_{ns}(r_0, a, \mu) \cos ns\theta_0 \\ g_0(r_j, a, \mu) \dots g_{nm}(r_j, a, \mu) \cos nm\theta_j \dots g_{ns}(r_j, a, \mu) \cos ns\theta_j \\ g_0(r_s, a, \mu) \dots g_{nm}(r_s, a, \mu) \cos nm\theta_s \dots g_{ns}(r_s, a, \mu) \cos ns\theta_s \end{vmatrix} = 0 \dots (14)$$

ただし,

$$g_{nm}(r, a, \mu) = J_{nm}(r\mu) Y_{nm}(a\mu) - J_{nm}(a\mu) Y_{nm}(r\mu) \dots (15)$$

$J_{nm}, Y_{nm}$  はベッセル関数である. また  $F_0, F_{nm}, H_{\alpha m}$  は次式で与えられる.

$$F_0 = \frac{1}{F} \begin{vmatrix} 1 - \frac{r_0^2}{a^2} & \left\{ \left( \frac{r_0}{a} \right)^n - \left( \frac{a}{r_0} \right)^n \right\} \cos n\theta_0 & \dots & \left\{ \left( \frac{r_0}{a} \right)^{ns} - \left( \frac{a}{r_0} \right)^{ns} \right\} \cos ns\theta_0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 - \frac{r_j^2}{a^2} & \left\{ \left( \frac{r_j}{a} \right)^n - \left( \frac{a}{r_j} \right)^n \right\} \cos n\theta_j & \dots & \left\{ \left( \frac{r_j}{a} \right)^{ns} - \left( \frac{a}{r_j} \right)^{ns} \right\} \cos ns\theta_j \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 - \frac{r_s^2}{a^2} & \left\{ \left( \frac{r_s}{a} \right)^n - \left( \frac{a}{r_s} \right)^n \right\} \cos n\theta_s & \dots & \left\{ \left( \frac{r_s}{a} \right)^{ns} - \left( \frac{a}{r_s} \right)^{ns} \right\} \cos ns\theta_s \end{vmatrix}$$

ただし,

$$F = \begin{vmatrix} \ln \frac{r_0}{a} & \left\{ \left( \frac{r_0}{a} \right)^n - \left( \frac{a}{r_0} \right)^n \right\} \cos n\theta_0 \cdots \cdots \left\{ \left( \frac{r_0}{a} \right)^{ns} - \left( \frac{a}{r_0} \right)^{ns} \right\} \cos ns\theta_0 \\ \vdots & \vdots \\ \ln \frac{r_j}{a} & \left\{ \left( \frac{r_j}{a} \right)^n - \left( \frac{a}{r_j} \right)^n \right\} \cos n\theta_j \cdots \cdots \left\{ \left( \frac{r_j}{a} \right)^{ns} - \left( \frac{a}{r_j} \right)^{ns} \right\} \cos ns\theta_j \\ \vdots & \vdots \\ \ln \frac{r_s}{a} & \left\{ \left( \frac{r_s}{a} \right)^n - \left( \frac{a}{r_s} \right)^n \right\} \cos n\theta_s \cdots \cdots \left\{ \left( \frac{r_s}{a} \right)^{ns} - \left( \frac{a}{r_s} \right)^{ns} \right\} \cos ns\theta_s \end{vmatrix}$$

$$F_{nm} = \frac{1}{F} \begin{vmatrix} \ln \frac{r_0}{a} & \left\{ \left( \frac{r_0}{a} \right)^n - \left( \frac{a}{r_0} \right)^n \right\} \cos n\theta_0 \cdots \cdots \left\{ \left( \frac{r_0}{a} \right)^{n(m-1)} - \left( \frac{a}{r_0} \right)^{n(m-1)} \right\} \cos n(m-1)\theta_0 \\ \vdots & \vdots \\ \ln \frac{r_j}{a} & \left\{ \left( \frac{r_j}{a} \right)^n - \left( \frac{a}{r_j} \right)^n \right\} \cos n\theta_j \cdots \cdots \left\{ \left( \frac{r_j}{a} \right)^{n(m-1)} - \left( \frac{a}{r_j} \right)^{n(m-1)} \right\} \cos n(m-1)\theta_j \\ \vdots & \vdots \\ \ln \frac{r_s}{a} & \left\{ \left( \frac{r_s}{a} \right)^n - \left( \frac{a}{r_s} \right)^n \right\} \cos n\theta_s \cdots \cdots \left\{ \left( \frac{r_s}{a} \right)^{n(m-1)} - \left( \frac{a}{r_s} \right)^{n(m-1)} \right\} \cos n(m-1)\theta_s \\ 1 - \frac{r_0^2}{a^2} & \left\{ \left( \frac{r_0}{a} \right)^{n(m+1)} - \left( \frac{a}{r_0} \right)^{n(m+1)} \right\} \cos n(m+1)\theta_0 \cdots \cdots \left\{ \left( \frac{r_0}{a} \right)^{ns} - \left( \frac{a}{r_0} \right)^{ns} \right\} \cos ns\theta_0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 - \frac{r_j^2}{a^2} & \left\{ \left( \frac{r_j}{a} \right)^{n(m+1)} - \left( \frac{a}{r_j} \right)^{n(m+1)} \right\} \cos n(m+1)\theta_j \cdots \cdots \left\{ \left( \frac{r_j}{a} \right)^{ns} - \left( \frac{a}{r_j} \right)^{ns} \right\} \cos ns\theta_j \\ \vdots & \vdots \\ 1 - \frac{r_s^2}{a^2} & \left\{ \left( \frac{r_s}{a} \right)^{n(m+1)} - \left( \frac{a}{r_s} \right)^{n(m+1)} \right\} \cos n(m+1)\theta_s \cdots \cdots \left\{ \left( \frac{r_s}{a} \right)^{ns} - \left( \frac{a}{r_s} \right)^{ns} \right\} \cos ns\theta_s \end{vmatrix} \cdots \cdots (16)$$

$$H_{am} = \frac{1}{H} \begin{vmatrix} g_0(r_0, a, \mu_\alpha) & g_n(r_0, a, \mu_\alpha) \cos n\theta_0 \cdots \cdots g_{n(m-1)}(r_0, a, \mu_\alpha) \cos n(m-1)\theta_0 \\ \vdots & \vdots \\ g_0(r_j, a, \mu_\alpha) & g_n(r_j, a, \mu_\alpha) \cos n\theta_j \cdots \cdots g_{n(m-1)}(r_j, a, \mu_\alpha) \cos n(m-1)\theta_j \\ \vdots & \vdots \\ g_0(r_s, a, \mu_\alpha) & g_n(r_s, a, \mu_\alpha) \cos n\theta_s \cdots \cdots g_{n(m-1)}(r_s, a, \mu_\alpha) \cos n(m-1)\theta_s \\ J_0(a\mu_\alpha) - J_0(r_0\mu_\alpha) & g_{n(m+1)}(r_0, a, \mu_\alpha) \cos n(m+1)\theta_0 \cdots \cdots g_{ns}(r_0, a, \mu_\alpha) \cos ns\theta_0 \\ \vdots & \vdots \\ J_0(a\mu_\alpha) - J_0(r_j\mu_\alpha) & g_{n(m+1)}(r_j, a, \mu_\alpha) \cos n(m+1)\theta_j \cdots \cdots g_{ns}(r_j, a, \mu_\alpha) \cos ns\theta_j \\ \vdots & \vdots \\ J_0(a\mu_\alpha) - J_0(r_s\mu_\alpha) & g_{n(m+1)}(r_s, a, \mu_\alpha) \cos n(m+1)\theta_s \cdots \cdots g_{ns}(r_s, a, \mu_\alpha) \cos ns\theta_s \end{vmatrix} \cdots \cdots (17)$$

ただし,

$$H = \begin{vmatrix} E_0(r_0, a, \mu_\alpha) & g_n(r_0, a, \mu_\alpha) \cos n\theta_0 \cdots \cdots g_{ns}(r_0, a, \mu_\alpha) \cos ns\theta_0 \\ \vdots & \vdots \\ E_0(r_j, a, \mu_\alpha) & g_n(r_j, a, \mu_\alpha) \cos n\theta_j \cdots \cdots g_{ns}(r_j, a, \mu_\alpha) \cos ns\theta_j \\ \vdots & \vdots \\ E_0(r_s, a, \mu_\alpha) & g_n(r_s, a, \mu_\alpha) \cos n\theta_s \cdots \cdots g_{ns}(r_s, a, \mu_\alpha) \cos ns\theta_s \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$\begin{vmatrix} g_0(r_0, a, \mu_\alpha) & g_n(r_0, a, \mu_\alpha) \cos n\theta_0 \cdots \cdots g_{n(m-1)}(r_0, a, \mu_\alpha) \cos n(m-1)\theta_0 \\ \vdots & \vdots \\ g_0(r_j, a, \mu_\alpha) & g_n(r_j, a, \mu_\alpha) \cos n\theta_j \cdots \cdots g_{n(m-1)}(r_j, a, \mu_\alpha) \cos n(m-1)\theta_j \\ \vdots & \vdots \\ g_0(r_s, a, \mu_\alpha) & g_n(r_s, a, \mu_\alpha) \cos n\theta_s \cdots \cdots g_{n(m-1)}(r_s, a, \mu_\alpha) \cos n(m-1)\theta_s \\ E_{nm}(r_0, a, \mu_\alpha) \cos nm\theta_0 & g_{n(m+1)}(r_0, a, \mu_\alpha) \cos n(m+1)\theta_0 \cdots \cdots g_{ns}(r_0, a, \mu_\alpha) \cos ns\theta_0 \\ \vdots & \vdots \\ E_{nm}(r_j, a, \mu_\alpha) \cos nm\theta_j & g_{n(m+1)}(r_j, a, \mu_\alpha) \cos n(m+1)\theta_j \cdots \cdots g_{ns}(r_j, a, \mu_\alpha) \cos ns\theta_j \\ \vdots & \vdots \\ E_{nm}(r_s, a, \mu_\alpha) \cos nm\theta_s & g_{n(m+1)}(r_s, a, \mu_\alpha) \cos n(m+1)\theta_s \cdots \cdots g_{ns}(r_s, a, \mu_\alpha) \cos ns\theta_s \end{vmatrix}$$

$$+ \cdots + \begin{vmatrix} g_0(r_0, a, \mu_\alpha) \cdots \cdots g_{n(s-1)}(r_0, a, \mu_\alpha) \cos n(s-1)\theta_0 & E_{ns}(r_0, a, \mu_\alpha) \cos ns\theta_0 \\ \vdots & \vdots \\ g_0(r_j, a, \mu_\alpha) \cdots \cdots g_{n(s-1)}(r_j, a, \mu_\alpha) \cos n(s-1)\theta_j & E_{ns}(r_j, a, \mu_\alpha) \cos ns\theta_j \\ \vdots & \vdots \\ g_0(r_s, a, \mu_\alpha) \cdots \cdots g_{n(s-1)}(r_s, a, \mu_\alpha) \cos n(s-1)\theta_s & E_{ns}(r_s, a, \mu_\alpha) \cos ns\theta_s \end{vmatrix}$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned} E_0(r, a, \mu) &= \frac{r}{a} \{J_0(a\mu\alpha)Y_1(r\mu) - J_1(r\mu)Y_0(a\mu)\} - \{J_0(r\mu)Y_1(a\mu) - J_1(a\mu)Y_0(r\mu)\} \\ E_{nm}(r, a, \mu) &= \frac{r}{a} \{J_{nm-1}(r\mu)Y_{nm}(a\mu) - Y_{nm-1}(r\mu)J_{nm}(a\mu)\} - \{J_{nm-1}(a\mu)Y_{nm}(r\mu) \\ &\quad - J_{nm}(r\mu)Y_{nm-1}(a\mu)\} - \frac{2nm}{a\mu} \{J_{nm}(r\mu)Y_{nm}(a\mu) - J_{nm}(a\mu)Y_{nm}(r\mu)\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

2.2 非定常熱応力 二次元熱応力問題の基礎方程式は

$$\Delta\Delta\chi = -k\Delta\tau \dots\dots\dots (19)$$

ただし,  $\chi$  は熱応力関数, 平面熱応力問題に対し  $k = \alpha_t E$ , 平面熱ひずみ問題に対し  $k = \alpha_t E / (1 - \nu)$ ,  $\alpha_t$  は線膨張係数,  $E$  は縦弾性係数,  $\nu$  はポアソン比.

外力の作用の無い場合の境界条件は

$$r = a \text{ で } \chi = C_1'x + C_2'y + C_3', \quad \frac{\partial\chi}{\partial r} = C_1' \cos\theta + C_2' \sin\theta, \quad x = b \text{ で } \chi = \frac{\partial\chi}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots (20)$$

ただし,  $C_1', C_2', C_3'$  は未知積分定数である. 回転, 変位が一価であるための Michell の条件は

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} r \frac{\partial}{\partial r} (\Delta\chi + k\tau) d\theta &= 0, \quad \int_0^{2\pi} r \left( r \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} - \cos\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) (\Delta\chi + k\tau) d\theta = 0 \\ \int_0^{2\pi} r \left( r \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) (\Delta\chi + k\tau) d\theta &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

式 (19) の  $\chi$  を求めるとき

$$\chi = \chi_c + \chi_p \dots\dots\dots (22)$$

とおく. ここで  $\chi_c$  は

$$\Delta\Delta\chi_c = 0 \dots\dots\dots (23)$$

を満足し,  $\chi_p$  は

$$\Delta\chi_p = -k\tau \dots\dots\dots (24)$$

を満足する特解である.

式 (24) を満足する特解  $\chi_p$  は式 (13) を考慮すれば

$$\chi_p = \frac{kQa^4}{\lambda} \left\{ \frac{1}{64} \left( \frac{r}{a} \right)^4 + \sum_{n=0}^s \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{2 \exp(-\kappa\mu\alpha^2 t)}{(\alpha\mu\alpha)^5 J_0(\alpha\mu\alpha)} H_{\alpha m} g_{nm}(r, a, \mu\alpha) \cos nm\theta \right\} \dots\dots\dots (25)$$

式 (23) の一般解は

$$\begin{aligned} \chi_c &= A_0 + B_0 \ln r + C_0 r^2 + D_0 r^2 \ln r + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m r^m + B_m r^{-m} + C_m r^{m+2} + D_m r^{-m+2}) \cos m\theta \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} (E_m r^m + G_m r^{-m} + L_m r^{m+2} + N_m r^{-m+2}) \sin m\theta \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

領域の対称性を考慮すれば式 (26) は

$$\chi_c = A_0 + B_0 \ln r + C_0 r^2 + D_0 r^2 \ln r + \sum_{m=1}^{\infty} (A_{nm} r^{nm} + B_{nm} r^{-nm} + C_{nm} r^{nm+2} + D_{nm} r^{-nm+2}) \cos nm\theta \dots\dots (27)$$

式 (25), (27) を式 (22) に代入することにより熱応力関数  $\chi$  は

$$\begin{aligned} \chi &= A_0 + B_0 \ln r + C_0 r^2 + D_0 r^2 \ln r + \sum_{m=1}^{\infty} (A_{nm} r^{nm} + B_{nm} r^{-nm} + C_{nm} r^{nm+2} + D_{nm} r^{-nm+2}) \cos nm\theta \\ &\quad + \frac{kQa^4}{\lambda} \left\{ \frac{1}{64} \left( \frac{r}{a} \right)^4 + \sum_{n=0}^s \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{2 \exp(-\kappa\mu\alpha^2 t)}{(\alpha\mu\alpha)^5 J_0(\alpha\mu\alpha)} H_{\alpha m} g_{nm}(r, a, \mu\alpha) \cos nm\theta \right\} \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

式 (13), (28) を Michell の条件式 (21) に代入すると

$$D_0 = \frac{kQa^2}{16\lambda} F_0 \dots\dots\dots (29)$$

式 (28) を内側境界条件式 (20) に代入することにより

$$\left. \begin{aligned}
 A_0 &= \left(\frac{1}{2} - \ln a\right) B_0 + \frac{a^2}{2} D_0 + C_3' + \frac{kQa^4}{\lambda} \left\{ \frac{1}{64} - \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{2H_{\alpha 0} \exp(-\kappa \mu_{\alpha}^2 t)}{\pi (a \mu_{\alpha})^5 J_0(a \mu_{\alpha})} \right\} \\
 C_0 &= -\frac{a^{-2}}{2} B_0 - \frac{1}{2} (2 \ln a + 1) D_0 - \frac{kQa^4}{\lambda} \left\{ \frac{a^{-2}}{32} - \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{2H_{\alpha 0} \exp(-\kappa \mu_{\alpha}^2 t)}{\pi (a \mu_{\alpha})^5 J_0(a \mu_{\alpha})} \right\} \\
 A_{nm} &= -\frac{nm+1}{nm} C_{nm} a^2 - \frac{a^{-2(nm-1)}}{nm} D_{nm} + \frac{kQa^4}{\lambda} \frac{a^{-nm}}{nm} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{2H_{\alpha m} \exp(-\kappa \mu_{\alpha}^2 t)}{\pi (a \mu_{\alpha})^5 J_0(a \mu_{\alpha})} \\
 B_{nm} &= \frac{a^{2(nm+1)}}{nm} C_{nm} - \frac{nm-1}{nm} D_{nm} a^2 - \frac{kQa^4}{\lambda} \frac{a^{nm}}{nm} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{2H_{\alpha m} \exp(-\kappa \mu_{\alpha}^2 t)}{\pi (a \mu_{\alpha})^5 J_0(a \mu_{\alpha})}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

よって内側境界条件を満足する熱応力関数  $\chi$  は

$$\begin{aligned}
 \chi &= \frac{kQa^4}{\lambda} \left[ \frac{1}{64} \left\{ \left(\frac{r}{a}\right)^4 + 1 - 2\frac{r^2}{a^2} \right\} + \frac{F_0}{16} \left\{ \left(\frac{r}{a}\right)^2 \ln \frac{r}{a} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \right\} \right] + C_3' \\
 &+ \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) + \ln \frac{r}{a} \right\} B_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \left\{ -\frac{nm+1}{nm} \left(\frac{r}{a}\right)^{nm} + \frac{1}{nm} \left(\frac{r}{a}\right)^{-nm} + \left(\frac{r}{a}\right)^{nm+2} \right\} a^{nm+2} \right. \\
 &\times C_{nm} - \left. \left\{ \frac{1}{nm} \left(\frac{r}{a}\right)^{nm} + \frac{nm-1}{nm} \left(\frac{r}{a}\right)^{-nm} - \left(\frac{r}{a}\right)^{-nm+2} \right\} a^{-nm+2} D_{nm} \right] \cos nm\theta \\
 &+ \frac{kQa^4}{\lambda} \left[ \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{2 \exp(-\kappa \mu_{\alpha}^2 t)}{(a \mu_{\alpha})^5 J_0(a \mu_{\alpha})} \left\{ H_{\alpha 0} \left[ \frac{1}{\pi} \left(\frac{r^2}{a^2} - 1\right) + J_0(r \mu_{\alpha}) Y_0(a \mu_{\alpha}) - J_0(a \mu_{\alpha}) Y_0(r \mu_{\alpha}) \right] \right. \right. \\
 &\left. \left. + \sum_{m=1}^s \left[ \frac{1}{\pi nm} \left\{ \left(\frac{r}{a}\right)^{nm} - \left(\frac{r}{a}\right)^{-nm} \right\} + J_{nm}(r \mu_{\alpha}) Y_{nm}(a \mu_{\alpha}) - Y_{nm}(r \mu_{\alpha}) J_{nm}(a \mu_{\alpha}) \right] H_{\alpha m} \cos nm\theta \right] \right] \dots\dots\dots (31)
 \end{aligned}$$

式 (31) の未知定数  $C_3'$ ,  $B_0$ ,  $C_{nm}$ ,  $D_{nm}$  ( $m=1, 2, \dots, \infty$ ) は式 (20) の外側境界条件より決定する. ところが式 (31) は極座標表示であるので式 (20) の外側境界条件を正確に満足させることはできない. そこで温度分布の決定と同様に辺点法を用いる. そこで式 (31) の  $\sum_{m=1}^{\infty}$  を  $\sum_{m=1}^M$  で近似し, 外側境界上  $r_j \cos \theta_j = b$  ( $j=0, 1, 2, \dots, s'$ ) を満足する  $s'+1$  点 ( $s' \geq M$ ) で境界条件を満足させ, 最小二乗法により  $2(M+1)$  個の未知定数  $C_3'$ ,  $B_0$ ,  $C_{nm}$ ,  $D_{nm}$  ( $m=1, 2, \dots, M$ ) を決定する. このようにして決定された未知定数を式 (31) に代入することにより, 熱応力関数  $\chi$  は決定される. よって各熱応力成分は  $\chi$  を用いて

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2}, \quad \sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right) \dots\dots\dots (32)$$

で与えられる. 決定された定数  $B_0$ ,  $C_{nm}$ ,  $D_{nm}$  ( $m=1, 2, \dots, M$ ) を用いて各熱応力成分を表示すると次式を得る.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\theta\theta} &= \frac{kQa^2}{16\lambda} \left\{ \left(3\frac{r^2}{a^2} - 1\right) + 2\left(\ln \frac{r}{a} + 1\right) F_0 \right\} - \left(\frac{a^2}{r^2} + 1\right) a^{-2} B_0 + \sum_{m=1}^M \left[ (nm+1) \left\{ -\frac{1}{2} (nm-1) \left(\frac{r}{a}\right)^{nm-2} \right. \right. \\
 &+ \left. \left(\frac{r}{a}\right)^{-nm-2} + (nm+2) \left(\frac{r}{a}\right)^{nm} \right\} a^{nm} C_{nm} - (nm-1) \left\{ \left(\frac{r}{a}\right)^{nm-2} + (nm+1) \left(\frac{r}{a}\right)^{-nm-2} \right. \\
 &- \left. (nm-2) \left(\frac{r}{a}\right)^{-nm} \right\} a^{-nm} D_{nm} \left. \right] \cos nm\theta + \frac{kQa^2}{\lambda} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{2 \exp(-\kappa \mu_{\alpha}^2 t)}{(a \mu_{\alpha})^5 J_0(a \mu_{\alpha})} \left\{ H_{\alpha 0} \left[ \frac{2}{\pi} \right. \right. \\
 &+ \left. (a \mu_{\alpha})^2 \{ J_0(a \mu_{\alpha}) Y_0(r \mu_{\alpha}) - J_0(r \mu_{\alpha}) Y_0(a \mu_{\alpha}) \} - \frac{a^2 \mu_{\alpha}}{r} \{ J_0(a \mu_{\alpha}) Y_1(r \mu_{\alpha}) - J_1(r \mu_{\alpha}) Y_0(a \mu_{\alpha}) \} \right] \\
 &+ \sum_{m=1}^s H_{\alpha m} \left[ \frac{1}{\pi} \left\{ (nm-1) \left(\frac{r}{a}\right)^{nm-2} - (nm+1) \left(\frac{r}{a}\right)^{-nm-2} \right\} + \left\{ nm(nm+1) \frac{a^2}{r^2} - (a \mu_{\alpha})^2 \right\} \right. \\
 &\times \left. \left\{ J_{nm}(r \mu_{\alpha}) Y_{nm}(a \mu_{\alpha}) - Y_{nm}(r \mu_{\alpha}) J_{nm}(a \mu_{\alpha}) \right\} - \frac{a^2 \mu_{\alpha}}{r} \{ J_{nm-1}(r \mu_{\alpha}) Y_{nm}(a \mu_{\alpha}) \right. \\
 &- \left. \left. Y_{nm-1}(r \mu_{\alpha}) J_{nm}(a \mu_{\alpha}) \right\} \right] \cos nm\theta \left. \right] \dots\dots\dots (33)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= \frac{kQa^2}{16\lambda} \left\{ \frac{r^2}{a^2} - 1 + 2F_0 \ln \frac{r}{a} \right\} + \left(\frac{a^2}{r^2} - 1\right) a^{-2} B_0 + \sum_{m=1}^M \left[ -(nm+1) \left\{ -\frac{1}{2} (nm-1) \left(\frac{r}{a}\right)^{nm-2} \right. \right. \\
 &+ \left. \left(\frac{r}{a}\right)^{-nm-2} + (nm-2) \left(\frac{r}{a}\right)^{nm} \right\} a^{nm} C_{nm} + (nm-1) \left\{ \left(\frac{r}{a}\right)^{nm-2} + (nm+1) \left(\frac{r}{a}\right)^{-nm-2} \right. \\
 &- \left. (nm+2) \left(\frac{r}{a}\right)^{-nm} \right\} a^{-nm} D_{nm} \left. \right] \cos nm\theta + \frac{kQa^2}{\lambda} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{2 \exp(-\kappa \mu_{\alpha}^2 t)}{(a \mu_{\alpha})^5 J_0(a \mu_{\alpha})} \left\{ H_{\alpha 0} \left[ \frac{2}{\pi} \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{a^2 \mu \alpha}{r} \{J_0(a\mu\alpha)Y_1(r\mu\alpha) - J_1(r\mu\alpha)Y_0(a\mu\alpha)\} + \sum_{m=1}^s H_{\alpha m} \left[ -\frac{1}{\pi} \left\{ (nm-1) \left(\frac{r}{a}\right)^{nm-2} \right. \right. \\
 & \left. \left. - (nm+1) \left(\frac{r}{a}\right)^{nm-2} \right\} + \frac{a^2 \mu \alpha}{r} \{J_{nm-1}(r\mu\alpha)Y_{nm}(a\mu\alpha) - Y_{nm-1}(r\mu\alpha)J_{nm}(a\mu\alpha)\} \right. \\
 & \left. - nm(nm+1) \frac{a^2}{r^2} \{J_{nm}(r\mu\alpha)Y_{nm}(a\mu\alpha) - J_{nm}(a\mu\alpha)Y_{nm}(r\mu\alpha)\} \right] \cos nm\theta \dots\dots\dots (34)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{r\theta} = & - \sum_{m=1}^M \left[ (nm+1) \left\{ (nm-1) \left(\frac{r}{a}\right)^{nm-2} + \left(\frac{r}{a}\right)^{-nm-2} - nm \left(\frac{r}{a}\right)^{nm} \right\} a^{nm} C_{nm} + (nm-1) \left\{ \left(\frac{r}{a}\right)^{nm-2} \right. \right. \\
 & \left. \left. - (nm+1) \left(\frac{r}{a}\right)^{-nm-2} + nm \left(\frac{r}{a}\right)^{-nm} \right\} a^{-nm} D_{nm} \right] \sin nm\theta + \frac{kQa^2}{\lambda} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \sum_{m=1}^s \frac{2nmH_{\alpha m} \exp(-\kappa\mu\alpha^2 t)}{(a\mu\alpha)^5 J_0(a\mu\alpha)} \\
 & \times \left[ \frac{1}{nm\pi} \left\{ (nm-1) \left(\frac{r}{a}\right)^{nm-2} + (nm+1) \left(\frac{r}{a}\right)^{-nm-2} \right\} + \frac{a^2 \mu \alpha}{r} \{J_{nm-1}(r\mu\alpha)Y_{nm}(a\mu\alpha) \right. \\
 & \left. - Y_{nm-1}(r\mu\alpha)J_{nm}(a\mu\alpha)\} - (nm+1) \frac{a^2}{r^2} \{J_{nm}(r\mu\alpha)Y_{nm}(a\mu\alpha) - J_{nm}(a\mu\alpha)Y_{nm}(r\mu\alpha)\} \right] \sin nm\theta \\
 & \dots\dots\dots (35)
 \end{aligned}$$

3. 数値計算結果と考察

数値計算を実行する場合、無次元量

$$T = \frac{\lambda\tau}{Qa^2}, \quad \widehat{\theta\theta} = \frac{\lambda\sigma_{\theta\theta}}{kQa^2}, \quad \widehat{\rho\rho} = \frac{\lambda\sigma_{rr}}{kQa^2}, \quad \widehat{\rho\theta} = \frac{\lambda\sigma_{r\theta}}{kQa^2}, \quad \rho = \frac{r}{a}, \quad \rho_0 = \frac{b}{a}, \quad t_d = \frac{\kappa t}{a^2} \dots\dots\dots (36)$$

に対しておこなった。数値計算例として正方形領域 (n=4) について、ρ<sub>0</sub>=2 の場合に対し各種の無次元化時間 (t<sub>d</sub>) について実行した。この場合の θ=π/4 の穴周辺のフープ応力は

$$\begin{aligned}
 (\widehat{\theta\theta})_{\rho_0=2, \theta=\pi/4, \rho=1} = & \frac{1}{8} (1+F_0) + \frac{2\lambda}{\kappa Q a^2} \left[ -a^{-2} B_0 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \{(4m+1) a^{4m} C_{4m} \right. \\
 & \left. - (4m-1) a^{-4m} D_{4m} \right] + \frac{8}{\pi} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{H_{\alpha 0} \exp\{- (a\mu\alpha)^2 t_d\}}{(a\mu\alpha)^5 J_0(a\mu\alpha)} \dots\dots\dots (37)
 \end{aligned}$$

図2は無次元時間 t<sub>d</sub>=0.1 の温度分布を示し、図3は t<sub>d</sub>=∞ すなわち定常温度分布を示す。t<sub>d</sub>=0.1 において最大温度は θ=π/4, ρ=1.7 において 0.093 となり、定常状態においては θ=π/4, ρ=1.7 において 0.218 となる。この値はわれわれが先に定常熱伝導に対して求めた結果<sup>(4)</sup>と一致する。次に図4~6は t<sub>d</sub>=0.05, t<sub>d</sub>=0.1, t<sub>d</sub>=∞ に対するフープ応力を示す。図7は θ=0° 上のフープ応力とラジアル応力を各時間に対し図示した。図8は θ=π/4 上のフープ応力とラジアル応力を図示した。図より最大応力は θ=π/4, ρ=1 上のフープ応力であり、t<sub>d</sub>=0.05 では

0.041, t<sub>d</sub>=0.1 では 0.073, t<sub>d</sub>=∞ すなわち定常熱応力は 0.17 となる。この結果<sup>(4)</sup>も一致する\*。傾向としては、両境界を 0° に保っているため、内部熱発生の結果、内部温度が上昇し、境界温度が低いため、内部で圧縮応力、境界で引張応力が発生している。

なお、本解析は計算の簡単な温度条件、境界条件を選んだが、一般の場合に対しても、そのまま適用できることはいうまでもない。

最後に数値計算には名古屋大学、京都大学大型計算

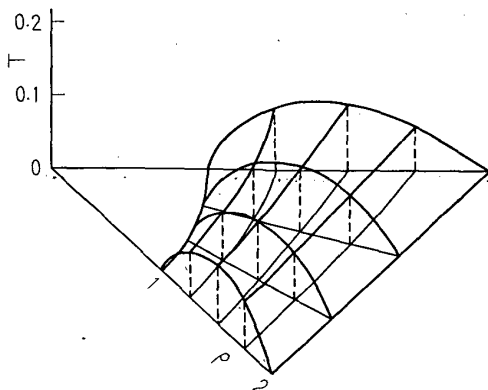


図2 正方形領域の温度分布 (t<sub>d</sub>=0.1)

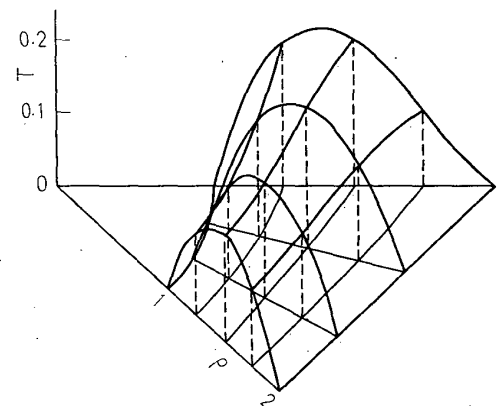


図3 正方形領域の温度分布 (t<sub>d</sub>=∞)

\* 文献(1)では内接円の半径を基準にしているため応力、温度は今回の0.25倍になっている。

機センターを利用した。

付 録

$$\tau^* = \frac{\kappa Q}{\lambda p^2 I_0(qa) \bar{D}} \left[ \bar{D} \{ I_0(qa) - I_0(qr) \} - \bar{D}_0 \{ I_0(qr) K_0(qa) - K_0(qr) I_0(qa) \} - \sum_{m=1}^s \bar{D}_{nm} \{ I_{nm}(qr) K_{nm}(qa) - K_{nm}(qr) I_{nm}(qa) \} \cos nm\theta \right] \dots \dots \dots (10)$$

のラプラス逆変換について考える。式 (10) において  $q^2 = p/\kappa$  で

$$D = |A_{ji}| \quad (j, i = 1, 2, \dots, s+1) \dots \dots \dots (11)$$

$$A_{ji} = \{ I_{n(i-1)}(qr_{j-1}) K_{n(i-1)}(qa) - K_{n(i-1)}(qr_{j-1}) I_{n(i-1)}(qa) \} \cos n(i-1)\theta_{j-1} \dots \dots \dots (12)$$

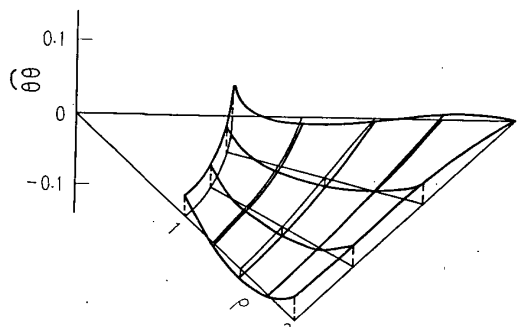


図 4 正方形領域の熱応力  $\hat{\theta}\hat{\theta}$  の分布 ( $t_d=0.05$ )

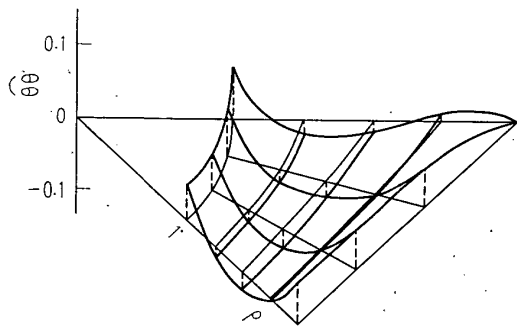


図 5 正方形領域の熱応力  $\hat{\theta}\hat{\theta}$  の分布 ( $t_d=0.1$ )

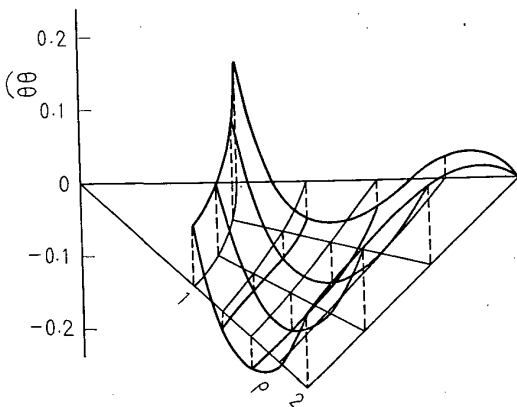


図 6 正方形領域の熱応力  $\hat{\theta}\hat{\theta}$  の分布 ( $t_d=\infty$ )

$\bar{D}_{nm}$  は行列式  $\bar{D}$  の第  $(m+1)$  列めの要素を  $I_0(qa) - I_0(qr_{j-1})$  で置き換えることにより得られる行列式である。

$\tau^*$  のラプラス逆変換はジョルダンの補助定理の適用により図 9 に示す反転積分路に沿っての積分に帰着される。結局反転積分路内での留数計算になる。式 (10) を調べると、 $p=0$ ,  $I_0(qa)=0$  を満足する  $p$  の値、 $\bar{D}=0$  を満足する  $p$  の値において特異点を持つ。この特異点は  $p=0$  で一位の極、 $I_0(qa)=0$  を満足する  $p$  の値は除去可能な特異点、 $\bar{D}=0$  を満足する  $p$

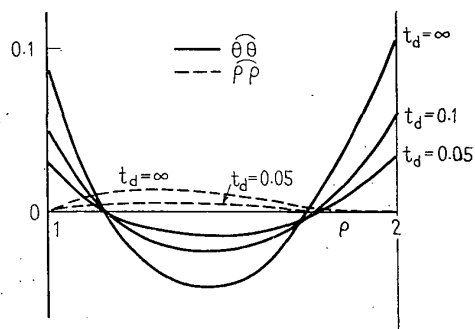


図 7  $\theta=0^\circ$  軸上の熱応力  $\hat{\theta}\hat{\theta}$ ,  $\hat{\rho}\hat{\rho}$  の分布

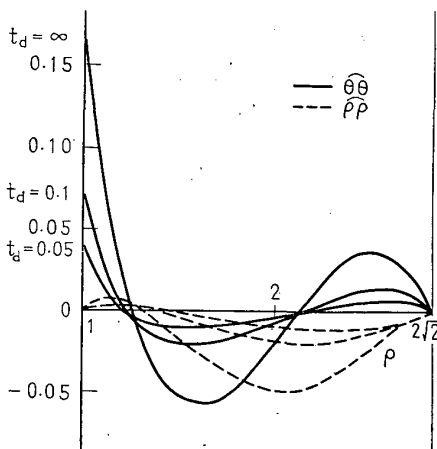


図 8  $\theta=45^\circ$  軸上の熱応力  $\hat{\theta}\hat{\theta}$ ,  $\hat{\rho}\hat{\rho}$  の分布

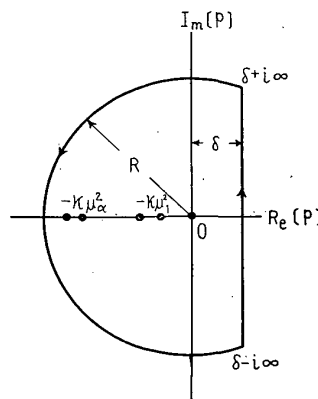


図 9 反転積分路 ( $R \rightarrow \infty$ )

は一位の極であることがわかる。よって  $p=0$  における留数は

$$\frac{Qa^2}{4\lambda} \left[ 1 - \frac{r^2}{a^2} - F_0 \ln \frac{r}{a} - \sum_{m=1}^{\infty} F_{nm} \left\{ \left( \frac{r}{a} \right)^{nm} - \left( \frac{r}{a} \right)^{-nm} \right\} \cos nm\theta \right] \dots (38)$$

ここで,  $F_0, F_{nm}$  は式 (16) で与えられる。

$\bar{D}=0$  を満足する  $p_\alpha = -\kappa\mu_\alpha^2$ , ( $\alpha=1, 2, \dots, \infty$ ) での留数は

$$\frac{2Qa^2}{\lambda} \sum_{m=0}^s \frac{H_{am}g_{nm}(r, a, \mu_\alpha)}{(a\mu_\alpha)^3 J_0(a\mu_\alpha)} \exp(-\kappa\mu_\alpha^2 t) \cos nm\theta \dots (39)$$

ここで,  $g_{nm}(r, a, \mu_\alpha)$  は式 (15),  $H_{am}$  は式 (17) で与えられる。また  $p = -\kappa\mu^2$  を式 (11) に代入すると  $\mu$  は式 (14) を満足しなければならない。よって式 (38), (39) より求める温度  $\tau$  は式 (13) で与えられる。

## 文 献

- (1) 竹内・ほか2名, 機論, 34-259 (昭 43-3), 403.
- (2) 竹内・ほか2名, 機論, 34-264 (昭 43-8), 1401.
- (3) Takeuti, Y. und Sekiya, T., Z. AMM, 48-4 (1968), 237.
- (4) Takeuti, Y. and Sumi, N., Int. J. Engng. Sci., 6-5 (1968), 539.

## 討 論

〔質問〕 宮尾嘉寿 (富山大学工学部)

(1) 熱応力問題において最大温度および最大熱応力が定常状態で生ずることはよく理解できるところである。このことより非定常問題は解析の学問的意義は認めるとして, 工学的および工業的にいかなる意義があるかについてご教示願いたい。

(2) 数値計算結果によれば両境界の温度が零のとき内側境界でフープ応力が最大値になっているが, これを軽減するためにはいかなる処置 (たとえばいづれかの境界の温度を上げるなど) をとればよいか。

(3) 非定常熱応力問題の数値例においては発生する最大温度と最大熱応力値が時間に対していかに変化するかを明らかにすることが工学上有益と思うが, いかがか。

〔回答〕 (1) 熱応力問題で本題のような温度境界条件を与えると, 最大応力が定常状態で生じるが, 一般的には非定常問題のほうが大きい熱応力を発生すると考えられる。したがって過渡的な問題のほうが工学的にも工業的にも意義が多いと思う。本問の場合は原子炉の始動時に対する応用が考えられる。

(2) 内部熱発生がある熱応力問題では, 両境界の温度を規定すると, 解が発熱量に関する項と, 境界温度に帰因する項に分離されてしまう。本問の場合, 結局熱発生だけで, 温度差の無い場合であるから, 内側境界の応力集中を緩和するためには, 内側の境界温度を0より大きいものを与えてやると, その結果のみの熱応力は内側圧縮, 外側引張りであるから内側に対しては緩和となるが, 外側に対しては引張りをさらに増加させることになる。また上述のように熱量に関する項と温度差に関する項に分離されることより, 両方の

絶対値の与え方により, どのようにも調整できることである。すなわち二つのグラフの重ね合わせにすぎないから, 一つの例について書いても意味がない。以上の見地より実際にそう遇した問題に対して, 応力を緩和するためには, 外側なり, 内側なりどちらかに温度差を与えればよいことになる。

(3) 貴説のとおり最大熱応力と時間の関係を示すことは有意義であるが, 通常熱応力の報告では時間をパラメータとして応力-位置の分布図が多いようである。

〔質問〕 福井 毅 (大阪産業大学工学部)

(1) 式 (29) は Michell の第何番めの式から導かれるのか。このような環状で定常熱流状態の場合には変位が一価になると, 回転が自動的に一価になる場合が多いようだが (根拠はないが, 質問者らの扱った問題では必要がなかった), 非定常熱流状態では回転一価の条件から定数を定めるべき条件式が導かれることが多いのか。

(2)  $\theta$  は  $x$  軸となす角か。

(3)  $x$  軸は  $n$  角形の辺の中央をいつも通るものと考えれば良いのか。

〔回答〕 (1) 変位の一価と回転の一価は独立的な条件である。本問題を例にとると, 式 (26) の応力関数の解で,  $\cos \theta, \sin \theta$  に関する項が変位一価に対応し,  $\theta$  に無関係な項が回転一価に対応している。ところで本問題の温度条件について, 対称性より  $\sin \theta$  の項がなく, また正多角形の頂角に対する軸についての対称性の取扱いより,  $\cos \theta$  の項がなくなり結局変位一価が自動的に満足されてしまう。したがって式 (29) は式 (21) の第1式の回転一価の条件だけより,



導かれたものになる。  $2\theta$  以上の項は自動的に満足されるから関係ない。定常熱流のときはしたがって、たとえば一般に得られる解が(付1)

$$T = k\tau(\rho - \rho^{-1}) \cos(\theta - \beta)$$

(ただし、 $\tau$  は温度こう配) のときは変位一価の条件に関係する項しか存在しないわけだから、当然回転一価の条件は満足されてしまうので、回転に対する吟味は不要である。

(2)  $\theta$  は  $x$  軸となす角である。

(3)  $x$  軸を  $n$  角形の辺の中央をいつも通るようにすれば、解が常に  $\sin$  に関する項を省略できて、取扱いが簡単化されるからである。ただし、不等辺多角形ではあまり意味がない。不等辺多角形では、温度分布に  $\cos \theta$ ,  $\sin \theta$  が出て、質問 (1) の変位一価が自動的に満足されることもなくなる。

(付 1) 竹内・野田, 機論, 39-259 (昭 43-3), 411.