日本機械学会論文集(A 編)
58 巻 546 号(1992-2)

論文 No. 91-1169 B

異種材料界面端部の応力特異性*
(三次元軸対称弾性問題)

野田直剛*1, 辻　知章*1

Stress Singularities in Edge-Bonded Dissimilar Wedges
(Three Dimensional Axisymmetrical Elastic Problems)

Naotake NODA and Tomoaki TSUJI

The three-dimensional axisymmetric elastic problems of two materially dissimillar wedges of arbitrary angles that are bonded together along a common edge are treated. The dependence of the order of the singularity in the stress field at the apex on the wedge angles and material constants is considered. The order of the stress singularities is determined by use of local coordinates at the top of the wedge. The expression to determine the order of stress singularities in these problems is obtained.

Key Words: Elasticity, Stress Singularity, Dissimilar Materials, Composite Materials, Three-Dimensional Axisymmetry

1. 緒　言

複合材料，金属・セラミックス接合材料を代表例として，異種材料を接合した材料が数多く用いられるに従い，接合材料の種々の力学的問題が注目を浴びている．これらの接合材料の力学的問題のひとつとして，異種接合材料の接合端面における応力特異性および特異性消失問題がある．この応力特異性および特異性消失問題に対し，平面応力問題・一般化された平面ひずみ問題(1)~(7)，ねじり問題(8)~(11)について数多くの研究がなされている．しかし，三次元問題に対してはほとんど取扱われていない．例えば，Agarwal(12)が材質の異なる同一半径を持つ半無限弾性円柱の接合問題，辻・渋谷・小泉(13)が軸荷重を受ける材質の異なる段付弾性丸棒を取扱っている程度である．これらの研究は異種材料の接合端面において，接合面と自由境界面が直角の場合と直角並びに2直角の場合である．

本研究は異種材料が三次元軸対称形で接合され，かつ接合部端において接合面と自由境界面が任意の角度で接合されている場合の応力特異性を，三次元軸対称弾性理論に基づいて取扱ったものである．接合端面の先端に局所座標を用いることにより，異種接合材料の応力特異性の次数を決定する特性方程式と特異性の出現・消失の遷移条件式を導いた．

* 原稿受付　平成3年8月28日．
*1 正員，静岡大学工学部(〒432 浜松市城北 3-5-1)．

2. 解　析

図1に示すように，材質の異なる二つの軸対称弾性体が角部を有し，$z=0$ の面で接合されている場合について考える．軸対称座標 (r, z) の座標原点から半径 a の位置に軸対称な角部を有し，角部の先端から局所座標 (R, θ) をとる．材料1は接合面から θ_1 の開き角を有し，材料2は接合面から θ_2 の開き角を有してい

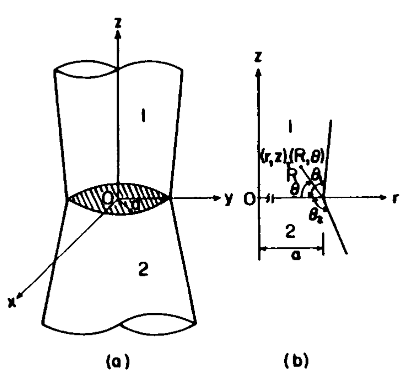

図 1　異種材料の接合界面端部

るとする．材料1, 2は等方等質弾性体とし，材料1と2の横弾性係数を G_1, G_2, ポアソン比を ν_1, ν_2 とする．

三次元軸対称問題は軸対称座標 (r, z) 表示で

$$2Gu_r=\frac{\partial\phi}{\partial r}+z\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

$$2Gu_z=\frac{\partial\phi}{\partial z}+z\frac{\partial\psi}{\partial z}-(3-4\nu)\psi$$

$$\sigma_{rr}=\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+z\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-2\nu\frac{\partial\psi}{\partial z}$$

$$\sigma_{zz}=\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}+z\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}-2(1-\nu)\frac{\partial\psi}{\partial z}$$

$$\sigma_{rz}=\frac{\partial^2\phi}{\partial r\partial z}+z\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial z}-(1-2\nu)\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

…………(1)

ここで，u_r, u_z は軸対称座標表示における半径変位および軸変位，$\sigma_{rr}, \sigma_{zz}, \sigma_{rz}$ は応力成分である．このとき，二つの関数 ϕ, ψ が満足すべき基礎方程式は

$$\nabla^2\phi=0,\quad \nabla^2\psi=0 \quad\cdots\cdots(2)$$

ただし，

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad\cdots\cdots(3)$$

次に，局所座標 (R, θ) を用いて変位と応力を表示する．軸対称座標 (r, z) と局所座標 (R, θ) の関係は

$$z=R\sin\theta,\quad r=a-R\cos\theta$$

$$(a-r)^2+z^2=R^2,\quad \tan\theta=z/(a-r)$$

…………(4)

式(4)を用いて式(1)を座標変換し，局所座標系の変位および応力を求めれば

$$2Gu_R=\frac{\partial\phi}{\partial R}+R\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial R}-(3-4\nu)\psi\sin\theta$$

$$2Gu_\theta=-\frac{1}{R}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\theta}-\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+(3-4\nu)\psi\cos\theta$$

$$\sigma_{\theta\theta}=\frac{1}{R}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial R}+\frac{1}{R^2}\cdot\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}+R\sin\theta\left(\frac{1}{R}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial R}+\frac{1}{R^2}\times\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}\right)-2\nu\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial R}-2(1-\nu)\frac{\cos\theta}{R}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$$

$$\sigma_{R\theta}=\frac{1}{R}\left(\frac{1}{R}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\theta}-\frac{\partial^2\phi}{\partial R\partial\theta}\right)+\sin\theta\left(\frac{1}{R}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\theta}-\frac{\partial^2\psi}{\partial R\partial\theta}\right)+(1-2\nu)\left(\cos\theta\frac{\partial\psi}{\partial R}+\frac{\sin\theta}{R}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)$$

…………(5)

ここで，u_R, u_θ は局所座標における半径変位および円周方向変位，$\sigma_{\theta\theta}, \sigma_{R\theta}$ は応力成分である．このとき，二つの関数 ϕ, ψ が満足すべき基礎方程式は

$$\nabla^2\phi=0,\quad \nabla^2\psi=0 \quad\cdots\cdots(6)$$

ただし，

$$\nabla^2=\nabla_1^2-\frac{\cos\theta}{a-R\cos\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial R}+\frac{\sin\theta}{R(a-R\cos\theta)}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$\nabla_1^2=\frac{\partial^2}{\partial R^2}+\frac{1}{R}\cdot\frac{\partial}{\partial R}+\frac{1}{R^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

…………(7)

さて，関数 ϕ, ψ が満足すべき基礎方程式の一般解を求めよう．数学公式

$$\frac{1}{a-R\cos\theta}=\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{a}\cos\theta\right)^n,\quad |R\cos\theta|<a$$

を用いると

$$\nabla^2\phi=\nabla_1^2\phi-\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{a}\cos\theta\right)^n\times\left(\cos\theta\frac{\partial\phi}{\partial R}-\frac{\sin\theta}{R}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)=0 \quad\cdots\cdots(8)$$

式(8)の一般解が

$$\phi=\sum_{i=0}^{\infty}\phi_i=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{R}{a}\right)^{i+p+1}f_i(\theta) \quad\cdots\cdots(9)$$

で与えられるとし，上式を式(8)に代入し整理すると

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{R}{a}\right)^{i+p-1}\left[\{f_i''(\theta)+(i+p+1)^2f_i(\theta)\}-\sum_{n=0}^{i-1}\cos^n\theta\{(i+p-n)\cos\theta f_{i-n-1}(\theta)-\sin\theta f_{i-n-1}'(\theta)\}\right]=0$$

…………(10)

ただし，上付き記号(′,″)は θ に関するそれぞれ1階，2階の微分を表す．よって，関数 $f_i(\theta)$ が満足すべき方程式は

$$\{f_i''(\theta)+(i+p+1)^2f_i(\theta)\}=\sum_{n=0}^{i-1}\cos^n\theta\{(i+p-n)\cos\theta f_{i-n-1}(\theta)-\sin\theta f_{i-n-1}'(\theta)\} \quad\cdots\cdots(11)$$

となる．関数 $f_i(\theta)$ の一般解は

$$f_0(\theta)=F_0\cos(p+1)\theta+H_0\sin(p+1)\theta$$

$$f_1(\theta)=F_1\cos(p+2)\theta+H_1\sin(p+2)\theta+(F_0/4)\cos p\theta+(H_0/4)\sin p\theta$$

$$f_2(\theta)=\cdots\cdots$$

よって，

$$\phi_0=(R/a)^{p+1}\{F_0\cos(p+1)\theta+H_0\sin(p+1)\theta\}$$

$$\phi_1=(R/a)^{p+2}\{F_1\cos(p+2)\theta+H_1\sin(p+2)\theta+(F_0/4)\cos p\theta+(H_0/4)\sin p\theta\}$$

$$\phi_2=\cdots\cdots$$

…………(12)

応力の特異性を議論する場合，R のべき乗の最低次数について考えればよいから，式(12)より，二つの調和関数 ϕ, ψ の解として次式を採用する．

$$\phi=R^{p+1}\{A\cos(p+1)\theta+B\sin(p+1)\theta\},\quad \psi=R^{p}\{C\cos p\theta+D\sin p\theta\} \quad\cdots\cdots(13)$$

上式を式(5)に代入すると

$$\begin{aligned}
2Gu_R&=R^p[(p+1)A\cos(p+1)\theta+(p+1)B\sin(p+1)\theta+\{(p-k)/2\}C\{\sin(p+1)\theta+\sin(1-p)\theta\}\\
&\quad-\{(p-k)/2\}D\{\cos(p+1)\theta-\cos(1-p)\theta\}]\\
2Gu_\theta&=R^p[(p+1)A\sin(p+1)\theta-(p+1)B\cos(p+1)\theta+(C/2)\{(k-p)\cos(p+1)\theta+(k+p)\cos(1-p)\theta\}\\
&\quad-(D/2)\{(k-p)\sin(p+1)\theta-(k+p)\sin(1-p)\theta\}]\\
\sigma_{\theta\theta}&=-(p/2)R^{p-1}[2(p+1)A\cos(p+1)\theta+2(p+1)B\sin(p+1)\theta+C\{(p-k)\sin(p+1)\theta\\
&\quad+(1+p)\sin(1-p)\theta\}+D\{(k-p)\cos(p+1)\theta+(1+p)\cos(1-p)\theta\}]\\
\sigma_{R\theta}&=(p/2)R^{p-1}[2(p+1)A\sin(p+1)\theta-2(p+1)B\cos(p+1)\theta+C\{(k-p)\cos(p+1)\theta\\
&\quad-(1-p)\cos(1-p)\theta\}+D\{(k-p)\sin(p+1)\theta+(1-p)\sin(1-p)\theta\}]
\end{aligned} \quad\cdots\cdots(14)$$

ただし，$k=3-4\nu$ である．

接合面および自由境界における境界条件について考える．材料1，2については添字1，2をもって区別する．接合面が完全に接合されているとすれば，境界条件は

$$\left.\begin{aligned}
&\theta=0 \text{ で } u_{R1}=u_{R2},\quad \theta=0 \text{ で } u_{\theta1}=u_{\theta2}\\
&\theta=0 \text{ で } \sigma_{\theta\theta1}=\sigma_{\theta\theta2},\quad \theta=0 \text{ で } \sigma_{R\theta1}=\sigma_{R\theta2}\\
&\theta=\theta_1 \text{ で } \sigma_{\theta\theta1}=0,\quad \theta=\theta_1 \text{ で } \sigma_{R\theta1}=0\\
&\theta=\theta_2 \text{ で } \sigma_{\theta\theta2}=0,\quad \theta=\theta_2 \text{ で } \sigma_{R\theta2}=0
\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(15)$$

式(15-1)～(15-4)より

$$\begin{aligned}
&A_2=G_{12}A_1\\
&B_2=[(1+p)\{2k_2-G_{12}(k_2-1)\}B_1+\{G_{12}k_1(k_2-1)-k_2(k_1-1)\}C_1]/\{(1+p)(1+k_2)\}\\
&C_2=[2(1+p)(1-G_{12})B_1+\{2G_{12}k_1-(k_1-1)\}C_1]/\{(1+p)(1+k_2)\}\\
&D_2=(1+k_1)D_1/(1+k_2)+2(1+p)(1-G_{12})A_1/(1+k_2)
\end{aligned}$$

ただし，$G_{12}=G_2/G_1$ である．上式と式(15-5)～(15-8)より，未知係数(A_1, B_1, C_1, D_1)を決定する方程式として次式を得る．

$$|a_{ij}|[A_1\quad B_1\quad C_1\quad D_1]^T=0 \quad\cdots\cdots(16)$$

ただし，

$$\begin{aligned}
&a_{11}=a_{22}=2(1+p)\sin(1+p)\theta_1,\quad -a_{12}=a_{21}=2(1+p)\cos(1+p)\theta_1\\
&a_{13}=(k_1-p)\cos(1+p)\theta_1-(1-p)\cos(1-p)\theta_1,\quad a_{14}=(k_1-p)\sin(1+p)\theta_1+(1-p)\sin(1-p)\theta_1\\
&a_{23}=-(k_1-p)\sin(1+p)\theta_1+(1+p)\sin(1-p)\theta_1,\quad a_{24}=(k_1-p)\cos(1+p)\theta_1+(1+p)\cos(1-p)\theta_1\\
&a_{31}=(1+p)[\{1+k_2-(1+p)(1-G_{12})\}\sin(1+p)\theta_2+(1-G_{12})(1-p)\sin(1-p)\theta_2]\\
&a_{32}=(1+p)[\{1+k_2-(1-p)(1-G_{12})\}\cos(1+p)\theta_2+(1-G_{12})(1-p)\cos(1-p)\theta_2]\\
&a_{33}=[-\{(1-p)(2G_{12}k_1+1-k_1)+(k_1-1)(k_2+1)\}\cos(1+p)\theta_2+(1-p)(2G_{12}k_1+1-k_1)\cos(1-p)\theta_2]/2\\
&a_{34}=(k_1+1)\{(k_2-p)\sin(1+p)\theta_2+(1-p)\sin(1-p)\theta_2\}/2\\
&a_{41}=(1+p)[\{1+k_2-(1+p)(1-G_{12})\}\cos(1+p)\theta_2+(1+p)(1-G_{12})\cos(1-p)\theta_2]\\
&a_{42}=-(1+p)[\{1+k_2-(1-p)(1-G_{12})\}\sin(1+p)\theta_2+(1+p)(1-G_{12})\sin(1-p)\theta_2]\\
&a_{43}=[\{(1-p)(2G_{12}k_1+1-k_1)+(k_1-1)(k_2+1)\}\sin(1+p)\theta_2-(1+p)(2G_{12}k_1+1-k_1)\sin(1-p)\theta_2]/2\\
&a_{44}=(k_1+1)\{(k_2-p)\cos(1+p)\theta_2+(1+p)\cos(1-p)\theta_2\}/2
\end{aligned} \quad\cdots\cdots(17)$$

式(16)が零解を持たないためには

$$|a_{ij}|=0 \quad\cdots\cdots(18)$$

上式を整理すると，応力の特異性を表す指数 p を決定する特性方程式を得る．この特性方程式を D とすれば

$$\begin{aligned}
D&=(1-\alpha)^2\{(1-p)C_{p1}+(1+p)C_{m1}\}+(1+\alpha)^2\{(1-p)C_{p2}+(1+p)C_{m2}\}\\
&\quad+(1+\alpha)(1-\alpha)\{C_{m1}C_{p2}+C_{p1}C_{m2}-S_{m1}S_{p2}-S_{p1}S_{m2}\}-(\beta-\alpha)(1+\alpha)(C_{p1}+C_{m1})\{(1-p)C_{p2}
\end{aligned}$$

$$+(1+p)C_{m2}\}+(\beta-\alpha)(1-\alpha)(C_{p2}+C_{m2})\{(1-p)C_{p1}+(1+p)C_{m1}\}$$
$$-(\beta-\alpha)^2\{(1-p)C_{p1}+(1+p)C_{m1}\}\{(1-p)C_{p2}+(1+p)C_{m2}\}=0 \quad \cdots\cdots(19)$$

ただし，α, β は次式で与えられる Dunders[5] のパラメータである．

$$\alpha=\{(k_1+1)G_2/G_1-(k_2+1)\}/\{(k_1+1)G_2/G_1+(k_2+1)\}$$
$$\beta=\{(k_1-1)G_2/G_1-(k_2-1)\}/\{(k_1+1)G_2/G_1+(k_2+1)\} \quad \cdots\cdots(20)$$

さらに，

$$C_{p1}=-(1+p)+\cos 2p\theta_1+p\cdot\cos 2\theta_1$$
$$C_{m1}=p-1+\cos 2p\theta_1-p\cdot\cos 2\theta_1$$
$$S_{p1}=\sin 2p\theta_1+p\cdot\sin 2\theta_1$$
$$S_{m1}=\sin 2p\theta_1-p\cdot\sin 2\theta_1$$
$$C_{p2}=-(1+p)+\cos 2p\theta_2+p\cdot\cos 2\theta_2$$
$$C_{m2}=p-1+\cos 2p\theta_2-p\cdot\cos 2\theta_2$$
$$S_{p2}=\sin 2p\theta_2+p\cdot\sin 2\theta_2$$
$$S_{m2}=\sin 2p\theta_2-p\cdot\sin 2\theta_2 \quad \cdots\cdots(21)$$

特性方程式(19)の解のひとつとして，材料定数の組合せ，端部における開き角 θ_1, θ_2 に関係なく $p=1$ の解が存在する．

応力の特異性を表す指数 p を決定する特性方程式(19)は Bogy[3] や久保・大路[6] により導出されている一般化された平面ひずみ問題に対する特性方程式と一致する．

材質の異なる同一半径をもつ半無限弾性円柱が接合された場合について考える．この場合 $\theta_1=\theta_2=\pi/2$ であるので，特性方程式(19)は次式となる．

$$4p^2(p^2-1)\alpha^2+(2p^2+\cos p\pi-1)^2\beta^2$$
$$-4p^2(2p^2+\cos p\pi-1)\alpha\beta+\sin^2 p\pi=0 \cdots(22)$$

上式で $p=1-\gamma$ と置き換えれば，Agarwal[12] の結果と一致する．

応力の特異性の種類は Bogy[3] により次の4種類に分類されている．

（1） p が実数のとき　$O(r^{p-1})$

（2） p が複素数（$p=\xi+i\eta$）のとき　$O(r^{\xi-1}\cos(\eta\ln r))$　または　$O(r^{\xi-1}\sin(\eta\ln r))$

（3） D が $0<\mathrm{Re}(p)<1$ で零でなく，かつ $p=1$ で $dD/dp=0$ のとき　$O(\ln r)$

（4） D が $0<\mathrm{Re}(p)<1$ で零でなく，かつ $p=1$ で $dD/dp\neq0$ のとき　$O(1)$

分類からわかるように，特異性の出現・消失を含めた特異性の種類を論じるとき，$p=1$ で $dD/dp=0$ を求める必要がある．そこで，$p=1$ で $dD/dp=0$ の条件を求めると，特異性の出現・消失の遷移条件式は次式となる．

$$(1+\alpha)^2h_2+(1-\alpha)^2h_1+(1+\alpha)(1-\alpha)(h-h_1-h_2)$$
$$+(1+\alpha)(\beta-\alpha)g_1h_2-(1-\alpha)(\beta-\alpha)g_2h_1=0 \quad \cdots\cdots(23)$$

ただし，

$$g_i=2(1-\cos 2\theta_i)$$
$$h_i=-1+\cos 2\theta_i+\theta_i\sin 2\theta_i, \quad i=1,2$$
$$h=-1+\cos 2(\theta_1+\theta_2)+(\theta_1+\theta_2)\sin 2(\theta_1+\theta_2)$$

特異性の出現・消失の遷移条件式(23)は，一般化された平面ひずみ問題に対する遷移条件式[6] と一致する．

以上より，異種材料が三次元軸対称形で接合され，かつ接合部端で接合面と自由境界面が任意の角度で接合されている場合の応力特異性は平面ひずみ問題の場合と全く同一であることがわかる．

3. 結　論

異種材料が三次元軸対称形で接合され，かつ接合部端で接合面と自由境界面が任意の角度で接合されている場合の応力特異性について，三次元軸対称弾性理論に基づいて解析し，次の結論を得た．

（1） 応力の特異性のオーダを決定する特性方程式として式(19)を，特異性の出現・消失の遷移条件式として式(23)を導いた．

（2） 異種材料の三次元軸対称接合部の応力特異性のオーダを決定する特性方程式および特異性の出現・消失の遷移条件式は平面ひずみ問題の場合と同一である．

文　献

（1） Williams, M. L., *J. Appl. Mech.*, **19**-4(1952), 526.
（2） Bogy, D. B., *J. Appl. Mech.*, **35**-3(1968), 460.
（3） Bogy, D. B., *J. Appl. Mech.*, **38**-2(1971), 377.
（4） Bogy, D. B., *J. Appl. Mech.*, **42**-1(1975), 93.
（5） Dundurs, J., *J. Appl. Mech.*, **36**-3(1969), 650.
（6） 久保・大路, 機論, **57**-535, A(1991), 632.
（7） 笠野・松本, 日本接着協会誌, **21**-9(1985), 373.
（8） Westmann, R. A., *J. Appl. Mech.*, **35**-1(1968), 197.
（9） Keer, L. M. and Freeman, N. J., *J. Appl. Mech.*, **37**-4(1970), 959.
(10) Luco, J. E., *J. Appl. Mech.*, **43**-3(1976), 419.
(11) 松本・ほか3名, 機論, **50**-454, A(1984), 1174.
(12) Agarwal, V. K., *Int. J. Eng. Sci.*, **16**(1978), 985.
(13) 辻・ほか2名, 機論, **51**-463, A(1985), 638.