

539.377.01

### 回転線熱源による円板の非定常熱応力\*

竹内洋一郎\*\*, 野田直剛\*\*\*, 浜野洋一\*\*\*\*

#### 1. 結 言

通常の不均等温度分布による熱応力問題は従来多くの研究がなされているが、移動熱源による熱応力問題は工学上の実際問題が多いにもかかわらず、その報告は準定常処理による解析を除いてそれほど多くない。本研究はブレーキシュー、切削加工、ミサイルの宇宙飛行などの諸問題に応用が考えられる問題として、円形領域の内部に円周方向に回転する円弧状熱源が一定の周速度で作用する場合の非定常熱伝導問題を解析した。解析の方法は移動熱源による非定常熱伝導問題をラプラス変換法を利用して解き、与えられた温度分布に適合する平面熱応力関数の基礎式の特解を求め、極座標表示の重調和関数の一般解を重ね合わせることにより、境界条件を満足するように、重調和関数中の未知定数を決定する方法を用いた<sup>(4)</sup>。上記の説明は薄い円板において上下両表面よりの熱放散が無視可能な平面熱応力問題について述べたが、無限円柱において部分的円筒面熱源が円周方向に作用する平面ひずみ熱応力問題にも、単に係数を変えるのみでその結果を適用できる。この解析法は同様に半径方向の一樣強さの回転線熱源や、回転扇形面熱源の問題にも適用できる。なお解析は非連成準静的処理法により、また材料定数の温度依存性は考慮していない。

#### 2. 解 析

**2.1 熱伝導問題** 温度変化を  $\tau$ 、温度伝導率を  $\kappa$ 、時間を  $t$  とするとき非定常熱伝導の基礎式は

$$\Delta\tau = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial\tau}{\partial t} \dots\dots\dots(1)$$

ここで、

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

いま一点に熱衝撃を受けた後の解として

$$\tau = \tau_G + \tau_0 \dots\dots\dots(2)$$

とおく。ここで  $\tau_G$  は無限平板に時間  $t=0$  で位置  $(r_0, \beta)$  に点熱源の強さ  $Qrc$  の瞬間点熱源が作用した

\* 昭和48年6月8日 関西支部第230回講演会において講演、原稿受付 昭和48年7月17日。

\*\* 正員、大阪府立大学工学部(堺市百舌鳥梅町4-804)。

\*\*\* 正員、静岡大学工学部。

\*\*\*\* 准員、ダイキン工業会社。

ときの、時間  $t$ 、位置  $(r, \theta)$  の温度分布(グリーン関数)である。ただし  $c$  は比熱、 $\gamma$  は比重量である。よって  $\tau_G$  は

$$\tau_G = \frac{Q}{4\pi\kappa t} e^{-(R^2/4\pi\kappa t)} \dots\dots\dots(3)$$

ただし

$$R^2 = r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \beta)$$

$\tau_0$  の基礎式は

$$\Delta\tau_0 = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial\tau_0}{\partial t} \dots\dots\dots(4)$$

初期条件は

$$t=0 \text{ で } \tau_0 = 0 \dots\dots\dots(5)$$

円板の上下両表面からの熱放散は無いとし、境界の相対熱伝達率を  $h$  とすると、境界条件は

$$\frac{\partial\tau}{\partial r} + h\tau|_{r=a} = 0 \dots\dots\dots(6)$$

$\tau(r, \theta, t)$  のラプラス変換を次式で表す。

$$\tau^*(r, \theta, p) = \int_0^\infty \tau(r, \theta, t) e^{-pt} dt$$

ここで、 $p$  はラプラス変換のパラメータである。式(5)を考慮して式(4)をラプラス変換すれば

$$(\Delta - q^2)\tau_0^* = 0 \dots\dots\dots(7)$$

ただし、 $q^2 = p/\kappa$ 。

式(3)をラプラス変換すれば

$$\tau_G^* = \frac{Q}{2\pi\kappa} K_0(qr) \dots\dots\dots(8)$$

ただし、 $K_0$  は零次の変形ベッセル関数である。Grafの加法定理を用いると

$$\tau_G^* = \left. \begin{aligned} & \frac{Q}{2\pi\kappa} \sum_{n=0}^\infty \varepsilon_n I_n(qr_0) K_n(qr) \cos n(\theta - \beta) \quad r_0 < r \\ & \frac{Q}{2\pi\kappa} \sum_{n=0}^\infty \varepsilon_n I_n(qr) K_n(qr_0) \cos n(\theta - \beta) \quad r_0 > r \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(9)$$

ただし、 $\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = 2$ 。  $I_n, K_n$  は  $n$  次の変形ベッセル関数である。

中実円板に対し、式(7)の解は温度分布の対称性を考慮することにより

$$\tau_0^* = \sum_{n=0}^\infty \bar{A}_n I_n(qr) \cos n(\theta - \beta) \dots\dots\dots(10)$$

式(6)のラプラス変換は

† たとえば準定常処理の移動熱源の場合に対しては文献(1)、非定常処理の移動熱源に対しては文献(2)、回転熱源の温度分布の非定常処理に対しては文献(3)を参照。

$$\frac{\partial \tau^*}{\partial r} + h\tau^*|_{r=a} = 0 \quad \dots\dots\dots(11)$$

式 (2) のラプラス変換は

$$\tau^* = \tau_G^* + \tau_0^* \quad \dots\dots\dots(12)$$

式 (12) の関係より, 式 (9), (10) を式 (11) に代入し, 未知定数  $\bar{A}_n$  を求めれば

$$\bar{A}_n = -\frac{Q\varepsilon_n}{2\pi\kappa} \frac{(1-n/ha)K_n(qa) - (q/h)K_{n-1}(qa)}{(1-n/ha)I_n(qa) + (q/h)I_{n-1}(qa)} I_n(qr_0) \quad \dots\dots\dots(13)$$

式 (13) を式 (10) に代入すれば

$$\tau_0^* = -\frac{Q}{2\pi\kappa} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \frac{(1-n/ha)K_n(qa) - (q/h)K_{n-1}(qa)}{(1-n/ha)I_n(qa) + (q/h)I_{n-1}(qa)} I_n(qr_0) I_n(qr) \cos n(\theta - \beta) \quad \dots\dots\dots(14)$$

式 (9), (14) を式 (12) に代入すると像領域の温度分布は,  $r_0 < r$  に対し

$$\tau^* = \frac{Q}{2\pi\kappa} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left[ K_n(qr) - \frac{(1-n/ha)K_n(qa) - (q/h)K_{n-1}(qa)}{(1-n/ha)I_n(qa) + (q/h)I_{n-1}(qa)} I_n(qr) \right] I_n(qr_0) \cos n(\theta - \beta) \quad \dots\dots\dots(15)$$

$r_0 > r$  に対し

$$\tau^* = \frac{Q}{2\pi\kappa} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left[ K_n(qr_0) - \frac{(1-n/ha)K_n(qa) - (q/h)K_{n-1}(qa)}{(1-n/ha)I_n(qa) + (q/h)I_{n-1}(qa)} I_n(qr_0) \right] I_n(qr) \cos n(\theta - \beta) \quad \dots\dots\dots(16)$$

式 (15), (16) をラプラス逆変換すると

$$\begin{aligned} \tau(r, \theta, t) = & \frac{Q}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\beta_{0m}r) J_0(\beta_{0m}r_0) e^{-\kappa\beta_{0m}^2 t}}{a^2 J_1(\beta_{0m}a) \{J_1(\beta_{0m}a) + (\beta_{0m}/h) J_0(\beta_{0m}a)\}} \\ & - \frac{2Q}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1-n/ha) J_n(\beta_{nm}r) J_n(\beta_{nm}r_0) e^{-\kappa\beta_{nm}^2 t} \cos nm(\theta - \beta)}{a^2 J_{n-1}(\beta_{nm}a) [-J_{n-1}(\beta_{nm}a) + (1/ha) \{\beta_{nm}a J_n(\beta_{nm}a) - n J_{n-1}(\beta_{nm}a)\}]} \quad \dots\dots\dots(17) \end{aligned}$$

ただし,  $\beta_{nm}$  は

$$\left(1 - \frac{n}{ha}\right) J_n(\beta_{na}) + \beta_n J_{n-1}(\beta_{na}) = 0 \quad \dots\dots\dots(18)$$

を満足する  $\beta_n$  の第  $m$  番めの正根である. 式 (17) によって点熱源の強さ  $Q$  の瞬間点熱源が作用した場合の温度分布が得られた.

いま図 1 のように, 回転点熱源が位置  $(r_0, \beta)$  から出発して, 一定の角速度  $\omega$  で回転しているとき, 時間  $t'$  における点熱源の位置は  $\theta = \omega t' + \beta$  とすれば  $(r_0, \theta)$  で表される. したがって回転点熱源による温度分布は

$$\tau_\omega = \int_0^t \tau(r, \omega t' + \beta, t - t') dt' \quad \dots\dots\dots(19)$$

で与えられる. 式 (17) を式 (19) に代入すると

$$\begin{aligned} \tau_\omega = & \frac{Q}{\pi\kappa} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\beta_{0m}r) J_0(\beta_{0m}r_0) (1 - e^{-\kappa\beta_{0m}^2 t})}{\beta_{0m}^2 a^2 J_1(\beta_{0m}a) \{J_1(\beta_{0m}a) + (\beta_{0m}/h) J_0(\beta_{0m}a)\}} \\ & - \frac{2Q}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1-n/ha) J_n(\beta_{nm}r) J_n(\beta_{nm}r_0)}{a^2 J_{n-1}(\beta_{nm}a) [-J_{n-1}(\beta_{nm}a) + (1/ha) \{\beta_{nm}a J_n(\beta_{nm}a) - n J_{n-1}(\beta_{nm}a)\}]} \\ & \times \frac{1}{\kappa^2 \beta_{nm}^4 + n^2 \omega^2} [(n\omega e^{-\kappa\beta_{nm}^2 t} - n\omega \cos n\omega t + \kappa\beta_{nm}^2 \sin n\omega t) \sin n(\theta - \beta)] \\ & + [ -\kappa\beta_{nm}^2 e^{-\kappa\beta_{nm}^2 t} + \kappa\beta_{nm}^2 \cos n\omega t + n\omega \sin n\omega t ] \cos n(\theta - \beta) \quad \dots\dots\dots(20) \end{aligned}$$

図 2 に示すように円周方向に有限長さの弧長を持つ回転線熱源が作用する場合の温度分布  $\tau_{\omega\theta}$  は式 (20) の  $Q$  を  $Q = Q_0 r_0 d\beta$  と置き

$$\tau_{\omega\theta} = \int_{\beta_1}^{\beta_2} r_0 \tau_\omega d\beta \quad \dots\dots\dots(21)$$

で与えられる. ここで,  $\beta_1 = \beta - \alpha$ ,  $\beta_2 = \beta + \alpha$  として式 (21) の積分を実行すると

$$\begin{aligned} \tau_{\omega\theta} = & \frac{2\alpha Q_0 r_0}{\pi\kappa} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\beta_{0m}r) J_0(\beta_{0m}r_0) (1 - e^{-\kappa\beta_{0m}^2 t})}{\beta_{0m}^2 a^2 J_1(\beta_{0m}a) \{J_1(\beta_{0m}a) + (\beta_{0m}/h) J_0(\beta_{0m}a)\}} \\ & - \frac{4Q_0 r_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1-n/ha) J_n(\beta_{nm}r) J_n(\beta_{nm}r_0) (\sin n\alpha/n)}{a^2 J_{n-1}(\beta_{nm}a) [-J_{n-1}(\beta_{nm}a) + (1/ha) \{\beta_{nm}a J_n(\beta_{nm}a) - n J_{n-1}(\beta_{nm}a)\}]} \\ & \times \frac{1}{\kappa^2 \beta_{nm}^4 + n^2 \omega^2} [(n\omega e^{-\kappa\beta_{nm}^2 t} - n\omega \cos n\omega t + \kappa\beta_{nm}^2 \sin n\omega t) \sin n(\theta - \beta)] \\ & + [ -\kappa\beta_{nm}^2 e^{-\kappa\beta_{nm}^2 t} + \kappa\beta_{nm}^2 \cos n\omega t + n\omega \sin n\omega t ] \cos n(\theta - \beta) \quad \dots\dots\dots(22) \end{aligned}$$

ここで,  $Q_0$  は単位時間, 単位長さ当たりの発熱量である。

式 (20), (22) で角速度  $\omega$  を零とすれば, それぞれ持続点熱源, 円周方向持続線熱源による温度分布を与える。本結果は円板について説明したが, 円弧状線熱源を部分円筒面熱源に置き換えると, そのまま無限円柱における回転面熱源の結果を与えることになる。

**2.2 熱応力解析** 二次元熱応力問題の基礎式は熱応力関数を  $\chi$  とすれば

$$\Delta \Delta \chi = -k \Delta \tau \dots \dots \dots (23)$$

ただし,  $k$  は平面応力問題に対し  $k = \alpha_t E$ , 平面ひずみ問題に対し  $k = \alpha_t E / (1 - \nu)$ ,  $\alpha_t$  は線膨張係数,  $E$  は縦弾性係数,  $\nu$  はポアソン比である。

本問題の場合は外力の作用しない純熱応力問題で, かつ単連結の場合の境界条件は

$$r = a \text{ で}$$

$$\chi = \frac{\partial \chi}{\partial r} = 0 \dots \dots \dots (24)$$

$\chi$  を式 (23) の同次方程式の一般解  $\chi_c$  と特解  $\chi_p$  にわける

$$\chi = \chi_c + \chi_p \dots \dots \dots (25)$$

$\chi_c$  と  $\chi_p$  はそれぞれ

$$\Delta \Delta \chi_c = 0 \dots \dots \dots (26)$$

$$\Delta \chi_p = -k \tau \dots \dots \dots (27)$$

を満足する。式 (27) の特解  $\chi_p$  は式 (22) を考慮し, 著者の一人の先の報告<sup>(4)</sup>を応用すれば

$$\begin{aligned} \chi_p = & \frac{2\alpha Q_0 r_0 k}{\pi \kappa} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\beta_{0m} r) J_0(\beta_{0m} r_0) (1 - e^{-\kappa \beta_{0m} 2t})}{\beta_{0m}^4 a^2 J_1(\beta_{0m} a) \{J_1(\beta_{0m} a) + (\beta_{0m}/h) J_0(\beta_{0m} a)\}} \\ & - \frac{4Q_0 r_0 k}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1-n/ha) J_n(\beta_{nm} r) J_n(\beta_{nm} r_0) (\sin n\alpha/n)}{\beta_{nm}^2 a^2 J_{n-1}(\beta_{nm} a) [-J_{n-1}(\beta_{nm} a) + (1/ha) \{\beta_{nm} a J_n(\beta_{nm} a) - n J_{n-1}(\beta_{nm} a)\}]} \\ & \times \frac{1}{\kappa^2 \beta_{nm}^4 + n^2 \omega^2} [(n\omega e^{-\kappa \beta_{nm} 2t} - n\omega \cos n\omega t + \kappa \beta_{nm}^2 \sin n\omega t) \sin n(\theta - \beta) \\ & + \{-\kappa \beta_{nm}^2 e^{-\kappa \beta_{nm} 2t} + \kappa \beta_{nm}^2 \cos n\omega t + n\omega \sin n\omega t\} \cos n(\theta - \beta)] \dots \dots \dots (28) \end{aligned}$$

本問題に適する式 (26) の一般解は, 非軸対称問題であることと特解の形を考慮し, および変位を多価にする項を除外し, 次式の形を採用する。

$$\chi_c = A_0 + B_0 r^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \{ (A_n r^n + B_n r^{n+2}) \cos n(\theta - \beta) + (C_n r^n + D_n r^{n+2}) \sin n(\theta - \beta) \} \dots \dots \dots (29)$$

よって熱応力関数  $\chi$  は式 (28), (29) を式 (25) に代入すると

$$\begin{aligned} \chi = & A_0 + B_0 r^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \{ (A_n r^n + B_n r^{n+2}) \cos n(\theta - \beta) + (C_n r^n + D_n r^{n+2}) \sin n(\theta - \beta) \} \\ & + \frac{2\alpha Q_0 r_0 k}{\pi \kappa} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\beta_{0m} r) J_0(\beta_{0m} r_0) (1 - e^{-\kappa \beta_{0m} 2t})}{\beta_{0m}^4 a^2 J_1(\beta_{0m} a) \{J_1(\beta_{0m} a) + (\beta_{0m}/h) J_0(\beta_{0m} a)\}} \\ & - \frac{4Q_0 r_0 k}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1-n/ha) J_n(\beta_{nm} r) J_n(\beta_{nm} r_0) (\sin n\alpha/n)}{\beta_{nm}^2 a^2 J_{n-1}(\beta_{nm} a) [-J_{n-1}(\beta_{nm} a) + (1/ha) \{\beta_{nm} a J_n(\beta_{nm} a) - n J_{n-1}(\beta_{nm} a)\}]} \\ & \times \frac{1}{\kappa^2 \beta_{nm}^4 + n^2 \omega^2} [(n\omega e^{-\kappa \beta_{nm} 2t} - n\omega \cos n\omega t + \kappa \beta_{nm}^2 \sin n\omega t) \sin n(\theta - \beta) \\ & + \{-\kappa \beta_{nm}^2 e^{-\kappa \beta_{nm} 2t} + \kappa \beta_{nm}^2 \cos n\omega t + n\omega \sin n\omega t\} \cos n(\theta - \beta)] \dots \dots \dots (30) \end{aligned}$$

式 (30) を境界条件式 (24) に代入し未知定数を求めると

$$\begin{aligned} A_0 = & \frac{2\alpha Q_0 r_0 k}{\pi \kappa} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\beta_{0m} r_0) \{J_0(\beta_{0m} a) + (\beta_{0m}/2) J_1(\beta_{0m} a)\} (1 - e^{-\kappa \beta_{0m} 2t})}{\beta_{0m}^4 a^2 J_1(\beta_{0m} a) \{J_1(\beta_{0m} a) + (\beta_{0m}/h) J_0(\beta_{0m} a)\}} \\ B_0 = & \frac{\alpha Q_0 r_0 k}{\pi \kappa} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\beta_{0m} r_0) J_1(\beta_{0m} a) (1 - e^{-\kappa \beta_{0m} 2t})}{\beta_{0m}^3 a^3 J_1(\beta_{0m} a) \{J_1(\beta_{0m} a) + (\beta_{0m}/h) J_0(\beta_{0m} a)\}} \\ A_n = & \frac{2Q_0 r_0 k}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1-n/ha) J_n(\beta_{nm} r_0) \{2(n+1) J_n(\beta_{nm} a) - \beta_{nm} a J_{n-1}(\beta_{nm} a)\} (\sin n\alpha/n)}{\beta_{nm}^2 a^{n+2} J_{n-1}(\beta_{nm} a) [-J_{n-1}(\beta_{nm} a) + (1/ha) \{\beta_{nm} a J_n(\beta_{nm} a) - n J_{n-1}(\beta_{nm} a)\}]} \\ & \times \frac{1}{\kappa^2 \beta_{nm}^4 + n^2 \omega^2} \{-\kappa \beta_{nm}^2 e^{-\kappa \beta_{nm} 2t} + \kappa \beta_{nm}^2 \cos n\omega t + n\omega \sin n\omega t\} \\ B_n = & \frac{2Q_0 r_0 k}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1-n/ha) J_n(\beta_{nm} r_0) \{2n J_n(\beta_{nm} a) - \beta_{nm} a J_{n-1}(\beta_{nm} a)\} (\sin n\alpha/n)}{a^{n+2} \beta_{nm}^2 J_{n-1}(\beta_{nm} a) [-J_{n-1}(\beta_{nm} a) + (1/ha) \{\beta_{nm} a J_n(\beta_{nm} a) - n J_{n-1}(\beta_{nm} a)\}]} \\ & \times \frac{1}{\kappa^2 \beta_{nm}^4 + n^2 \omega^2} \{-\kappa \beta_{nm}^2 e^{-\kappa \beta_{nm} 2t} + \kappa \beta_{nm}^2 \cos n\omega t + n\omega \sin n\omega t\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_n &= \frac{2Q_0 r_0 k}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1-n/ha) J_n(\beta_{nm} r_0) \{2(n+1) J_n(\beta_{nm} a) - \beta_{nm} a J_{n-1}(\beta_{nm} a)\} (\sin n\alpha/n)}{a^n \beta_{nm}^2 J_{n-1}(\beta_{nm} a) [-J_{n-1}(\beta_{nm} a) + (1/ha) \{\beta_{nm} a J_n(\beta_{nm} a) - n J_{n-1}(\beta_{nm} a)\}]} \\
 &\quad \times \frac{1}{\kappa^2 \beta_{nm}^4 + n^2 \omega^2} \{n \omega e^{-\kappa \beta_{nm} 2t} - n \omega \cos n \omega t + \kappa \beta_{nm}^2 \sin n \omega t\} \\
 D_n &= \frac{2Q_0 r_0 k}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1-n/ha) J_n(\beta_{nm} r_0) \{2n J_n(\beta_{nm} a) - \beta_{nm} a J_{n-1}(\beta_{nm} a)\} (\sin n\alpha/n)}{a^{n+2} \beta_{nm}^2 J_{n-1}(\beta_{nm} a) [-J_{n-1}(\beta_{nm} a) + (1/ha) \{\beta_{nm} a J_n(\beta_{nm} a) - n J_{n-1}(\beta_{nm} a)\}]} \\
 &\quad \times \frac{1}{\kappa^2 \beta_{nm}^4 + n^2 \omega^2} \{n \omega e^{-\kappa \beta_{nm} 2t} - n \omega \cos n \omega t + \kappa \beta_{nm}^2 \sin n \omega t\}
 \end{aligned} \tag{31}$$

よって熱応力関数  $\chi$  は

$$\begin{aligned}
 \chi &= \frac{2\alpha Q_0 r_0 k a^2}{\pi \kappa} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\beta_{0m} r_0) [J_0(\beta_{0m} r) - J_0(\beta_{0m} a) + (\beta_{0m} a/2) J_1(\beta_{0m} a) \{(r^2/a^2) - 1\}] (1 - e^{-\kappa \beta_{0m} 2t})}{\beta_{0m}^4 a^2 J_1(\beta_{0m} a) \{J_1(\beta_{0m} a) + (\beta_{0m} a/ha) J_0(\beta_{0m} a)\}} \\
 &\quad + \frac{4Q_0 r_0 k_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[(1-n/ha) J_n(\beta_{nm} r_0) \{(r/a)^n J_n(\beta_{nm} a) - J_n(\beta_{nm} r) + (n J_n(\beta_{nm} a) - (\beta_{nm} a/2) J_{n-1}(\beta_{nm} a)) (r/a)^n (1-r^2/a^2) (\sin n\alpha/n)\}]}{[\beta_{nm}^2 a^2 (\kappa^2 \beta_{nm}^4 + n^2 \omega^2) J_{n-1}(\beta_{nm} a) [-J_{n-1}(\beta_{nm} a) + (1/ha) \{-\beta_{nm} a J_n(\beta_{nm} a) - n J_{n-1}(\beta_{nm} a)\}]}]} \\
 &\quad \times [(n \omega e^{-\kappa \beta_{nm} 2t} - n \omega \cos n \omega t + \kappa \beta_{nm}^2 \sin n \omega t) \sin n(\theta - \beta) + \{-\kappa \beta_{nm}^2 e^{-\kappa \beta_{nm} 2t} + \kappa \beta_{nm}^2 \cos n \omega t + n \omega \sin n \omega t\} \cos n(\theta - \beta)] \dots \tag{32}
 \end{aligned}$$

熱応力成分は熱応力関数  $\chi$  を用いて

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2}, \quad \sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial \theta} \tag{33}$$

各熱応力成分は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\theta\theta} &= \frac{2\alpha Q_0 r_0 k}{\pi \kappa} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\beta_{0m} r_0) [-\beta_{0m}^2 r J_0(\beta_{0m} r) + \beta_{0m} \{J_1(\beta_{0m} r) + (r/a) J_1(\beta_{0m} a)\}] (1 - e^{-\kappa \beta_{0m} 2t})}{r \beta_{0m}^4 a^2 J_1(\beta_{0m} a) \{J_1(\beta_{0m} a) + (\beta_{0m}/h) J_0(\beta_{0m} a)\}} \\
 &\quad - \frac{4Q_0 r_0 k}{\pi r^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[(1-n/ha) J_n(\beta_{nm} r_0) (\sin n\alpha/n) \{-\beta_{nm}^2 r^2 + n(n+1) J_n(\beta_{nm} r) - \beta_{nm} r J_{n-1}(\beta_{nm} a) + (1/2)n(n-1)(r/a)^n \{\beta_{nm} a J_{n-1}(\beta_{nm} a) - 2(n+1) J_n(\beta_{nm} a)\} + (\beta_{nm} a) + (1/2)(n+1)(n+2)(r/a)^{n+2} \{2n J_n(\beta_{nm} a) - \beta_{nm} a J_{n-1}(\beta_{nm} a)\}]}{[a^2 \beta_{nm}^2 (\kappa^2 \beta_{nm}^4 + n^2 \omega^2) J_{n-1}(\beta_{nm} a) [-J_{n-1}(\beta_{nm} a) + (1/ha) \{\beta_{nm} a J_n(\beta_{nm} a) - n J_{n-1}(\beta_{nm} a)\}]}]} \\
 &\quad \times [(n \omega e^{-\kappa \beta_{nm} 2t} - n \omega \cos n \omega t + \kappa \beta_{nm}^2 \sin n \omega t) \sin n(\theta - \beta) + \{-\kappa \beta_{nm}^2 e^{-\kappa \beta_{nm} 2t} + \kappa \beta_{nm}^2 \cos n \omega t + n \omega \sin n \omega t\} \cos n(\theta - \beta)] \dots \tag{34}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= \frac{2\alpha Q_0 r_0 k}{\pi \kappa} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\beta_{0m} r_0) \{-J_1(\beta_{0m} r) + (r/a) J_1(\beta_{0m} a)\} (1 - e^{-\kappa \beta_{0m} 2t})}{r \beta_{0m}^3 a^2 J_1(\beta_{0m} a) \{J_1(\beta_{0m} a) + (\beta_{0m}/h) J_0(\beta_{0m} a)\}} \\
 &\quad - \frac{4Q_0 r_0 k}{\pi r^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[(1-n/ha) J_n(\beta_{nm} r_0) (\sin n\alpha/n) \{\beta_{nm} r J_{n-1}(\beta_{nm} r) - n(n+1) J_n(\beta_{nm} r) - (1/2)n(n-1)(r/a)^n \{\beta_{nm} a J_{n-1}(\beta_{nm} a) - 2(n+1) J_n(\beta_{nm} a)\} - (1/2)(n+1)(n-2)(r/a)^{n+2} \{-\beta_{nm} a J_{n-1}(\beta_{nm} a) + 2n J_n(\beta_{nm} a)\}]}{[a^2 \beta_{nm}^2 (\kappa^2 \beta_{nm}^4 + n^2 \omega^2) J_{n-1}(\beta_{nm} a) [-J_{n-1}(\beta_{nm} a) + (1/ha) \{\beta_{nm} a J_n(\beta_{nm} a) - n J_{n-1}(\beta_{nm} a)\}]}]} \\
 &\quad \times [(n \omega e^{-\kappa \beta_{nm} 2t} - n \omega \cos n \omega t + \kappa \beta_{nm}^2 \sin n \omega t) \sin n(\theta - \beta) + \{-\kappa \beta_{nm}^2 e^{-\kappa \beta_{nm} 2t} + \kappa \beta_{nm}^2 \cos n \omega t + n \omega \sin n \omega t\} \cos n(\theta - \beta)] \dots \tag{35}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{r\theta} &= -\frac{4Q_0 r_0 k}{\pi r^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[(1-n/ha) J_n(\beta_{nm} r_0) (\sin n\alpha/n) \{n \beta_{nm} r J_{n-1}(\beta_{nm} r) - n(n+1) J_n(\beta_{nm} r) + (1/2)n(n-1)(r/a)^n \{\beta_{nm} a J_{n-1}(\beta_{nm} a) - 2(n+1) J_n(\beta_{nm} a)\} + (1/2)n(n+1)(r/a)^{n+2} \{2n J_n(\beta_{nm} a) - \beta_{nm} a J_{n-1}(\beta_{nm} a)\}]}{[a^2 \beta_{nm}^2 (\kappa^2 \beta_{nm}^4 + n^2 \omega^2) J_{n-1}(\beta_{nm} a) [-J_{n-1}(\beta_{nm} a) + (1/ha) \{\beta_{nm} a J_n(\beta_{nm} a) - n J_{n-1}(\beta_{nm} a)\}]}]} \\
 &\quad \times [ \{-\kappa \beta_{nm}^2 e^{-\kappa \beta_{nm} 2t} + \kappa \beta_{nm}^2 \cos n \omega t + n \omega \sin n \omega t\} \sin n(\theta - \beta) - \{n \omega e^{-\kappa \beta_{nm} 2t} - n \omega \cos n \omega t + \kappa \beta_{nm}^2 \sin n \omega t\} \cos n(\theta - \beta) ] \dots \tag{36}
 \end{aligned}$$

### 3. 数値計算結果と考察

数値計算を実行する場合、無次元量

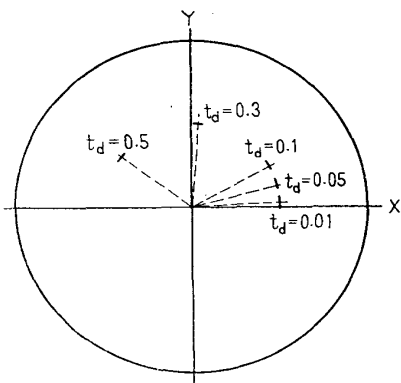
$$\left. \begin{aligned} \bar{\tau} &= \frac{\kappa \tau_{\omega \theta}}{Q_0 a}, & \widehat{\theta\theta} &= \frac{\kappa \sigma_{\theta\theta}}{k Q_0 a}, & \widehat{\rho\rho} &= \frac{\kappa \sigma_{rr}}{k Q_0 a}, & \widehat{\rho\theta} &= \frac{\kappa \sigma_{r\theta}}{k Q_0 a} \\ \rho &= \frac{r}{a}, & \rho_0 &= \frac{r_0}{a}, & H &= ah, & t_d &= \frac{\kappa t}{a^2}, & \omega_d &= \frac{\omega a^2}{\kappa} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (37)$$

に対しておこなった。数値計算例として

(a)  $\omega_d = 5.0, \alpha = \pi/36, \rho_0 = 0.5, H = \infty$

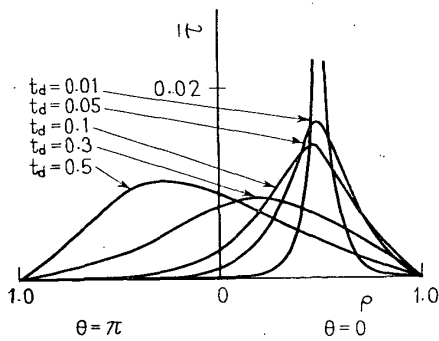
(b)  $\omega_d = 5.0, \alpha = \pi/36, \rho_0 = 0.5, H = 0.5$

の場合について実行した。図1は各無次元時間における線熱源の位置を示した。図2, 3はそれぞれ(a), (b)に対応する温度分布を示す。無次元時間  $t_d = 0.01$  では  $\theta = 0, \rho = 0.5$  の位置に線熱源が作用している



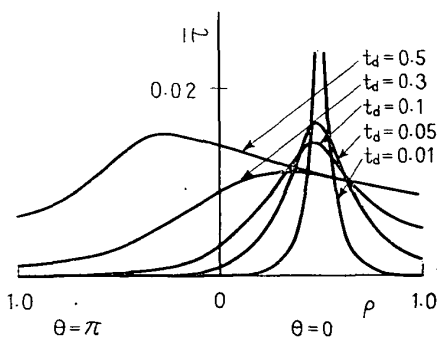
$\rho_0 = 0.5, \omega_d = 5, \alpha = \pi/36$

図1 円周方向線熱源の位置



$\omega_d = 5, H = \infty$

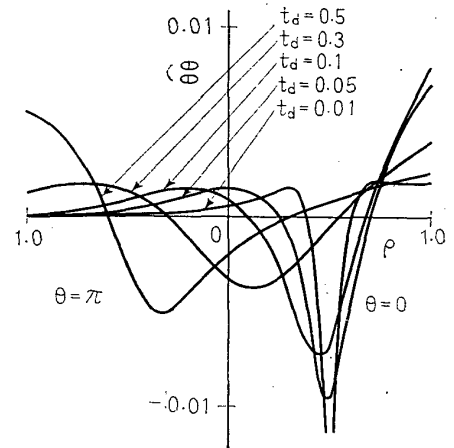
図2 温度分布



$\omega_d = 5, H = 0.5$

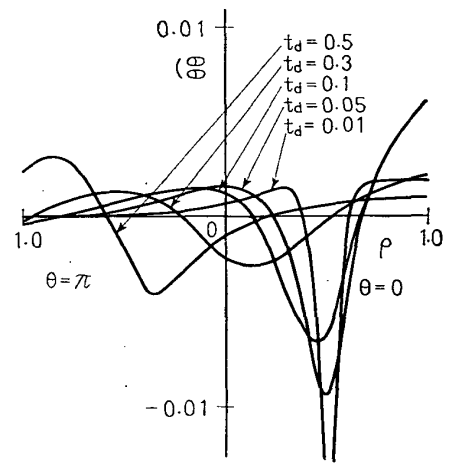
図3 温度分布

ため、その点で大きな値を示す。各時間に対する  $\theta = 0, \theta = \pi$  上の最高温度は線熱源の位置と共に移動する。図4, 5はそれぞれ(a), (b)に対応するフープ応力分布を各時間に対し  $\theta = 0, \theta = \pi$  軸上について示した。時間が短い間はひじょうに大きな圧縮応力を示す。図4と5を比較すると各時間における  $\theta = 0, \theta = \pi$  軸上の最大圧縮応力はいずれの場合も図4[(a)の場合]が大きい。これは図4[(a)の場合]は境界で温度が零に保持されているため温度こう配が図5[(b)の場合]より急なためと考えられる。図6, 7はそれぞれ(a), (b)に対応するラジアル応力分布を各時間に対し  $\theta = 0, \theta = \pi$  軸上について示した。図8, 9はそれぞれ(a), (b)に対応するフープ応力(境界上)を時間を横軸にとって示した。 $\theta = 0$  で  $\rho = 1$  上では時間と共に応力は増加するが、すこし時間が過ぎると熱源の位置が遠くなるため応力は減少し、 $t_d = 1$  を過ぎると熱源の位置が  $\rho_0 = 0.5, \theta = 0$  に近づくため応力は増加しだし、線熱源が  $\theta = 0$  を通過する



$\omega_d = 5, H = \infty$

図4 応力  $\widehat{\theta\theta}$  の分布



$\omega_d = 5, H = 0.5$

図5 応力  $\widehat{\theta\theta}$  の分布

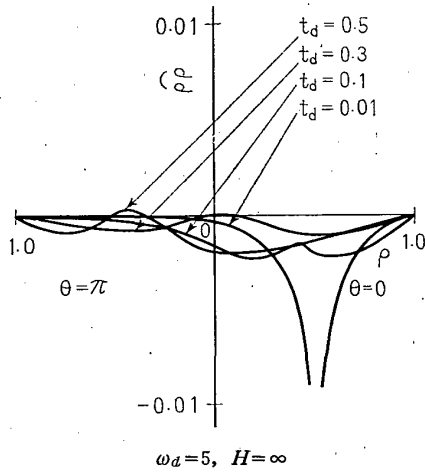


図 6 応力  $\hat{\rho\rho}$  の分布

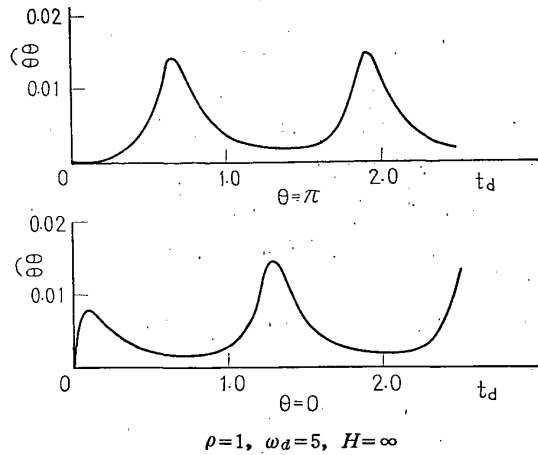


図 8 境界上の応力  $\hat{\theta\theta}$  の分布

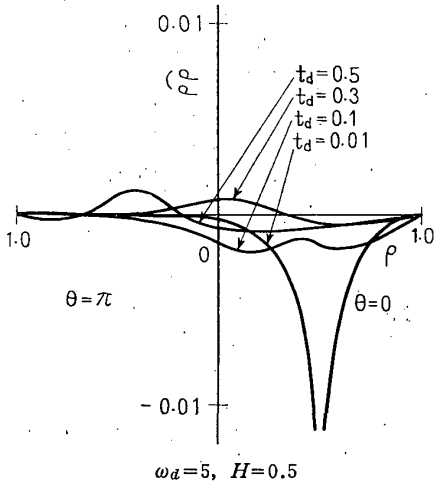


図 7 応力  $\hat{\rho\rho}$  の分布

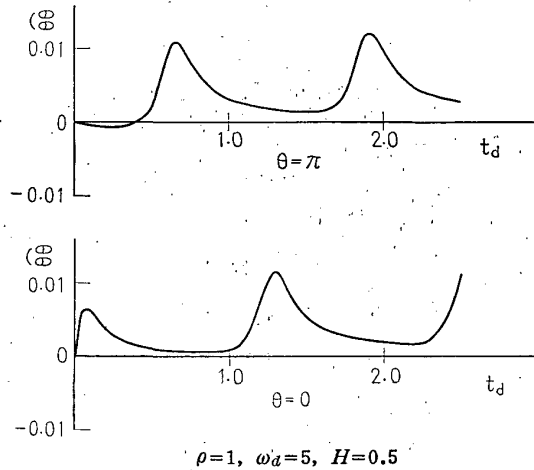


図 9 境界上の応力  $\hat{\theta\theta}$  の分布

時間で最大の引張応力が生じる。図 10 は  $H=\infty$  で  $\rho=0$  すなわち中心におけるフープ応力を  $\omega_d=5.0$  と  $\omega_d=10.0$  の場合について示した。図 11 は  $H=0.5$  で  $\rho=0$  すなわち中心におけるフープ応力を  $\omega_d=5.0$  と  $\omega_d=10.0$  の場合について示した。

最後に数値計算には名古屋大学、京都大学大型計算機センターを利用した。

文 献

- (1) Rosenthal, D. and Cameron, R.H., *Trans. ASME*, **69** (1947-11), 961; Rosenthal, D., *Trans. ASME*, **68** (1946-11), 849; 竹内, 熱応力, 第 8 章, (昭 45), 日新出版.
- (2) Hetnarski, R.B., *AIAA J.*, **7-3** (1969), 419; Choudhuri, S.K.R., *Trans. ASME, Ser. E*, **38-1** (1971-3), 277.
- (3) Roznowski, T., *Bull. Acad. Polon.*, **12-5** (1964), 333.
- (4) Takeuti, Y., *Z. AMM*, **45-4** (1965), 177.

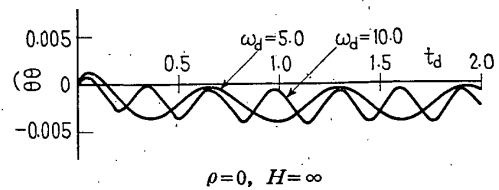


図 10 中心点における応力  $\hat{\theta\theta}$  の分布

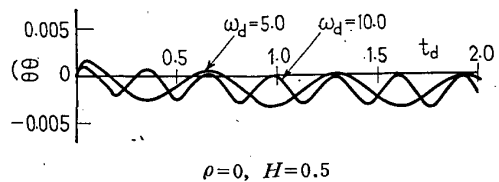


図 11 中心点における応力  $\hat{\theta\theta}$  の分布

## 討 論

〔質問〕 柴原正雄 (金沢大学工学部)

図8および9での $\widehat{\theta\theta}$ は, 図示範囲内の $t_d$ ではまだ定常状態には達していないことがうかがわれるようである.  $t_d$ の増加による定常化の過程は, 図示範囲外の $t_d$ に対し, どのような収束状況を呈するものかにつき伺いたい.

〔回答〕 熱源が回転しているので図8および9で

上下の図を交互に $t_d$ とともに観察していただくと, ピークの増加のしかたは少なくなって行きつつあるもので, ほぼこの最後の状態のくり返しで定常移行するものと考えられる. 応力の解中で簡単に $t \rightarrow \infty$ とおけないから,  $e$ のべきの $t$ だけ $\infty$ とし, 他の $\cos$ ,  $\sin$ の $t$ はそのままにしておけばよいかと考えられる.