

539.313 : 539.4.013

内圧をうける円孔をもつ四角柱の応力集中に 及ぼす偶応力の影響*

竹内洋一郎**, 野田直剛**, 高橋清史***

1. 緒 言

流体圧をうける円孔をもつ正方形柱の応力集中問題は、古くより興味深い問題として、多くの研究がなされてきた。A. J. Durelli⁽¹⁾らは光弾性による実験的研究を発表し、P. D. Flynn⁽²⁾は、Durelliの検討を実験的に行なっている。一方理論解析では関谷⁽³⁾、川口⁽⁴⁾らの近似解法が発表され、これら両者の結果は前述の実験結果と比較検討されている⁽²⁾。さらに最近では大形電子計算機による近似理論解析の解として、T. Slot⁽⁵⁾が同一問題に対し、高精度の結果を出し、従来の諸結果と比較している。これらの解析結果は上述以外の他の理論解の結果を含めて、円孔の半径が、四角形の一辺の長さに対し1/4の場合、対角線方向の円孔べりにおける応力集中の大きさは、いずれの報告も大差がない。一方実験解析の結果はいくぶん低く現われている。さてR. D. Mindlin⁽⁶⁾は偶応力理論を用いて、円孔をもつ無限板の引張りの応力集中問題に対しても、実験解が解析解より緩和された値で出ることに対する一つの説明手段として、偶応力を考慮することにより、応力集中係数がかなり減少することを述べている⁽⁷⁾。本論文ではMindlinの偶応力に対する仮説を適用して、上記の流体圧をうける円孔をもつ正方形柱が、偶応力を考慮することにより同様な緩和をうけるかどうかを吟味し、この問題に対するDurelliらの実験解が解析解より応力集中が低く現われる一つの説明になるかどうかを検討した。解析方法はAiryの応力関数およびMindlinの偶応力関数の一般解中の未定係数を極座標系の辺点法を利用して決定する手法によった。

2. 解 析

現在多数の支持を受けているMindlinの偶応力理論を採用し、変位成分を u, v とすると、平面ひずみ

問題におけるひずみ成分 $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ 、曲率成分 K_x, K_y 、回転成分 ω_z はそれぞれ次式で表わされる†。

$$\epsilon_x = u_{,x}, \quad \epsilon_y = v_{,y}, \quad \gamma_{xy} = v_{,x} + u_{,y} \dots\dots\dots(1)$$

$$\omega_z = (v_{,x} - u_{,y})/2 \dots\dots\dots(2)$$

$$K_x = \omega_{z,x}, \quad K_y = \omega_{z,y} \dots\dots\dots(3)$$

またAiryの応力関数 ϕ 、Mindlinの応力関数 ψ による応力成分 $\sigma_{ij}(i, j = x, y)$ 、偶応力成分 μ_i は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \phi_{,yy} - \psi_{,xy}, & \sigma_{yy} &= \phi_{,xx} + \psi_{,xy} \\ \sigma_{xy} &= -\phi_{,xy} - \psi_{,yy}, & \sigma_{yx} &= -\phi_{,xy} + \psi_{,xx} \end{aligned} \right\} \dots\dots(4)$$

$$\mu_x = \psi_{,x}, \quad \mu_y = \psi_{,y} \dots\dots\dots(5)$$

ひずみおよび曲率の適合条件式を満足する上記応力関数の基礎微分方程式は次式で与えられる。

$$\Delta \Delta \phi = 0 \dots\dots\dots(6)$$

$$\Delta(\phi - l^2 \Delta \phi) = 0 \dots\dots\dots(7)$$

ただし、 G を剛性率とすると、

$$l^2 = B/G, \quad B = \mu_i/4K_i \dots\dots\dots(7)'$$

なお、共役関係式として次式が成立する。ただし、ポアソン比を ν とする。

$$\frac{\partial}{\partial x} (\phi - l^2 \Delta \phi) = -2l^2(1-\nu) \frac{\partial}{\partial y} \Delta \phi \dots\dots(8)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (\phi - l^2 \Delta \phi) = 2l^2(1-\nu) \frac{\partial}{\partial x} \Delta \phi \dots\dots(9)$$

重複連結領域において回転および変位が一価になるかわゆるMichellの条件式は、著者の前の論文⁽⁸⁾で誘導した式において、温度の項を除外すれば次式のようになる。

$$\oint \left\{ \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\Delta \phi}{2} \right) + (1-\nu) \frac{\partial}{\partial n} \Delta \phi \right\} ds = 0 \dots\dots(10)$$

$$\oint \left(x \frac{\partial}{\partial s} - y \frac{\partial}{\partial n} \right) \Delta \phi ds = 0 \dots\dots\dots(11)$$

$$\oint \left(x \frac{\partial}{\partial s} + y \frac{\partial}{\partial n} \right) \Delta \phi ds = 0 \dots\dots\dots(12)$$

ただし s は線要素、 n は法線要素、 L_i は円孔を含む任意の交差しない一周積分路、さて、本問の場合に対しては極座標系 (r, θ) による解析が穴べりの応力集中問題に対する考察につごうがよいから、極座標系で解析

* 昭和47年11月11日東北支部仙台地方講演会において講演、原稿受付昭和47年12月19日。
** 正員、静岡大学工学部(浜松市城北3-5-1)。
*** 学生員、静岡大学大学院。

† i は変数 i に関する偏微分を表わす。

することとして, まず応力および偶応力成分は式 (4), (5) を座標変換することにより次式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, & \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \\ \sigma_{r\theta} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \\ \sigma_{\theta r} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}, & \mu_r &= \frac{\partial \phi}{\partial r}, & \mu_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots(13)$$

式 (8) および (9) は

$$\frac{\partial}{\partial r} (\psi - l^2 \Delta \psi) = -2(1-\nu)l^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta \psi, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\psi - l^2 \Delta \psi) = 2(1-\nu)l^2 \frac{\partial}{\partial r} \Delta \psi \dots\dots(14)$$

$$\text{ただし, } \Delta = \partial^2 / \partial r^2 + r^{-1}(\partial / \partial r) + r^{-2}(\partial^2 / \partial \theta^2) \dots\dots(14)'$$

図 1 のように, a および b を定めて, つぎのように無次元化する.

$$r/a = \rho, \quad b/a = \rho_0, \quad l/a = l_0 \dots\dots(15)$$

このとき (ρ, θ) による式 (6) の関数 ϕ の一般解は次式となる.

$$\begin{aligned} \phi &= A_0 + B_0 \rho^2 + C_0 \ln \rho + D_0 \rho^2 \ln \rho + E_0 \theta + F_0 \theta \rho^2 + G_0 \theta \ln \rho + H_0 \theta \rho^2 \ln \rho + (A_1 \rho + B_1 \rho^{-1} \\ &\quad + C_1 \rho^3 + D_1 \rho \ln \rho) \cos \theta + (E_1 \rho + F_1 \rho^{-1} + G_1 \rho^3 + H_1 \rho \ln \rho) \sin \theta + \sum_{n=2}^{\infty} \{ (A_n \rho^n + B_n \rho^{-n} \\ &\quad + C_n \rho^{n+2} + D_n \rho^{-n+2}) \cos n\theta + (E_n \rho^n + F_n \rho^{-n} + G_n \rho^{n+2} + H_n \rho^{-n+2}) \sin n\theta \} \dots\dots(16) \end{aligned}$$

また, (ρ, θ) による式 (7) の関数 ψ の一般解は次式となる⁽⁸⁾.

$$\begin{aligned} \psi &= \bar{A}_0 + \bar{B}_0 \ln \rho + \bar{C}_0 \theta + \bar{D}_0 \theta \ln \rho + \bar{E}_0 I_0(\rho/l) + \bar{F}_0 K_0(\rho/l) + \sum_{n=1}^{\infty} [\{ \bar{A}_n \rho^n + \bar{B}_n \rho^{-n} \\ &\quad + \bar{C}_n I_n(\rho/l) + \bar{D}_n K_n(\rho/l) \} \cos n\theta + \{ \bar{E}_n \rho^n + \bar{F}_n \rho^{-n} + \bar{G}_n I_n(\rho/l) + \bar{H}_n K_n(\rho/l) \} \sin n\theta] \dots\dots(17) \end{aligned}$$

ただし I_n, K_n は変形ベッセル関数,

上の式 (16) および (17) 中に含まれる未知定数 $A_0, B_0, \dots\dots$ および $\bar{A}_0, \bar{B}_0, \dots\dots$ を境界条件, 共役条件, Michell の条件と, 図形の対称性を考慮して決定すればよい.

まず図形および, 応力の対称性より本問題の場合 φ, ψ 関数の形は, つぎのような形をとらねばならない. 係数は改めて別の記号を採用して書けば

$$\phi = B_0 \rho^2 + C_0 \ln \rho + D_0 \rho^2 \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} (A_{4n} \rho^{4n} + B_{4n} \rho^{-4n} + C_{4n} \rho^{4n+2} + D_{4n} \rho^{-4n+2}) \cos 4n\theta \dots\dots(18)$$

$$\psi = E_0 \theta + \sum_{n=1}^{\infty} \{ E_{4n} \rho^{4n} + F_{4n} \rho^{-4n} + G_{4n} I_{4n}(\rho/l) + H_{4n} K_{4n}(\rho/l) \} \sin 4n\theta \dots\dots(19)$$

つぎに境界条件は

$$\begin{aligned} (\sigma_{rr})_{\rho=1} &= -P, \quad (\sigma_{r\theta})_{\rho=1} = 0, \quad (\mu_r)_{\rho=1} = 0 \\ &\quad \text{(内孔周上)} \dots\dots(20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\sigma_{xx})_{x=\rho_0} &= 0, \quad (\sigma_{xy})_{x=\rho_0} = 0, \quad (\mu_x)_{x=\rho_0} = 0 \\ &\quad \text{(外部直線境界上)} \dots\dots(21) \end{aligned}$$

式 (18) および (19) の極座標系の解は, 式 (20) の境界条件が極座標表示であるから, 内側境界条件は正確に合わせることはできるが, 外側境界条件は直角座標成分であるため, 境界上に無数の多くの点を取り, 満足させることを考えねばならない. しかしこのことは多大の労力を要するから, 十分の近似性が得られるように式 (18) および (19) 中の \sum を有限項で打ち切り \sum_N とし, 未知係数の数を有限個にし, この係数を決定する条件式として, 境界上の有限個の辺点上で, 外側境界条件と合わせて解析しても, 実験解と十分一致することが, 偶応力を考慮しない弾性問題で証明され

ている. また事実このようにして決定された解を用いて, 採用されなかった辺点上で式 (21) の境界条件が満足されているかどうかを吟味することにより, 実験解との対照を待つまでもなく, この解析法の精度が吟

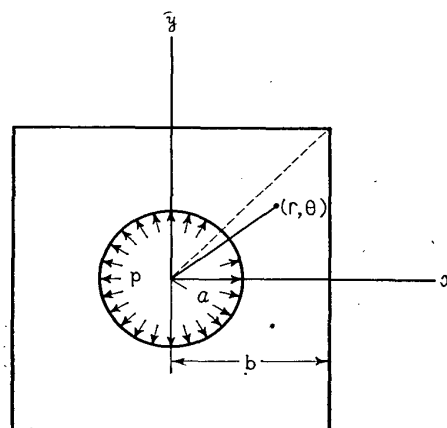


図 1 流体圧をうける円孔をもつ正四角柱

味されうる。いま境界条件, 共役関係, Michell の条件を考慮すれば係数間の関係として次式が得られる。

$$D_0=0, 2B_0+C_0=-1, E_{4n}=8(1-\nu)l_0^2(4n+1)C_{4n}, F_{4n}=-8(1-\nu)l_0^2(-4n+1)D_{4n} \dots (22)$$

$$d_1D_{4n}+g_1G_{4n}+h_1H_{4n}=\alpha, d_2D_{4n}+g_2G_{4n}+h_2H_{4n}=\beta, d_3D_{4n}+g_3G_{4n}+h_3H_{4n}=\gamma \dots (23)$$

ただし,

$$\alpha=a_1A_{4n}-b_1B_{4n}-c_1C_{4n}, \beta=-a_1A_{4n}-b_1B_{4n}-c_2C_{4n}, \gamma=-c_3C_{4n} \dots (24)$$

また $a_1, b_1, c_1, d_1, \dots$ は次式の関係より決定される。

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= 4n(4n-1), b_1 = -4n(4n+1), c_1 = (8n+2)(-2n+1) + 32nl_0^2(1-\nu)(1-16n^2) \\ d_1 &= (-8n+2)(2n+1) - 32nl_0^2(1-\nu)(1-16n^2) \\ g_1 &= 4n \left\{ I_{4n} \left(\frac{1}{l_0} \right) - \frac{1}{2l_0} I_{4n-1} \left(\frac{1}{l_0} \right) - \frac{1}{2l_0} I_{4n+1} \left(\frac{1}{l_0} \right) \right\} \\ h_1 &= 4n \left\{ \frac{1}{2l_0} K_{4n-1} \left(\frac{1}{l_0} \right) + \frac{1}{2l_0} K_{4n+1} \left(\frac{1}{l_0} \right) + K_{4n} \left(\frac{1}{l_0} \right) \right\} \\ c_2 &= 4n(4n+1) - 32nl_0^2(1-\nu)(1-16n^2), d_2 = 4n(-4n+1) - 32nl_0^2(1-\nu)(1-16n^2) \\ g_2 &= \left\{ 16n^2 I_{4n} \left(\frac{1}{l_0} \right) - \frac{1}{2l_0} I_{4n-1} \left(\frac{1}{l_0} \right) - \frac{1}{2l_0} I_{4n+1} \left(\frac{1}{l_0} \right) \right\} \\ h_2 &= \left\{ \frac{1}{2l_0} K_{4n-1} \left(\frac{1}{l_0} \right) + \frac{1}{2l_0} K_{4n+1} \left(\frac{1}{l_0} \right) + 16n^2 K_{4n} \left(\frac{1}{l_0} \right) \right\}, c_3 = 32nl_0^2(1-\nu)(4n+1) \\ d_3 &= 32l_0^2(1-\nu)(-4n+1), g_3 = \left\{ \frac{1}{2l_0} I_{4n-1} \left(\frac{1}{l_0} \right) + \frac{1}{2l_0} I_{4n+1} \left(\frac{1}{l_0} \right) \right\} \\ h_3 &= - \left\{ \frac{1}{2l_0} K_{4n-1} \left(\frac{1}{l_0} \right) + \frac{1}{2l_0} K_{4n+1} \left(\frac{1}{l_0} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \dots (25)$$

かくして D_{4n}, G_{4n}, H_{4n} を式 (23) より A_{4n}, B_{4n}, C_{4n} の関数として解くことができる。結局すべての係数はつぎのように $B_0, A_{4n}, B_{4n}, C_{4n}$ で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= -1 - 2B_0, D_{4n} = \alpha_{1n}A_{4n} + \beta_{1n}B_{4n} + \gamma_{1n}C_{4n}, E_{4n} = 8(1-\nu)l_0^2(4n+1)C_{4n} \\ F_{4n} &= -8(1-\nu)l_0^2(-4n+1)(\alpha_{1n}A_{4n} + \beta_{1n}B_{4n} + \gamma_{1n}C_{4n}) \\ G_{4n} &= \alpha_{2n}A_{4n} + \beta_{2n}B_{4n} + \gamma_{2n}C_{4n}, H_{4n} = \alpha_{3n}A_{4n} + \beta_{3n}B_{4n} + \gamma_{3n}C_{4n} \end{aligned} \right\} \dots (26)$$

ただし, $\alpha_{1n}, \beta_{1n}, \gamma_{1n}, \alpha_{2n}, \dots$ は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{1n} &= \beta_{1n} = \gamma_{1n} = -1, \alpha_{2n} = \{d_3(h_1+h_2) - h_3(d_1+d_2)\}a_1/\bar{D}, \beta_{2n} = \{d_3(h_1-h_2) - h_3(d_1-d_2)\}b_1/\bar{D} \\ \gamma_{2n} &= \{(d_2h_3 - d_3h_2)c_1 + (d_3h_1 - d_1h_3)c_2 + (d_1h_2 - d_2h_1)c_3\}/\bar{D} \\ \alpha_{3n} &= \{g_3(d_1+d_2) - d_3(g_1+g_2)\}a_1/\bar{D}, \beta_{3n} = \{g_3(d_1-d_2) - d_3(g_1-g_2)\}b_1/\bar{D} \\ \gamma_{3n} &= \{(d_3g_2 - d_2g_3)c_1 + (d_1g_3 - d_3g_1)c_2 + (d_2g_1 - d_1g_2)c_3\}/\bar{D}, \bar{D} = 16n^2(16n^2-1) \end{aligned} \right\} \dots (27)$$

ただし, $\alpha_{1n}, \beta_{1n}, \gamma_{1n}$ および \bar{D} を計算するさいには変形ベッセル関数に関する公式を適用した。残りの係数 $B_0, A_{4n}, B_{4n}, C_{4n}$ は外側境界条件より決定する。外側境界条件は $x-y$ 座標系で表わされているので, 式 (13) を無次元応分表示に直した後, $x-y$ 座標系表示の応力に直し, 境界条件より係数 $B_0, A_{4n}, B_{4n}, C_{4n}$ は決定される。決定された係数を用いて無次元化された応力成分を表示すれば

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^* &= -\rho^{-2} + 2(1-\rho^{-2})B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{1n}A_{4n} + g_{1n}B_{4n} + h_{1n}C_{4n}) \cos 4n\theta \\ \sigma_{\theta\theta}^* &= \rho^{-2} + 2(1-\rho^{-2})B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{2n}A_{4n} + g_{2n}B_{4n} + h_{2n}C_{4n}) \cos 4n\theta \\ \sigma_{\rho\theta}^* &= \sum_{n=1}^{\infty} (f_{3n}A_{4n} + g_{3n}B_{4n} + h_{3n}C_{4n}) \sin 4n\theta, \sigma_{\theta\rho}^* = \sum_{n=1}^{\infty} (f_{4n}A_{4n} + g_{4n}B_{4n} + h_{4n}C_{4n}) \sin 4n\theta \\ \mu_{\rho}^* &= \sum_{n=1}^{\infty} (f_{5n}A_{4n} + g_{5n}B_{4n} + h_{5n}C_{4n}) \sin 4n\theta, \mu_{\theta}^* = \sum_{n=1}^{\infty} (f_{6n}A_{4n} + g_{6n}B_{4n} + h_{6n}C_{4n}) \cos 4n\theta \end{aligned} \right\} \dots (28)$$

ただし, 式 (28) で用いた記号 f, g, h は ρ の関数であり, その内容は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} f_{1n} &= 4n(1-4n)\rho^{4n-2} - 32nl_0^2(1-\nu)(1-16n^2)\alpha_{1n}\rho^{-4n-2} + (-8n+2)(2n+1)\rho^{-4n}\alpha_{1n} \\ &\quad - 4n\rho^{-1} \left\{ \frac{1}{2l_0} I_{4n-1} \left(\frac{\rho}{l_0} \right) + \frac{1}{2l_0} I_{4n+1} \left(\frac{\rho}{l_0} \right) \right\} \alpha_{2n} + 4n\rho^{-1} \left\{ \frac{1}{2l_0} K_{4n-1} \left(\frac{\rho}{l_0} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2l_0} K_{4n+1} \left(\frac{\rho}{l_0} \right) \right\} \alpha_{3n} + 4n\rho^{-2} I_{4n} \left(\frac{\rho}{l_0} \right) \alpha_{2n} + 4n\rho^{-2} K_{4n} \left(\frac{\rho}{l_0} \right) \alpha_{3n} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
g_{1n} &= -4n(1+4n)\rho^{-4n-2} - 32nl_0^2(1-16n^2)(1-\nu)\beta_{1n}\rho^{-4n-2} + (-8n+2)(2n+1)\beta_{1n}\rho^{-4n} \\
&\quad - 4n\rho^{-1}\left\{\frac{1}{2l_0}I_{4n-1}\left(\frac{\rho}{l_0}\right) + \frac{1}{2l_0}I_{4n+1}\left(\frac{\rho}{l_0}\right)\right\}\beta_{2n} + 4n\rho^{-1}\left\{\frac{1}{2l_0}K_{4n-1}\left(\frac{\rho}{l_0}\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2l_0}K_{4n+1}\left(\frac{\rho}{l_0}\right)\right\}\beta_{3n} + 4n\rho^{-2}I_{4n}\left(\frac{\rho}{l_0}\right)\beta_{2n} + 4n\rho^{-2}K_{4n}\left(\frac{\rho}{l_0}\right)\beta_{3n} \\
h_{1n} &= 32nl_0^2(1-\nu)(1-16n^2)\rho^{4n-2} - 32nl_0^2(1-\nu)(1-16n^2)\gamma_{1n}\rho^{-4n-2} + (8n+2)(-2n \\
&\quad + 1)\rho^{4n} + (-8n+2)(2n+1)\gamma_{1n}\rho^{-4n} - 4n\rho^{-1}\left\{\frac{1}{2l_0}I_{4n-1}\left(\frac{\rho}{l_0}\right) + \frac{1}{2l_0}I_{4n+1}\left(\frac{\rho}{l_0}\right)\right\}\gamma_{2n} \\
&\quad + 4n\rho^{-1}\left\{\frac{1}{2l_0}K_{4n-1}\left(\frac{\rho}{l_0}\right) + \frac{1}{2l_0}K_{4n+1}\left(\frac{\rho}{l_0}\right)\right\}\gamma_{3n} + 4n\rho^{-2}I_{4n}\left(\frac{\rho}{l_0}\right)\gamma_{2n} + 4n\rho^{-2}K_{4n}\left(\frac{\rho}{l_0}\right)\gamma_{3n} \\
f_{2n} &= 4n(4n-1)\rho^{4n-2} + 32nl_0^2(1-\nu)(1-16n^2)\alpha_{1n}\rho^{-4n-2} + (-4n+2)(-4n+1)\alpha_{1n}\rho^{-4n} \\
&\quad + 4n\rho^{-1}\left\{\frac{1}{2l_0}I_{4n-1}\left(\frac{\rho}{l_0}\right) + \frac{1}{2l_0}I_{4n+1}\left(\frac{\rho}{l_0}\right)\right\}\alpha_{2n} - 4n\rho^{-1}\left\{\frac{1}{2l_0}K_{4n-1}\left(\frac{\rho}{l_0}\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2l_0}K_{4n+1}\left(\frac{\rho}{l_0}\right)\right\}\alpha_{3n} - 4n\rho^{-2}I_{4n}\left(\frac{\rho}{l_0}\right)\alpha_{2n} - 4n\rho^{-2}K_{4n}\left(\frac{\rho}{l_0}\right)\alpha_{3n} \\
g_{2n} &= 4n(4n+1)\rho^{-4n-2} + 32nl_0^2(1-\nu)(1-16n^2)\beta_{1n}\rho^{-4n-2} + (-4n+2)(-4n+1)\beta_{1n}\rho^{-4n} \\
&\quad + 4n\rho^{-1}\left\{\frac{1}{2l_0}I_{4n-1}\left(\frac{\rho}{l_0}\right) + \frac{1}{2l_0}I_{4n+1}\left(\frac{\rho}{l_0}\right)\right\}\beta_{2n} - 4n\rho^{-1}\left\{\frac{1}{2l_0}K_{4n-1}\left(\frac{\rho}{l_0}\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2l_0}K_{4n+1}\left(\frac{\rho}{l_0}\right)\right\}\beta_{3n} - 4n\rho^{-2}I_{4n}\left(\frac{\rho}{l_0}\right)\beta_{2n} - 4n\rho^{-2}K_{4n}\left(\frac{\rho}{l_0}\right)\beta_{3n} \\
h_{2n} &= -32nl_0^2(1-\nu)(1-16n^2)\rho^{4n-2} + 32nl_0^2(1-\nu)(1-16n^2)\gamma_{1n}\rho^{-4n-2} + (4n+2)(4n+1)\rho^{4n} \\
&\quad + (-4n+2)(-4n+1)\gamma_{1n}\rho^{-4n} + 4n\rho^{-1}\left\{\frac{1}{2l_0}I_{4n-1}\left(\frac{\rho}{l_0}\right) + \frac{1}{2l_0}I_{4n+1}\left(\frac{\rho}{l_0}\right)\right\}\gamma_{2n} \\
&\quad - 4n\rho^{-1}\left\{\frac{1}{2l_0}K_{4n-1}\left(\frac{\rho}{l_0}\right) + \frac{1}{2l_0}K_{4n+1}\left(\frac{\rho}{l_0}\right)\right\}\gamma_{3n} - 4n\rho^{-2}I_{4n}\left(\frac{\rho}{l_0}\right)\gamma_{2n} - 4n\rho^{-2}K_{4n}\left(\frac{\rho}{l_0}\right)\gamma_{3n} \\
f_{3n} &= 4n(4n-1)\rho^{4n-2} - 32nl_0^2(1-\nu)(1-16n^2)\alpha_{1n}\rho^{-4n-2} + 4n(-4n+1)\alpha_{1n}\rho^{-4n} \\
&\quad - \rho^{-1}\left\{\frac{1}{2l_0}I_{4n-1}\left(\frac{\rho}{l_0}\right) + \frac{1}{2l_0}I_{4n+1}\left(\frac{\rho}{l_0}\right)\right\}\alpha_{2n} + \rho^{-1}\left\{\frac{1}{2l_0}K_{4n-1}\left(\frac{\rho}{l_0}\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2l_0}K_{4n+1}\left(\frac{\rho}{l_0}\right)\right\}\alpha_{3n} + 16n^2\rho^{-2}I_{4n}\left(\frac{\rho}{l_0}\right)\alpha_{2n} + 16n^2\rho^{-2}K_{4n}\left(\frac{\rho}{l_0}\right)\alpha_{3n} \\
g_{3n} &= -4n(4n+1)\rho^{-4n-2} - 32nl_0^2(1-\nu)(1-16n^2)\beta_{1n}\rho^{-4n-2} + 4n(-4n+1)\beta_{1n}\rho^{-4n} \\
&\quad - \rho^{-1}\left\{\frac{1}{2l_0}I_{4n-1}\left(\frac{\rho}{l_0}\right) + \frac{1}{2l_0}I_{4n+1}\left(\frac{\rho}{l_0}\right)\right\}\beta_{2n} + \rho^{-1}\left\{\frac{1}{2l_0}K_{4n-1}\left(\frac{\rho}{l_0}\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2l_0}K_{4n+1}\left(\frac{\rho}{l_0}\right)\right\}\beta_{3n} + 16n^2\rho^{-2}I_{4n}\left(\frac{\rho}{l_0}\right)\beta_{2n} + 16n^2\rho^{-2}K_{4n}\left(\frac{\rho}{l_0}\right)\beta_{3n} \\
h_{3n} &= -32nl_0^2(1-\nu)(1-16n^2)\rho^{4n-2} - 32nl_0^2(1-\nu)(1-16n^2)\gamma_{1n}\rho^{-4n-2} + 4n(4n+1)\rho^{4n} \\
&\quad + 4n(-4n+1)\gamma_{1n}\rho^{-4n} - \rho^{-1}\left\{\frac{1}{2l_0}I_{4n-1}\left(\frac{\rho}{l_0}\right) + \frac{1}{2l_0}I_{4n+1}\left(\frac{\rho}{l_0}\right)\right\}\gamma_{2n} \\
&\quad + \rho^{-1}\left\{\frac{1}{2l_0}K_{4n-1}\left(\frac{\rho}{l_0}\right) + \frac{1}{2l_0}K_{4n+1}\left(\frac{\rho}{l_0}\right)\right\}\gamma_{3n} + 16n^2\rho^{-2}I_{4n}\left(\frac{\rho}{l_0}\right)\gamma_{2n} + 16n^2\rho^{-2}K_{4n}\left(\frac{\rho}{l_0}\right)\gamma_{3n} \\
f_{4n} &= 4n(4n-1)\rho^{4n-2} - 32nl_0^2(1-\nu)(1-16n^2)\alpha_{1n}\rho^{-4n-2} + 4n(-4n+1)\alpha_{1n}\rho^{-4n} \\
&\quad + \left\{\frac{1}{4l_0^2}I_{4n-2}\left(\frac{\rho}{l_0}\right) + \frac{1}{2l_0^2}I_{4n}\left(\frac{\rho}{l_0}\right) + \frac{1}{4l_0^2}I_{4n+2}\left(\frac{\rho}{l_0}\right)\right\}\alpha_{2n} \\
&\quad + \left\{\frac{1}{4l_0^2}K_{4n-2}\left(\frac{\rho}{l_0}\right) + \frac{1}{2l_0^2}K_{4n}\left(\frac{\rho}{l_0}\right) + \frac{1}{4l_0^2}K_{4n+2}\left(\frac{\rho}{l_0}\right)\right\}\alpha_{3n} \\
g_{4n} &= -4n(n+1)\rho^{-4n-2} - 32nl_0^2(1-\nu)(1-16n^2)\beta_{1n}\rho^{-4n-2} + 4n(-4n+1)\beta_{1n}\rho^{-4n} \\
&\quad + \left\{\frac{1}{4l_0^2}I_{4n-2}\left(\frac{\rho}{l_0}\right) + \frac{1}{2l_0^2}I_{4n}\left(\frac{\rho}{l_0}\right) + \frac{1}{4l_0^2}I_{4n+2}\left(\frac{\rho}{l_0}\right)\right\}\beta_{2n}
\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
 h_{4n} &= -32nl_0^2(1-\nu)(1-16n^2)\rho^{-4n-2} - 32nl_0^2(1-\nu)(1-16n^2)\gamma_{1n}\rho^{-4n-2} + 4n(4n+1)\rho^{4n} \\
 &\quad + 4n(-4n+1)\gamma_{1n}\rho^{-4n} + \left\{ \frac{1}{4l_0^2} I_{4n-2}\left(\frac{\rho}{l_0}\right) + \frac{1}{2l_0^2} I_{4n}\left(\frac{\rho}{l_0}\right) + \frac{1}{4l_0^2} I_{4n+2}\left(\frac{\rho}{l_0}\right) \right\} \gamma_{2n} \\
 &\quad + \left\{ \frac{1}{4l_0^2} K_{4n-2}\left(\frac{\rho}{l_0}\right) + \frac{1}{2l_0^2} K_{4n}\left(\frac{\rho}{l_0}\right) + \frac{1}{4l_0^2} K_{4n+2}\left(\frac{\rho}{l_0}\right) \right\} \gamma_{3n} \\
 f_{5n} &= 32nl_0^2(1-\nu)(-4n+1)\alpha_{1n}\rho^{-4n-1} \\
 &\quad + \left\{ \frac{1}{2l_0} I_{4n-1}\left(\frac{\rho}{l_0}\right) + \frac{1}{2l_0} I_{4n+1}\left(\frac{\rho}{l_0}\right) \right\} \alpha_{2n} - \left\{ \frac{1}{2l_0} K_{4n-1}\left(\frac{\rho}{l_0}\right) + \frac{1}{2l_0} K_{4n+1}\left(\frac{\rho}{l_0}\right) \right\} \alpha_{3n} \\
 g_{5n} &= 32nl_0^2(1-\nu)(-4n+1)\beta_{1n}\rho^{-4n-1} \\
 &\quad + \left\{ \frac{1}{2l_0} I_{4n-1}\left(\frac{\rho}{l_0}\right) + \frac{1}{2l_0} I_{4n+1}\left(\frac{\rho}{l_0}\right) \right\} \beta_{2n} - \left\{ \frac{1}{2l_0} K_{4n-1}\left(\frac{\rho}{l_0}\right) + \frac{1}{2l_0} K_{4n+1}\left(\frac{\rho}{l_0}\right) \right\} \beta_{3n} \\
 h_{5n} &= 32nl_0^2(1-\nu)(4n+1)\rho^{4n-1} + 32nl_0^2(1-\nu)(-4n+1)\gamma_{1n}\rho^{-4n-1} \\
 &\quad + \gamma_{2n} \left\{ \frac{1}{2l_0} I_{4n-1}\left(\frac{\rho}{l_0}\right) + \frac{1}{2l_0} I_{4n+1}\left(\frac{\rho}{l_0}\right) \right\} - \left\{ \frac{1}{2l_0} K_{4n-1}\left(\frac{\rho}{l_0}\right) + \frac{1}{2l_0} K_{4n+1}\left(\frac{\rho}{l_0}\right) \right\} \gamma_{3n} \\
 f_{6n} &= -32nl_0^2(1-\nu)(-4n+1)\alpha_{1n}\rho^{-4n-1} + 4n\rho^{-1}I_{4n}\left(\frac{\rho}{l_0}\right)\alpha_{2n} + 4n\rho^{-1}K_{4n}\left(\frac{\rho}{l_0}\right)\alpha_{3n} \\
 g_{6n} &= -32nl_0^2(1-\nu)(-4n+1)\beta_{1n}\rho^{-4n-1} + 4n\rho^{-1}I_{4n}\left(\frac{\rho}{l_0}\right)\beta_{2n} + 4n\rho^{-1}K_{4n}\left(\frac{\rho}{l_0}\right)\beta_{3n} \\
 h_{6n} &= 32nl_0^2(1-\nu)(4n+1)\rho^{4n-1} \\
 &\quad - 32nl_0^2(1-\nu)(-4n+1)\gamma_{1n}\rho^{-4n-1} + 4n\rho^{-1}I_{4n}\left(\frac{\rho}{l_0}\right)\gamma_{2n} + 4n\rho^{-1}K_{4n}\left(\frac{\rho}{l_0}\right)\gamma_{3n}
 \end{aligned}$$

3. 数値計算および結果

本研究では式 (26) の未知定数を辺点法で決定するに当たって、正方形の一辺の半分の上で 11 点を採用し、最小二乗法により決定する方法を採用した。なお

計算に当たっては京都大学および名古屋大学の大型電子計算機センターの FACOM を利用した。実際の数値計算は

$$\rho_0 : 1.5, 2.0, 2.5, 3.0$$

$$\nu : 0.5, 0.3, 0.0$$

$$l_0 : 1.0, 0.7, 0.5, 0.2$$

の各場合について実行し、それらの結果を図 2~14 に

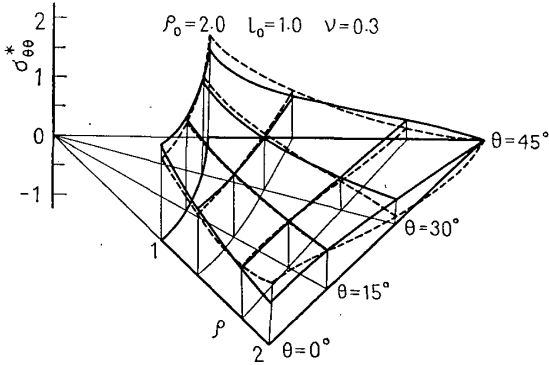


図 2 $\sigma_{\theta\theta}$ の分布立体図

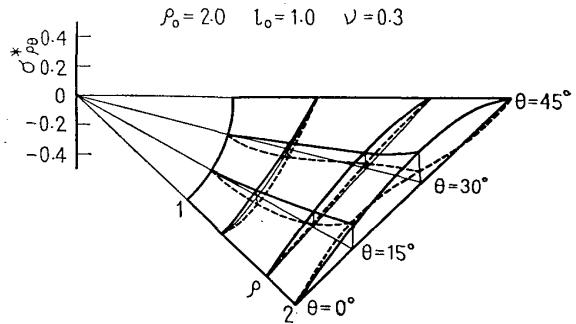


図 4 $\sigma_{\rho\rho}$ の分布立体図

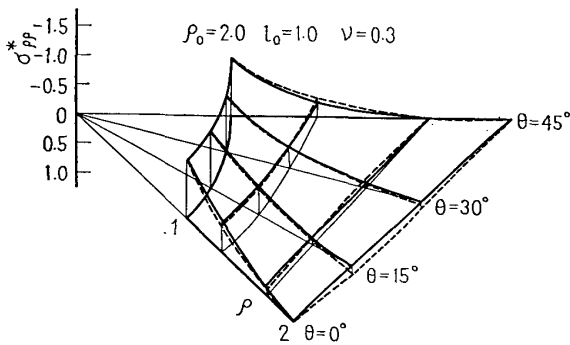


図 3 $\sigma_{\rho\rho}$ の分布立体図

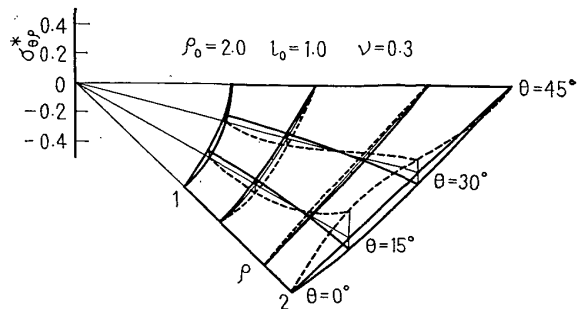


図 5 $\sigma_{\theta\theta}$ の分布立体図

無次元表示で示した. すなわち,

$$\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}/p, \quad \mu_i^* = \mu_i/pa \quad (i, j = \rho, \theta)$$

図2以下においては点線は偶応力を考慮しない場合の

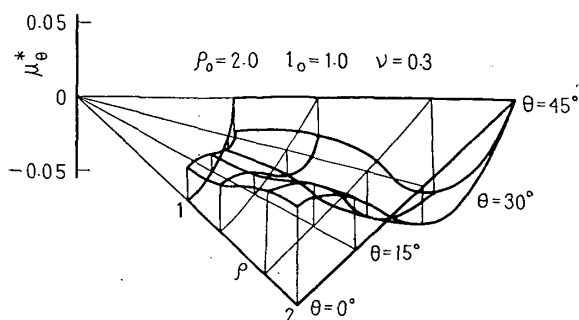


図6 μ_θ の分布立体図

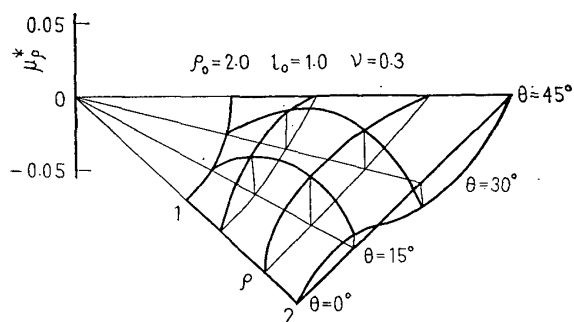


図7 μ_ρ の分布立体図

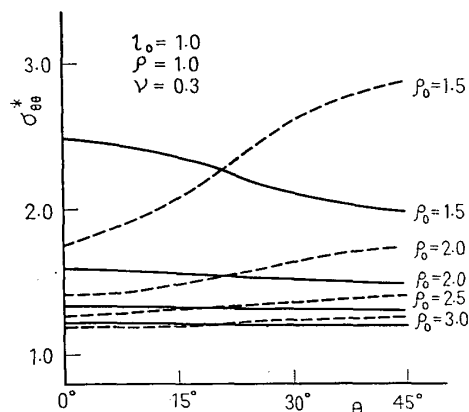


図8 種々の ρ_0 に対する穴周辺上の $\sigma_{\theta\theta}$ の分布

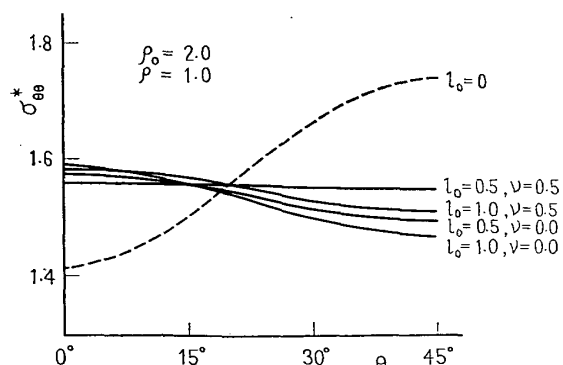


図9 $b/a=2.0$ のとき, 穴周辺上の $\sigma_{\theta\theta}$ の分布

結果を示している. これらの結果は従来の結果と別に本研究において新しく計算し直した. 図2~7は代表例として $\rho_0=2.0, l_0=1.0, \nu=0.3$ の場合に対して, 応力および偶応力成分の分布の波形図を示す. 図8は ρ_0 以外は上と同一データの形状に対し, $\rho=1$ すなわち穴周辺上のフープ応力 $\sigma_{\theta\theta}$ が, 穴の大小すなわち ρ_0 によっていかに変化するかを示すものである. 図よりわかることは偶応力を考慮すれば, ρ_0 が大きい値を除いてフープ応力の最大値の位置は円孔の周辺上で, $\theta=45^\circ$ から逆に $\theta=0^\circ$ の位置に移っていることである. 図9は穴の大きさを固定し, 穴周辺上でフープ応力が新材料定数 l_0 , とポアソン比 ν により, いかに変化するかを示すものである. つぎに偶応力を考慮することにより, 穴周辺の応力集中がいかに緩和されるかを見ると, 図10において $\rho_0=3.0, \nu=0.5$ において $l_0=0$ すなわち偶応力を考慮しないときは $\theta=45^\circ$ で $(\sigma_{\theta\theta})^*_{\max}=1.256$ であるが, $l_0=0.2$ で1.241となり, 約1.2%, $l_0=0.5$ で $(\sigma_{\theta\theta})^*_{\max}=1.223$ となり, 約2.6%, $l_0=0.7$ で $(\sigma_{\theta\theta})^*_{\max}=1.217$ となり, 約3.1%の緩和が見られる. なお, この場合は最大フープ応力は $l_0=1$ の場合を除いて偶応力を考慮しても $\theta=45^\circ$ で生じている. また図11のように同じ $\rho_0=3$ の穴のサイズで, $l_0=0.2$ を固定としたとき, ν の変化で穴周辺上の応力の変化を調べたものであり, $\nu=0.3$ のときで最大応力の緩和度は $\theta=45^\circ$ で約1.5%である. 図12は $\theta=0^\circ$ 軸上のフープ応力の変化を調べたものである.

上記の最大応力の位置の変化などでも, 新材料定数が大きい値になるほど, 偶応力の影響が著しいことがわかる. すなわち $l_0=1$ のように偶応力の影響が誇張

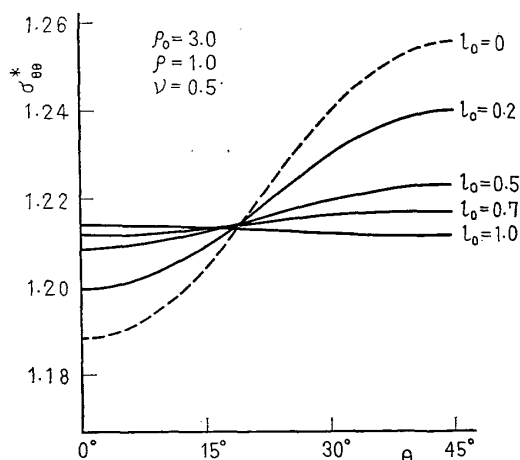


図10 $b/a=3, \nu=0.5$ のとき穴周辺応力 $\sigma_{\theta\theta}$ の分布

* $l_0=0$ のときは, ν に関係しないから $\nu=0.5$ とかぎらない.

された場合になると応力集中の位置は ρ_0 を大きくしても $\theta=45^\circ$ から $\theta=0^\circ$ に移っている。図 13 は $\theta=0^\circ$ と $\theta=45^\circ$ の穴周辺上のフープ応力の応力集中と穴半径の関係を示すものである。図 14 はやはり穴周辺の応力集中と $1/l_0$ の関係を示す。図の右端は $1/l_0 \rightarrow \infty$ のとき、すなわち偶応力の考慮のない場合の値を示している。

4. 結 論

従来から実用性の多い問題として多くの報告のある、流体圧をうける円孔をもつ正方形領域の応力集中問題において、偶応力を考慮すれば大きい影響が現われることを解析結果として示した。特に $l_0=1$ のよう

に l が大きくなるとその影響が著しく現われ、応力集中の緩和度は大きく、また最大フープ応力の位置も ρ_0 の値に関せず穴周辺上の $\theta=45^\circ$ より $\theta=0^\circ$ に移る。 $l_0=1$ の値は現実的でないかもしれないが、従来の報告にも偶応力の影響を誇張するため採用され、また実際に穴半径がきわめて小さいとき実現が必ずしも不可能ではない。なお、この緩和度がはたして従来の古典理論と実験結果の食い違いの差に相当するかどうかは、Durelli らの実験結果の報告に数値記入が無いため比較検討できないが、たとえもし合致してもこれは必ずしも偶応力の影響であると断定できない。これは偶応力理論がまだ新しい学説であり、実験的に確かめられた報告が見当たらないからである。しかし解析理論として、微小要素において境界面で力とモーメントを平行して論ずることはまちがっていないと考えられるから、将来の発展が望まれる理論と思う。

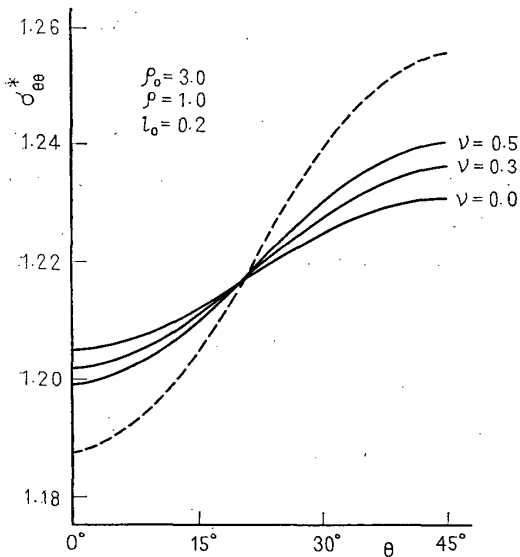


図 11 $l_0=0.2, b/a=3.0$ のとき、穴周辺応力 $\sigma_{\theta\theta}$ の分布

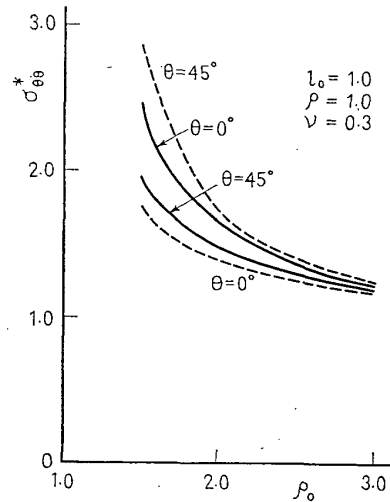


図 13 $\theta=0^\circ, 45^\circ$ の $\sigma_{\theta\theta}$ と ρ_0 の関係

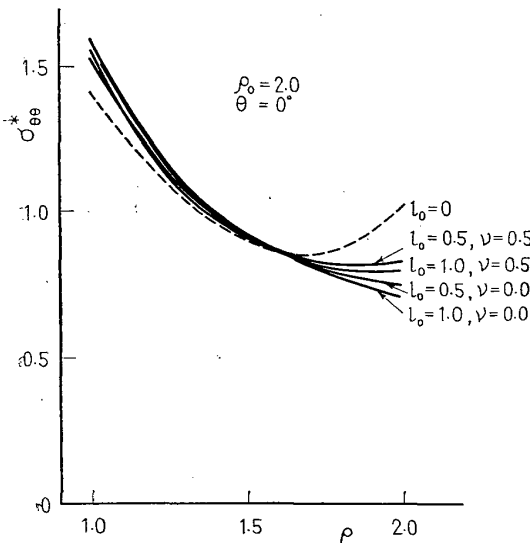


図 12 $\theta=0^\circ$ の軸上の $\sigma_{\theta\theta}$ の分布

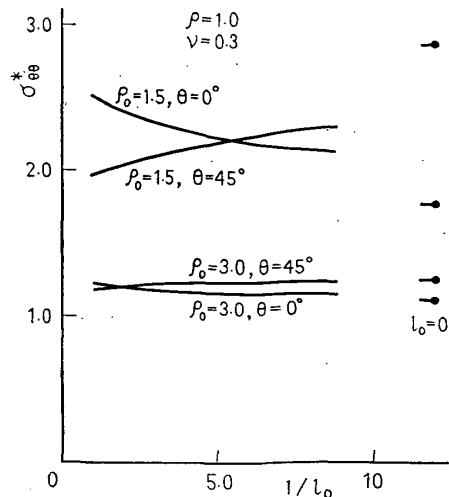


図 14 $\theta=0^\circ, 45^\circ$ の $\sigma_{\theta\theta}$ と l の関係

文 献

- (1) Durelli, A.J. and Barriage, J., *J. Appl. Mech.*, **22**-4 (1955-12), 539.
 (2) Flynn, P.D., *Trans. ASME, Ser. E*, **26**-1 (1959-3), 150.
 (3) Sekiya, T., *Proc. 5th Japan Nat. Congr. Appl.*

- Mech.*, (1955), 95.
 (4) 川口, 機論, **18**-65 (昭 27), 36.
 (5) Slot, T., *Nucl. Engng. & Des.*, **5** (1967), 142.
 (6) Mindlin, R.D. and Tiersten, H.F., *Arch. Rat. Mech.*, **11**-5 (1962), 415.
 (7) Mindlin, R.D., *Exp. Mech.*, **3**-1 (1963), 1.
 (8) 竹内・山里, 機論, **38**-310 (昭 47-6), 1201.

討 論

〔質問〕 渥美 光 (東北大学工学部)

マイクロポーラ理論 (標構の回転を変形材料の局所的な回転とは独立に与える) による計算値のほうが, 偶応力理論によるものよりも, 円孔まわりの応力集中に対する古典解とのずれが小さく, 実験値と比較できる程度と述べられている(付1).

本報の目的のためには, マイクロポーラ理論によるほうが良いのではないかと考える.

〔回答〕 ご指摘のご意見にはまったく同感である. ただマイクロポーラ理論を採用すれば, いわゆる新材料定数が, 偶応力理論に比べてさらに一つ増加するため, 解析的に少しめんどろになることと, まだ実験測定手段の確立されていない新材料定数を2種類仮定することになり, 機械学会にどの程度受け入れられるかを考慮した. 本研究の場合同様な解析法によりマイクロポーラ理論による解析は可能であることはいうまでもなく, その解析結果が出たとき, 二つの新材料定数の比が1になる特別の場合が, 本報告の結果と一致するといえる.

なお熱応力問題に対しては同一形状の問題について, マイクロポーラ理論を採用して解析したものが, マイクロポーラ熱弾性理論の研究のさかんなポーランドの *Arch. Mech. Stosw.* に近く掲載される予定である(付2)が, 流体圧の場合については, まだ研究をもっか実行している段階である.

〔質問〕 関谷 壮 (大阪府立大学工学部)

式(10)中にポアソン比を含むため, 応力はポアソ

ン比に依存するが, 重複連結領域の古典二次元弾性論では, 各境界ごとに外力が独立につりあっているれば応力はポアソン比に関係しない(付3). ポアソン比が異なる種々の材料について実験したとき偶応力理論と同傾向のポアソン比依存性が得られるであろうか. 何か比較できる実験結果があればご説明願いたい.

〔回答〕 ご指示の点は真に興味ある点であって, 偶応力理論やマイクロポーラ理論を適用するとポアソン比の影響がはいってくるのに, 古典理論では式中にはいってこない. そこで実験として, ポアソン比の異なる材料でこの問題を正確にやってみて, はたしてポアソン比の影響が少しでも出てくれば真におもしろいと思う. しかし注意せねばならぬことは偶応力理論は平面ひずみが前提条件となっている. したがって実験も二次元光弾性のように平面応力のような実験をしては無意味になるので, あくまで平面ひずみ応力としての実験が必要である. このことは光弾性でも凍結法などで, たぶん実行できるであろうからぜひやってみたいと考えている. 著者の知る範囲ではその実験はないようである. なお申し添えるが, マイクロポーラ理論を適用すればさらに実験への近似度は高まるのではないかと予想している. おそらくマイクロポーラ理論でこの場合の問題を解くと, 実験と従来の古典理論の中間に落ち着くのではないかと思う. この点については昨年より解析を実行中であるが, 現時点では, 結果を得ていない.

(付1) Kaloni, P.N. and Ariman, T., *Z. AMP*, **18**(1967), 136.

(付2) Takeuti, Y., *Arch. Mech. Stosowanej*, **25**-6 (1973), 975 に掲載の予定.

(付3) Negoro, S. and Sekiya, T., *Proc. 1st Japan Nat. Congr. Appl. Mech.*, (1951), 180 の式(9).