

日本機械学会論文集(A編)
50巻453号(昭59-5)

円柱座標系における三次元連成熱応力問題 の定式化とその適用例*

谷川 義信**, 竹内 洋一郎***, 野田 直剛****
Yoshinobu TANIGAWA, Yoitiro TAKEUTI, Naotake NODA

Key Words: Elasticity, Thermal Stress, Three-Dimensional Problem, Coupling Effect, Hollow Circular Cylinder

1. 緒 言

筆者らは、弾性体における熱応力問題の厳密な解析に対する一つの試みとして、連成項(弾性体の変形に消散される熱エネルギーの項)に注目し、二、三の連成熱応力問題の解析結果について、すでに報告した。円柱座標系に関する報告例としては、非軸対称加熱を受ける円柱および円筒の平面問題⁽¹⁾⁽²⁾、軸対称加熱のもとでの円柱の軸対称問題⁽³⁾および任意の局部加熱を受ける場合に対する円柱の三次元問題⁽⁴⁾などがあげられる。上述の各問題に対し、筆者らが適用してきた解析の手法は、変位成分で記述されたつりあい方程式と、連成項を含んだ熱伝導方程式との連立により、変位成分を定式化するという方法である。それゆえ、熱応力解析において最も重要な熱応力成分は、得られた変位成分を、さらに応力-ひずみ関係式に代入して導出する必要があり、その過程はかなり複雑なものとなる。

そこで、本報は、円柱座標系における三次元の連成熱応力問題に対し、熱弾性変位ポテンシャルなどの概念を導入することによって、求めるべき温度変化、変位成分および応力成分を、簡単な関数表示によって表すことを目的としたものであり、円柱座標系での三次元的温度場および応力場の定式化がなされている。さらに、これらを用いた具体的な解析例として、内側境界からの加熱を受ける中空円筒の軸対称連成熱応力問題をとりあげ、その数値計算を実行した。なお、本報で記述した解析の手法は、連成項を無視した従来の熱弾性的取扱(非連成問題)に対しても、容易に適用可能である。また、解析にあたっては、準静的であると

仮定し、材料の物性値は温度依存性を持たないものとした。

2. 解 法

2.1 関数表示による関係式の導出 円柱座標系(r, θ, z)における三次元熱弾性のつりあい方程式を、変位成分により無次元表示すれば、

$$c_1(\bar{e} - m\bar{T})_{,r} + \rho^{-2}\bar{u}_{,rr} + \bar{u}_{,zz} - \rho^{-2}(\rho\bar{v})_{,r} - \bar{w}_{,rz} = 0 \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$c_1\rho^{-1}(\bar{e} - m\bar{T})_{,z} - (\bar{u}/\rho)_{,r} + \{\rho^{-1}(\rho\bar{v})_{,r}\}_{,r} + \bar{v}_{,zz} - \rho^{-1}\bar{w}_{,rz} = 0 \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$c_1(\bar{e} - m\bar{T})_{,z} - \rho^{-1}(\rho\bar{u})_{,r} - \rho^{-1}\bar{v}_{,rz} + \rho^{-1}(\rho\bar{w}_{,r})_{,r} + \rho^{-2}\bar{w}_{,zz} = 0 \quad \dots\dots\dots(3)$$

ただし、

$$c_1 \equiv \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}, m \equiv \frac{1+\nu}{1-\nu} \quad \dots\dots\dots(4)$$

ここで、 \bar{e} は体積ひずみに関する項であり、

$$\bar{e} = \rho^{-1}(\rho\bar{u})_{,r} + \rho^{-1}\bar{v}_{,z} + \bar{w}_{,z} \quad \dots\dots\dots(5)$$

以上の各式において導入した無次元量は、

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{r}{a}, \quad \zeta = \frac{z}{a}, \quad \bar{T} = \frac{T}{T_0} \\ (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) &= \frac{(u, v, w)}{aT_0\alpha} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(6)$$

であり、 u, v, w は変位成分、 α は線膨張係数、 a はある代表長さ、 T_0 はある基準温度、 ν はポアソン比であり、さらにコンマ(,)はそれに続く変数についての微分を表す。

式(1)、(2)より温度項 \bar{T} を消去すれば、 \bar{e} と \bar{w} の項も同時に消去されて次式を得る。

$$\bar{\Delta}[\rho^{-1}\{\bar{u}_{,r} - (\rho\bar{v})_{,r}\}] = 0 \quad \dots\dots\dots(7)$$

ただし、 $\bar{\Delta}$ はラプラス演算子であり、

$$\bar{\Delta} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \quad \dots\dots\dots(8)$$

* 昭和57年10月10日 第60期全国大会講演会において講演、原稿受付 昭和57年11月15日。

** 正員、大阪府立大学工学部 (〒591 堺市百舌鳥梅町4-804)。

*** 故(元近畿大学理工学部)。

**** 正員、静岡大学工学部 (〒432 浜松市城北3-5-1)。

式(7)において,

$$\bar{u}_{,\theta} - (\rho \bar{v})_{,\theta} = \rho \bar{\Psi}_{,\theta r} \quad \dots\dots\dots (9)$$

とおけば, $\bar{\Psi}$ の満たすべき方程式は, 式(7)より

$$\Delta \bar{\Psi} = 0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

一方, 変位成分 \bar{v} に対し, 熱弾性変位ポテンシャルの概念を導入し,

$$\bar{v} = \rho^{-1} \Phi_{,\theta} \quad \dots\dots\dots (11)$$

とおけば, 式(9)より \bar{u} は次式で表される.

$$\bar{u} = \Phi_{,\rho} + \rho \bar{\Psi}_{,r} \quad \dots\dots\dots (12)$$

式(11), (12)を基礎式(1), (2)に代入すれば,

$$c_1 [\bar{e} - m \bar{T}] - \bar{w}_{,r} + \Phi_{,r} - \rho \bar{\Psi}_{,r} = 0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここで

$$\bar{e} - m \bar{T} = m \chi_{,r} \quad \dots\dots\dots (14)$$

とおけば, 式(13)より \bar{w} は次式となる.

$$\bar{w} = \Phi_{,r} - \rho \bar{\Psi}_{,\rho} + c_1 m \chi \quad \dots\dots\dots (15)$$

以上の演算より, 変位成分 \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} が三つの関数 Φ , $\bar{\Psi}$ および χ により表された. ここで, $\bar{\Psi}$ は式(10)で示されるように, 調和関数である.

式(11), (12), (14)および(15)を, 基礎式(3)に代入すれば,

$$c_1 m \Delta \chi = \rho (\Delta \bar{\Psi})_{,\rho} + 2 \Delta \bar{\Psi} \quad \dots\dots\dots (16)$$

上式に対し, 式(10)の関係を考慮すれば, χ の満たすべき方程式は次式となる.

$$\Delta \chi = 0 \quad \dots\dots\dots (17)$$

一方, 式(5)を(14)に代入すれば,

$$\rho^{-1} (\rho \bar{u})_{,\rho} + \rho^{-1} \bar{v}_{,\theta} + \bar{w}_{,r} = m (\bar{T} + \chi_{,r}) \quad \dots\dots\dots (18)$$

上式に, 式(11), (12)および(15)の変位成分を代入すれば, Φ の満たすべき方程式として次式を得る.

$$\Delta \Phi = m [\bar{T} - (1 - 2\nu)^{-1} \chi_{,r}] - 2 \bar{\Psi}_{,r} \quad \dots\dots\dots (19)$$

以上の解析により, 変位成分の関数表示およびそれらの関数の満たすべき方程式系が導出された. また, 上述の変位成分に対する表示式は, つりあい方程式(1)~(3)を満足していることが確かめられる. ここで, これらを応力-ひずみ関係式に代入すれば, 所要の各応力成分が定式化され, 次式となる.

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{rr} &= \Phi_{,\rho\rho} + (\rho \bar{\Psi})_{,\rho r} + \nu m c_2 \chi_{,r} - m \bar{T} \\ \bar{\sigma}_{\theta\theta} &= \rho^{-1} \Phi_{,\rho} + \rho^{-2} \Phi_{,\theta\theta} + \bar{\Psi}_{,r} + \nu m c_2 \chi_{,r} - m \bar{T} \\ \bar{\sigma}_{zz} &= \Phi_{,r} - \rho \bar{\Psi}_{,r} + (2 - \nu) m c_2 \chi_{,r} - m \bar{T} \\ \bar{\sigma}_{r\theta} &= \left\{ \left(\frac{\Phi}{\rho} \right)_{,\theta} + \frac{1}{2} \bar{\Psi}_{,r} \right\}_{,\theta} \\ \bar{\sigma}_{\theta z} &= \left\{ \rho^{-1} \Phi_{,r} - \frac{1}{2} \bar{\Psi}_{,\rho} + c_2 \rho^{-1} \chi \right\}_{,\theta} \\ \bar{\sigma}_{zr} &= \Phi_{,\rho r} + \frac{1}{2} \rho \bar{\Psi}_{,r} - \frac{1}{2} (\rho \bar{\Psi}_{,\rho})_{,\rho} + c_2 \chi_{,\rho} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (20)$$

ただし,

$$c_2 = \frac{1}{1 - 2\nu} \quad \dots\dots\dots (21)$$

また, 応力成分の無次元表示は

$$\bar{\sigma}_{kl} = \frac{(1 + \nu) \sigma_{kl}}{a E T_0} \quad k, l = r, \theta, z \quad \dots\dots\dots (22)$$

であり, E は縦弾性係数である.

次に熱伝導問題について考える. 連成項を考慮した三次元問題に対する非定常熱伝導方程式の無次元表示は⁽⁴⁾, 内部熱発生のない場合,

$$\bar{T}_{,r} = \Delta \bar{T} - \delta m^{-1} \bar{e}_{,r} \quad \dots\dots\dots (23)$$

ここで, 無次元時間 τ , および連成係数 δ は, 次式で定義される.

$$\tau = \frac{\kappa t}{a^2}, \quad \delta = m c_2 \frac{\bar{T} a^2 E}{C_v \rho} \quad \dots\dots\dots (24)$$

ただし, κ は温度伝導率, \bar{T} は基準絶対温度, C_v は定積比熱, ρ は密度である.

式(23)に(14)を代入すれば, 連成項を含んだ熱伝導方程式は次式となる.

$$\Delta \bar{T} = (1 + \delta) \bar{T}_{,r} + \delta \chi_{,r} \quad \dots\dots\dots (25)$$

上式は, 応力場を支配する調和関数 χ の項を付加することによって, 熱伝導方程式が定式化されることを示している.

2.2 中空円筒の軸対称連成熱応力問題

前節で示した理論解析に対する具体的な解析例として, 図1に示すような外半径が a , 円半径が b の中空円筒における軸対称連成熱応力問題を考える. 前節での定式化は, 軸対称問題に対しても, 全く同様な手法により行うことができ, その最終的な結果は, 関数 $\bar{\Psi}$ を恒等的に

$$\bar{\Psi} = 0 \quad \dots\dots\dots (26)$$

とおけばよいことがわかる.

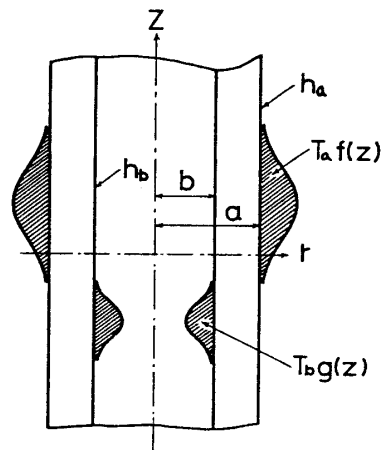


図1 中空円筒の熱的条件

図1に示す中空円筒の加熱条件として、 $t=0$ の瞬間より円筒の外側および内側媒体温度が、それぞれ、 $T_a f(\xi)$ 、 $T_b g(\xi)$ に変化し、それぞれの境界面より相対熱伝達率 h_a 、 h_b で円筒内部に伝熱される場合を想定する。また、円筒は初期温度および初期ひずみがともに零であると考えれば、初期条件および温度境界条件の無次元表示は、次式で与えられる。

$$\tau=0: \bar{T}=0, \chi_{\tau}=0 \dots\dots\dots (27)$$

$$\rho=1: \bar{T}_{,\rho}+H_a \bar{T}=H_a \bar{T}_a f(\xi) \dots\dots\dots (28)$$

$$\rho=\bar{b}: \bar{T}_{,\rho}-H_b \bar{T}=-H_b \bar{T}_b g(\xi) \dots\dots\dots (29)$$

ただし、上式(28)、(29)において、次式で定義される無次元量を導入した。

$$\left. \begin{aligned} \bar{b} &= b/a, \quad H_a = ah_a, \quad H_b = ah_b \\ \bar{T}_a &= T_a/T_0, \quad \bar{T}_b = T_b/T_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

一方、外力が作用しない場合の力学的境界条件は、次式で与えられる。

$$\rho=1, \bar{b}: \bar{\sigma}_{rr}=0, \bar{\sigma}_{rz}=0 \dots\dots\dots (31)$$

以上の初期条件および境界条件に対して、基礎式系は式(17)、(19)、(25)より

$$\bar{\Delta}\chi=0 \dots\dots\dots (32)$$

$$\bar{\Delta}\bar{T}=(1+\delta)\bar{T}_{,\tau}+\delta\chi_{,\tau\tau} \dots\dots\dots (33)$$

$$\bar{\Delta}\Phi=m(\bar{T}-c_2\chi_{,\tau}) \dots\dots\dots (34)$$

ただし、

$$\bar{\Delta}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} \dots\dots\dots (35)$$

基礎式(32)~(34)をラプラス変換およびフーリエ変換を用いて解く。解析過程の簡単化のため、温度関数 $f(\xi)$ および $g(\xi)$ が z に関し対称であると仮定する。ラプラス像関数に記号(*)をつけて表すことにすれば、まず、式(32)より

$$\chi^*=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty [AI_0(q\rho)+A'K_0(q\rho)]\sin q\xi dq \dots\dots\dots (36)$$

式(36)および初期条件式(27)を考慮して、式(33)を解けば、

$$\begin{aligned} \bar{T}^* &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty [BI_0(\mu\rho)+B'K_0(\mu\rho)-\frac{\delta}{1+\delta} \\ &\quad \times q\{AI_0(q\rho)+A'K_0(q\rho)\}] \cos q\xi dq \dots\dots (37) \end{aligned}$$

さらに、式(36)、(37)を考慮して、式(34)を解けば、

$$\begin{aligned} \Phi^* &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty [CI_0(q\rho)+C'K_0(q\rho) \\ &\quad + m\left[\frac{1}{\mu^2-q^2}\{BI_0(q\rho)+B'K_0(q\rho)\} \right. \\ &\quad \left. -\frac{1}{2}\left(c_2+\frac{\delta}{1+\delta}\right)\{A\rho I_1(q\rho) \right. \\ &\quad \left. -A'\rho K_1(q\rho)\}] \cos q\xi dq \dots\dots\dots (38) \end{aligned}$$

ただし、

$$\mu^2=q^2+(1+\delta)p \dots\dots\dots (39)$$

式(36)~(38)において、 $I_n(x)$ 、 $K_n(x)$ は、それぞれ n 次の第1種および第2種変形ベッセル関数、 p はラプラス変換パラメータである。また、 A 、 A' 、 B 、 B' 、 C 、 C' はそれぞれ、境界条件式(28)、(29)および(31)より決定される定数である。さらに、式(36)~(38)を(20)に代入すれば、ラプラス像空間での各成分が定式化される。その詳細の記述は省略することにし、ここで、具体的な加熱条件として、図2に示すような、局所的な内側境界からの加熱のみが作用する場合について考える。すなわち

$$f(\xi)=0, \quad g(\xi)=H(\xi_0-|\xi|) \dots\dots\dots (40)$$

ただし、 $H(x)$ はヘビサイド関数である。

この時、 $g(\xi)$ は、フーリエ変換によって、次式のように表される。

$$g(\xi)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{q}\sin q\xi_0 \cos q\xi dq \dots\dots\dots (41)$$

上式を考慮して、境界条件式(28)、(29)および(31)をラプラス像空間で評価すれば、未定定数 A 、 A' 、 \dots 、 C' がすべて決定される。以上の操作により得られた像空間での温度変化、変位成分および応力成分を、留数定理を用いて逆変換すれば、所要の解が得られる。これらのうち、温度変化 \bar{T} および円周応力 $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ について記述すれば、

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \frac{2}{\pi}H_b\bar{T}_b\int_0^\infty \left[\frac{1}{V}\{\bar{E}I_0(q\rho)+\bar{E}'K_0(q\rho)\} \right. \\ &\quad \left. -\sum_{j=1}^\infty \frac{2\omega_j}{(\omega_j^2+q^2)D(\omega_j)} \exp\{-(\omega_j^2+q^2)\tau/(1+\delta)\} \right. \\ &\quad \times [\bar{B}J_0(\omega_j\rho)-\bar{B}'Y_0(\omega_j\rho)+c_3q\{\bar{A}I_0(q\rho) \\ &\quad \left. +\bar{A}'K_0(q\rho)\}] \right] \frac{1}{q}\sin q\xi_0 \cos q\xi dq \dots\dots (42) \end{aligned}$$

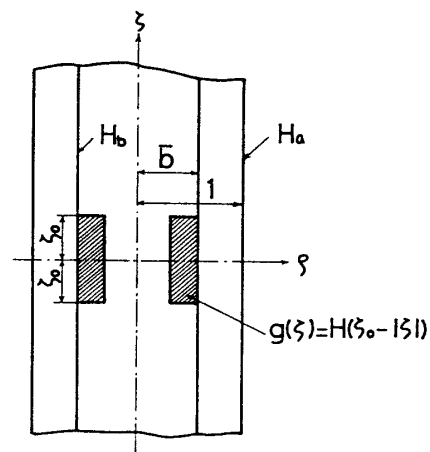


図2 局所的な内側加熱を受ける中空円筒

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{\theta\theta} = & \frac{2}{\pi} H_b \bar{T}_b \int_0^\infty \mathbf{U} \frac{q}{\rho} \{ \bar{G} I_1(q\rho) - \bar{G}' K_1(q\rho) \} - \frac{mq}{2} \{ \bar{F} I_0(q\rho) + \bar{F}' K_0(q\rho) \} \\ & - \frac{m}{2V} \{ \bar{E} I_0(q\rho) + \bar{E}' K_0(q\rho) \} - \sum_{j=1}^\infty \frac{2\omega_j}{(\omega_j^2 + q^2) D(\omega_j)} \exp\{ -(\omega_j^2 + q^2)\tau / (1 + \delta) \} \\ & \times \left[\frac{q}{\rho} \{ \bar{C} I_1(q\rho) - \bar{C}' K_1(q\rho) \} - \frac{m}{\omega_j^2 + q^2} [\bar{B} \{ (\omega_j^2 + q^2) J_0(\omega_j \rho) - \frac{\omega_j}{\rho} J_1(\omega_j \rho) \} \right. \\ & \left. - \bar{B}' \{ (\omega_j^2 + q^2) Y_0(\omega_j \rho) - \frac{\omega_j}{\rho} Y_1(\omega_j \rho) \}] - \frac{mq}{2(1 + \delta)} \{ \bar{A} I_0(q\rho) + \bar{A}' K_0(q\rho) \} \right] \text{III} \\ & \times \frac{1}{q} \sin q \zeta_0 \cos q \zeta dq \dots\dots\dots (43) \end{aligned}$$

上式において、 $J_n(x)$, $Y_n(x)$ は、それぞれ n 次の第1種および第2種ベッセル関数であり、 c_3 は

$$c_3 = \frac{\delta}{1 + \delta} \dots\dots\dots (44)$$

\bar{E} , \bar{E}' および V は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \bar{E} = & -\{ H_a K_0(q) - q K_1(q) \}, \quad \bar{E}' = H_a I_0(q) + q I_1(q) \\ V = & \{ H_a I_0(q) + q I_1(q) \} \{ H_b K_0(q\bar{b}) + q K_1(q\bar{b}) \} - \{ H_a K_0(q) - q K_1(q) \} \{ H_b I_0(q\bar{b}) - q I_1(q\bar{b}) \} \end{aligned} \dots\dots\dots (45)$$

また、 \bar{G} , \bar{G}' , \bar{F} および \bar{F}' は、次式を満たす方程式の根である。

$$\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} \\ e_{41} & e_{42} & e_{43} & e_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{G} \\ \bar{G}' \\ \bar{F} \\ \bar{F}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (46)$$

ただし、

$$\begin{aligned} e_{11} = & 2m^{-1} q^2 \{ I_0(q) - q^{-1} I_1(q) \}, \quad e_{12} = 2m^{-1} q^2 \{ K_0(q) + q^{-1} K_1(q) \} \\ e_{13} = & -q \{ I_0(q) + c_2 q I_1(q) \}, \quad e_{14} = -q \{ (K_0(q) - c_2 q K_1(q)) \} \\ e_{21} = & 2m^{-1} q^2 \{ I_0(q\bar{b}) - (q\bar{b})^{-1} I_1(q\bar{b}) \}, \quad e_{22} = 2m^{-1} q^2 \{ K_0(q\bar{b}) + (q\bar{b})^{-1} K_1(q\bar{b}) \} \\ e_{23} = & -q \{ I_0(q\bar{b}) + c_2 q \bar{b} I_1(q\bar{b}) \}, \quad e_{24} = -q \{ K_0(q\bar{b}) - c_2 q \bar{b} K_1(q\bar{b}) \} \\ e_{31} = & -2m^{-1} q^2 I_1(q), \quad e_{32} = 2m^{-1} q^2 K_1(q), \quad e_{33} = c_2 q \{ q I_0(q) + 2(1 - \nu) I_1(q) \} \\ e_{34} = & c_2 q \{ q K_0(q) - 2(1 - \nu) K_1(q) \}, \quad e_{41} = -2m^{-1} q^2 I_1(q\bar{b}), \quad e_{42} = 2m^{-1} q^2 K_1(q\bar{b}) \\ e_{43} = & c_2 q \{ q \bar{b} I_0(q\bar{b}) + 2(1 - \nu) I_1(q\bar{b}) \}, \quad e_{44} = c_2 q \{ q \bar{b} K_0(q\bar{b}) - 2(1 - \nu) K_1(q\bar{b}) \} \\ f_1 = & [\bar{E} \{ I_0(q) - q I_1(q) \} + \bar{E}' \{ K_0(q) + q K_1(q) \}] / V \\ f_2 = & [\bar{E} \{ I_0(q\bar{b}) - q \bar{b} I_1(q\bar{b}) \} + \bar{E}' \{ K_0(q\bar{b}) + q \bar{b} K_1(q\bar{b}) \}] / V \\ f_3 = & q [\bar{E} I_0(q) + \bar{E}' K_0(q)] / V, \quad f_4 = q \bar{b} [\bar{E} I_0(q\bar{b}) + \bar{E}' K_0(q\bar{b})] / V \end{aligned} \dots\dots\dots (47)$$

一方、

$$\bar{B} = \bar{B} - i\pi \bar{B}' / 2, \quad \bar{B}' = \pi \bar{B}' / 2 \quad (i^2 = -1) \dots\dots\dots (48)$$

と定数 \bar{B} および \bar{B}' を定義すれば、 \bar{A} , \bar{A}' , \bar{B} , \bar{B}' , \bar{C} および \bar{C}' は、次式を満たす方程式の根として求められる。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{B} \\ \bar{B}' \\ \bar{A} \\ \bar{A}' \\ \bar{C} \\ \bar{C}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ W \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (49)$$

ただし、上式より得られた未定定数は、次式で与えられる関数を用いて、変数 μ を ω に変換したものをを用いることにする。また、式(49)に含まれる W は、式(49)の左辺の係数行列式である。

$$\mu = i\omega \dots\dots\dots (50)$$

さらに、式(49)に含まれる a_{ki} は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= H_a I_0(\mu) + \mu I_1(\mu), & a_{12} &= H_a K_0(\mu) - \mu K_1(\mu), & a_{13} &= -c_3 q \bar{E}' \\
 a_{14} &= c_3 q \bar{E}, & a_{21} &= H_b I_0(\mu \bar{b}) - \mu I_1(\mu \bar{b}), & a_{22} &= H_b K_0(\mu \bar{b}) + \mu K_1(\mu \bar{b}) \\
 a_{23} &= -c_3 q \{H_b I_0(q \bar{b}) - q I_1(q \bar{b})\}, & a_{24} &= -c_3 q \{H_b K_0(q \bar{b}) + q K_1(q \bar{b})\} \\
 a_{31} &= \{q^2 I_0(\mu) - \mu I_1(\mu)\} / (\mu^2 - q^2), & a_{32} &= \{q^2 K_0(\mu) + \mu K_1(\mu)\} / (\mu^2 - q^2) \\
 a_{33} &= -(1/2)q[(1 + \delta)^{-1} I_0(q) + (c_2 + c_3)q I_1(q)] \\
 a_{34} &= -\frac{1}{2}q[(1 + \delta)^{-1} K_0(q) - (c_2 + c_3)q K_1(q)], & a_{35} &= \frac{c_{11}}{2}, & a_{36} &= \frac{c_{12}}{2} \\
 a_{41} &= \{q^2 I_0(\mu \bar{b}) - \mu \bar{b}^{-1} I_1(\mu \bar{b})\} / (\mu^2 - q^2), & a_{42} &= \{q^2 K_0(\mu \bar{b}) + \mu \bar{b}^{-1} K_1(\mu \bar{b})\} / (\mu^2 - q^2) \\
 a_{43} &= -\frac{1}{2}q[(1 + \delta)^{-1} I_0(q \bar{b}) + (c_2 + c_3)q \bar{b} I_1(q \bar{b})] \\
 a_{44} &= -\frac{1}{2}q[(1 + \delta)^{-1} K_0(q \bar{b}) - (c_2 + c_3)q \bar{b} K_1(q \bar{b})], & a_{45} &= \frac{c_{21}}{2}, & a_{46} &= \frac{c_{22}}{2} \\
 a_{51} &= \mu I_1(\mu) / (\mu^2 - q^2), & a_{52} &= -\mu K_1(\mu) / (\mu^2 - q^2) \\
 a_{53} &= -\frac{1}{2}(c_2 + c_3)q I_0(q) - \frac{1}{2}c_1 I_1(q), & a_{54} &= -\frac{1}{2}(c_2 + c_3)q K_0(q) + \frac{1}{2}c_1 K_1(q) \\
 a_{55} &= m^{-1}q I_1(q), & a_{56} &= -m^{-1}q K_1(q), & a_{61} &= \mu I_1(\mu \bar{b}) / (\mu^2 - q^2) \\
 a_{62} &= -\mu K_1(\mu \bar{b}) / (\mu^2 - q^2), & a_{63} &= -\frac{1}{2}(c_2 + c_3)q \bar{b} I_0(q \bar{b}) - \frac{1}{2}c_1 I_1(q \bar{b}) \\
 a_{64} &= -\frac{1}{2}(c_2 + c_3)q \bar{b} K_0(q \bar{b}) + \frac{1}{2}c_1 K_1(q \bar{b}), & a_{65} &= m^{-1}q I_1(q \bar{b}), & a_{66} &= -m^{-1}q K_1(q \bar{b})
 \end{aligned}$$

..... (51)

また、 $D(\omega_j)$ は、

$$D(\omega_j) = -i \frac{dW}{d\mu} \Big|_{\mu = i\omega_j} \dots\dots\dots (52)$$

であり、固定値 ω_j は、 q のおのおのの値 ($q=0 \sim \infty$) に対し次式を満たす j 番めの正根である。

$$W = 0 \dots\dots\dots (53)$$

3. 数 値 計 算

上述の解析解に対する数値計算例として、計算諸元

を次式のように与え、演算を行った。

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{b} &= 0.5, & H_a &= 1.0, & H_b &= 1.0 \\
 \nu &= 0.3, & \bar{T}_b &= 1.0, & \zeta_0 &= 1.0 \\
 \delta &= 0, 0.08
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (54)$$

図3以下に数値計算結果を示すが、これら各図において、破線が $\delta=0.08$ に対する連成解、実線が非連成解 ($\delta=0$) である。

温度分布 \bar{T} に対する結果を、図3, 4, 5に示す。図3は、中央断面 ($\zeta=0$) での半径方向の変化を、図4および5は、それぞれ、中空円筒の加熱側境界上 (内側境界, $\rho=0.5$) および外側境界上 ($\rho=1.0$) の軸方向に関する変化を示したものである。定性的挙動としては、中空円柱の軸対称問題について論じた結果⁽³⁾とほぼ類似している。すなわち、温度変化に与える連成効果として、かなり顕著な温度低下をもたらすことがわかる。また、その影響が最も顕著に現れるのは、本報の数値計算例に対しては、 $\tau=0.2$ 程度の時刻である。さらに、図5では、加熱初期、例えば $\tau=0.02$ において、初期基準温度以下の負の温度分布が、顕著に現れている。この現象は、熱源より遠く離れた外側境界近傍では、伝熱によって熱エネルギーの供給される以前に、弾性体としての変形を引き起こし、それに消散される熱エネルギーの大きなことを示している。

円周応力 $\sigma_{\theta\theta}$ の軸方向の変化を図6および7に示す。図6は内側加熱境界上、図7は外側放熱境界上で

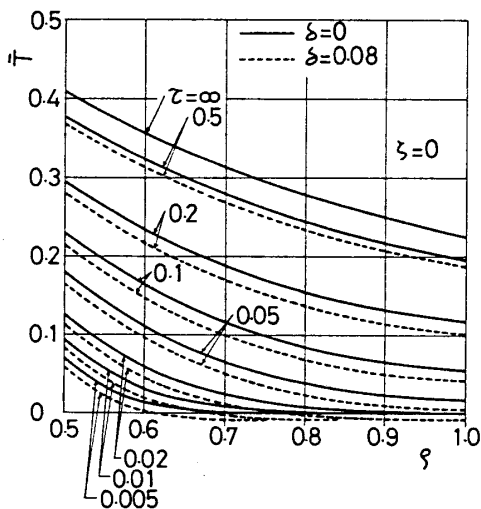


図3 中央断面での温度変化 ($\zeta=0$)

の分布である。中空円筒を内側境界上から加熱した場合には、平面問題からも推察されるとおり、円側境界近傍で圧縮、外側境界近傍で引張応力分布を示す。連成効果としては、図 6, 7 で示されるとおり、連成解のほうが非連成解よりも、引張応力、圧縮応力の両方の場合に対して応力分布が小さく現れており、結局、本

数値計算例の場合には、熱応力分布を緩和する傾向に働いているといえる。

軸応力 σ_{zz} の軸方向の変化を、図 8 および 9 に示す。図 8 は円側加熱境界上、図 9 は外側放熱境界上での軸方向分布であり、軸応力 σ_{zz} に関する応力分布の傾向および連成効果などの定性的傾向は、図 6, 7 について述べた円周応力 $\sigma_{\theta\theta}$ に関するものと、ほぼ同じ傾向を示している。

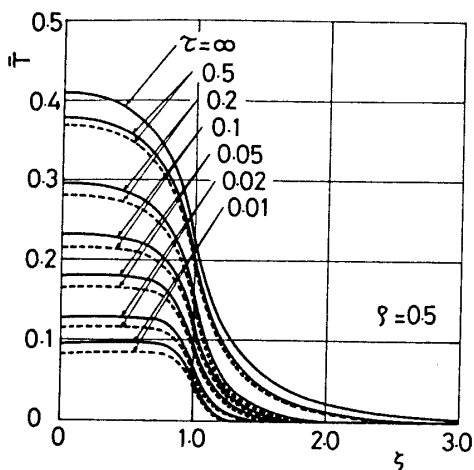


図 4 内側境界上の温度分布の軸方向変化

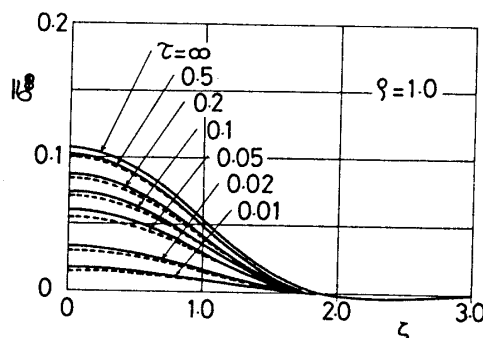


図 7 外側境界上の円周応力 $\sigma_{\theta\theta}$ の軸方向変化

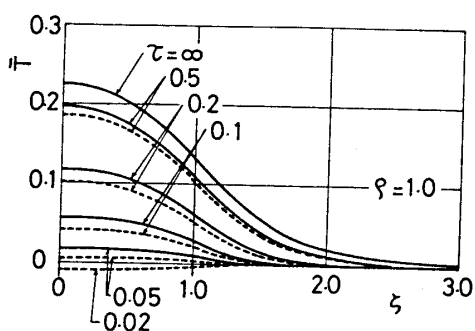


図 5 外側境界上の温度分布の軸方向変化

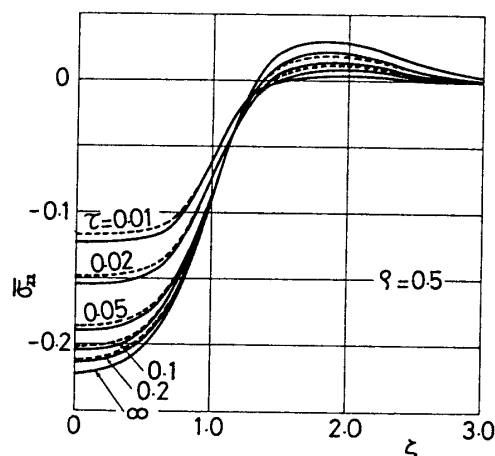


図 8 内側境界上の軸応力 σ_{zz} の軸方向変化

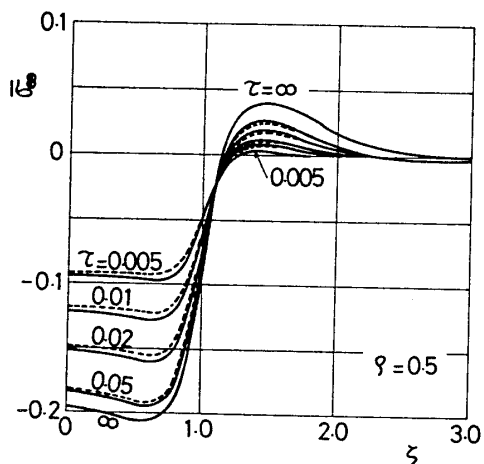


図 6 内側境界上の円周応力 $\sigma_{\theta\theta}$ の軸方向変化

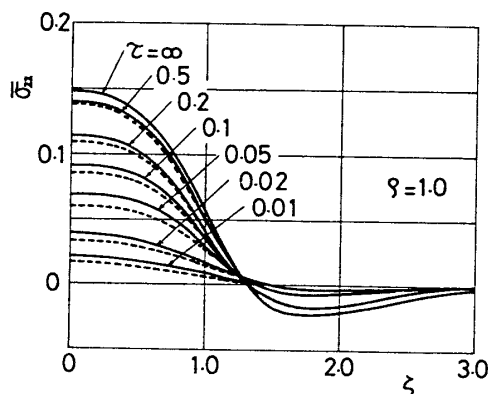
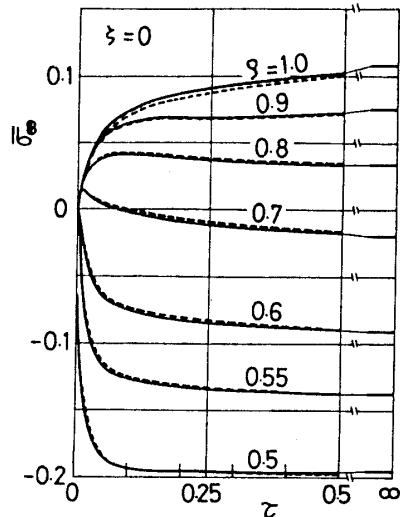


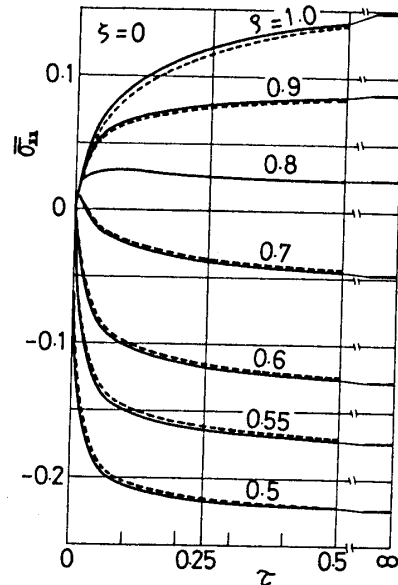
図 9 外側境界上の軸応力 σ_{zz} の軸方向変化

図 10 中央断面上の円周応力 $\sigma_{\theta\theta}$ の時間的変化

最後に、中央断面上 ($\zeta=0$) の各点における応力成分 $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{zz} の時間的変化を、それぞれ、図 10 および 11 に示す。これら各図より、本数値計算に用いた内側境界からの加熱という設定条件のもとでは、定常に至るまでの過渡状態において最大熱応力が現れず、熱衝撃的挙動は認められないが、前述の計算諸元のもとでは、 $\tau=0.1$ 程度の時刻で、生じる熱応力がほぼ最大値に漸近していることがわかる。また、引張応力状態となる外側境界近傍では、 $\sigma_{\theta\theta}$ よりも、 σ_{zz} のほうが大きな値を示す分布となる。

4. 結 言

本論文では、まず、熱弾性変位ポテンシャルの概念を用いて、円柱座標系での三次元連成熱応力問題の解析に好都合な、新しい基礎関係式系の定式化を行った。さらに、これらの関係式を用いた一つの解析例として、内側境界からの加熱を受ける中空円筒の連成熱

図 11 中央断面上の軸応力 σ_{zz} の時間的変化

応力問題を取りあげ、その数値計算例を示した。数値計算結果より、特に温度分布に関して、従来から指摘されている基準温度以下の負の温度分布の存在が明確に認められた。

最後に、本論文で算出した円柱座標系の三次元熱弾性問題に対する定式化は、連成項を無視した非連成問題にも簡単に適用できるため、他の種々の熱弾性問題に幅広く使用し得ると考えられる。

文 献

- (1) 谷川・竹内, 機論, 48-425, A (昭57), 81.
- (2) Takeuti, Y. and Tanigawa, Y., *Theor. Appl. Mech.*, 30 (1981), 393.
- (3) 谷川・竹内, 機論, 48-426, A (昭57), 160.
- (4) Tanigawa, Y. and Takeuti, Y., *Z. Angew. Math. Mech.*, 62-6 (1982), 221.

討 論

〔質問〕 宮尾 嘉 寿〔富山大学工学部〕

円柱座標系における三次元非定常熱応力について連成問題の一解法をみごとに定式化されたことに敬意を表する。次のことをお尋ねしたい。

(1) 図 2 に示される円筒で加熱初期に負の温度が現れることを具体的に示されたことは有意義でかつ興味がある。これは加熱温度、材料定数などの多くの要因によることはもちろんだが、式(54)の計算諸元のもとで円筒肉厚すなわち \bar{b} がいかなる値の時、円筒外

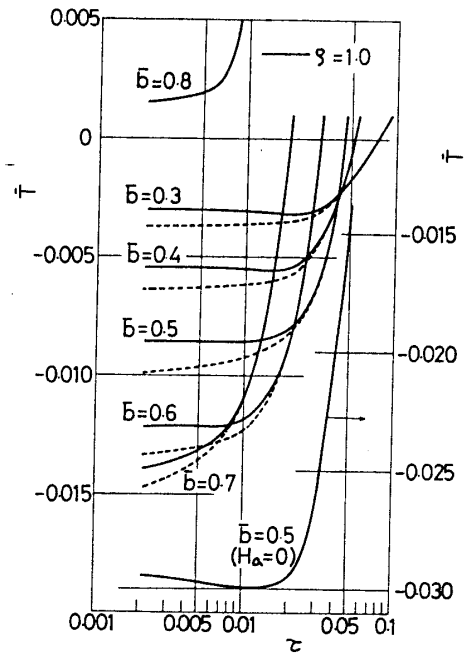
側に最も大きい負の温度が現れるのか。

(2) 本数値例の場合には熱衝撃挙動は認められていないが、この現象が現れるのは物理的にみていかなる計算諸元あるいは加熱条件のもとであると推測されるか。

〔回答〕 (1) 式(54)の計算諸元のもとで、円筒厚さ \bar{b} だけを変化した場合に、加熱初期に現れる負の温度分布を付図 1 に示した。付図 1 は $\zeta=0$ の中央断面上の分布であり、実線が円筒外側境界 ($\rho=1$) に

対するものである。なお式(54)の計算諸元は、外側境界上で熱伝達がある場合 ($H_a=1.0$) を想定しているため、ある時刻に対する最大の負の温度は、外側境界上でなく、内部の領域に現れることが予測される。そこで、その分布を図中に破線で示した。付図1から、 $\bar{b}=0.6\sim 0.7$ において、最大の負の温度分布が円筒の外側境界およびその近傍に現れるといえる。この原因としては、肉厚が厚い場合、加熱領域が相対的に小さくなるとともに、円筒の変形に対する拘束が大きくなるため、温度変化の、温度上昇を示していない部分でのひずみに与える影響が小さくなるものと思われる。また、極端に肉厚が薄くなった場合には、肉厚が厚い場合と比べ円筒の変形態様が変わることの影響もあると思うが、加熱初期であっても円筒全体への温度の伝わり方が速く、負の温度が現れなくなると考えられる。なお、外側境界上が断熱 ($H_a=0$) された場合、 $H_a \neq 0$ の場合よりも負の温度分布 (外側境界上で最大) が大きく現れる。そこで、付図1に、 $\bar{b}=0.5$ に対する結果を示しておいた。

(2) 加熱条件に関しては、相対熱伝達率が大きな、温度指定に近い場合に、熱衝撃挙動が顕著に現れると考えられる。しかし、熱衝撃現象は、本報で扱った円筒座標系の問題、あるいは球座標系の問題などのように直交曲線座標系における第1類 (1種類の座標変数を固定することにより表される境界を持った場合) の熱弾性問題に対しては、(計算諸元に関与するが) 加熱する位置と密接な関係があり、これが熱衝撃挙動を示すかどうかの第一義的なパラメータになると



付図 1

思われる。例えば、中空円筒、中空球などを外側境界から加熱した場合には熱衝撃挙動を示すが、内側境界から加熱した場合には、本報で示したように熱衝撃挙動が現れない。この理由は、内側境界近傍は、その幾何学的形状からわかるとおり、熱変形に対する拘束が強いためであると思われる。ほかに種々の原因が考えられると思われるが、結論として、熱衝撃挙動は、取扱う物体の幾何学的形状と、その加熱位置に最も関係すると思われる。