学校代数におけるＣＡＳを活用した代数的活動

－代数的活動をとらえる枠組みの構築に向けて－

Algebraic Activities maked full use of CAS in School Algebra

- Focus on Formulation of Algebraic Activities' Framework with CAS -

両　角　達　男
Tatsuo MOROZUMI

（平成17年9月30日受理）

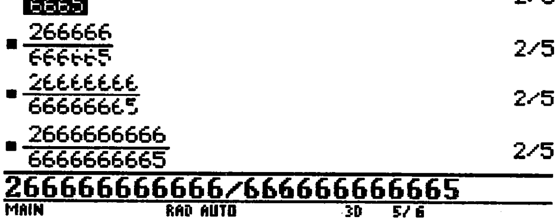
1. はじめに

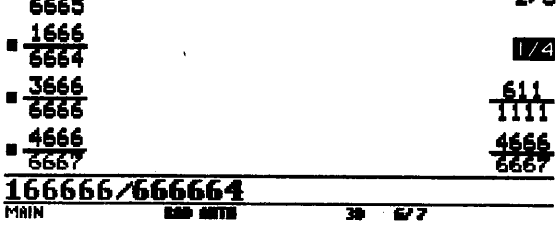
学校代数の学習を進める上で、数式処理電卓などのCAS(Computer Algebra System)を活用することにより様々な可能性と効果が期待できる。

例えば、26/65 = 2/5, 266/665 = 2/5のように、可約な状態から既約分数に約分したとき、分子の先頭の数と分母の末尾の数が既約分数として生じる特殊な分数がある。(平山, 1986)
手計算によっても確かめることができるが、数式処理電卓(Voyage200, テキサスインスツルメント)の画面上でこの計算を行うと、瞬時に既約分数の値を表示することができる。

さらに、分子と分母に同数ずつ6を重ね、26666666/66666665のように表示しても2/5となることが画面上で確認できる。この操作により、分子の先頭の数が2、分母の末尾の数が5の場合、その間に同数ずつ6が並ぶと2/5になるのではという洞察を、手計算の場合よりも働かせることが容易にできる。実際にVoyage200の画面上でその洞察が正しいか確かめていくと、かなり多くの6の数を並べても、既約分数が2/5であることが確認できる。一般化の思考を進めていく上でCASが効果的に働いているといえる。

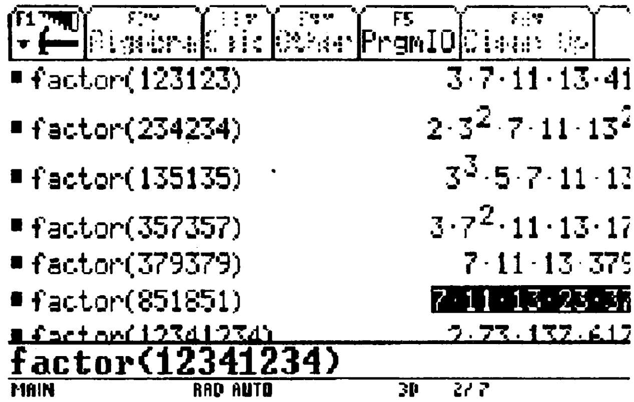
一方、2666/6665 = 2/5　と同じような特徴をもつ分数が他にもないだろうか、という類比的な思考を進める上でもCASの活用が効果的に働く。例えば、「(分母の末尾の数) － (分子の先頭の数) = 3」の条件を保ちつつ、6が同数並ぶ分数の場合、分子の先頭の数／分母の末尾の数　のように約分できるのではという予想を立てることができる。Voyage200の画面上で確かめていくと、1666/6664の場合のみ1/4に約分できることがわかる。なお、1666666/6666664のように、6の数を増やしても同様の結果を得る。





123123, 135135, 379379 などのように、3桁の数の繰り返しによる6桁の数の特徴を発見し、追求する上でもCASの活用が効果的に働く。

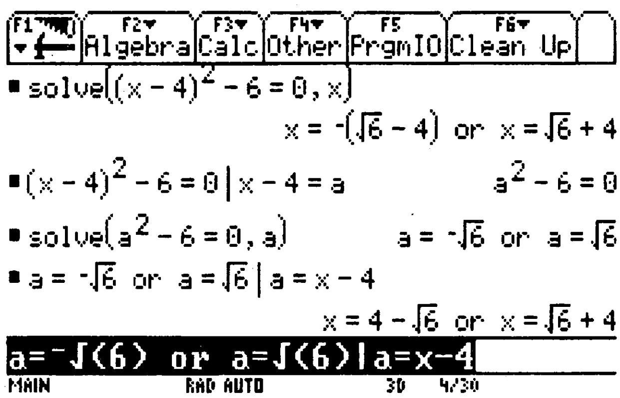
右の画面では、6桁の数をそれぞれ素因数分解した数が表示されている。123123 や 357357 など、各位の数の間隔が等しい場合には3が因数に入っている。この事実から、3の倍数に関わる数の性質を整理することができる。



一方、379379, 851851 のように、各位の数の間隔が変わる場合には3の因数は含まれない。条件を満たすいくつかの数での結果を比較することにより、7, 11, 13 および 7 × 11 × 13 などの因数が共通にあることが見いだせる。7 × 11 × 13 = 1001, 123123 ／ 1001 = 123 などの計算をCAS上で行うことにより、帰納的に 123123 = 123 × 1001 や 1001 A という形を洞察することもできる。

数の性質を発見したり、追求したりすることだけにCASの活用の効果はとどまらない。

2次方程式をCASを用いて解くことを通して、方程式を解く過程、方程式を解くために用いる性質（等式の性質など）を強く意識したり、振り返ることができる。例えば、2次方程式 (x − 4)² − 6 = 0 は、solve や zero キーを用いると右の画面のように瞬時に解くことができる。

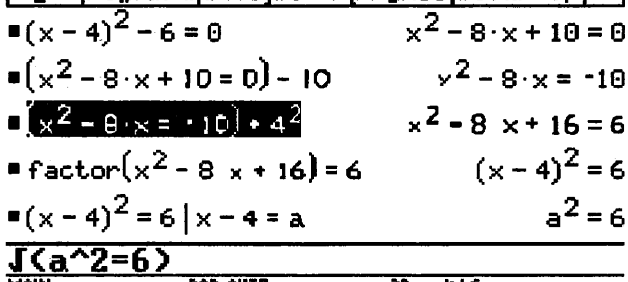


solve や zero キーを用いずに、因数分解や置換の機能などを用いて、2次方程式 (x − 4)² − 6 = 0 を解いていったのが［図1］および次頁［図2］である。

［図1］は平方完成を意識した変形であり、［図2］は因数分解による解法である。

［図1］の2行目および3行目は、「等式の両辺から同じ数をひく／同じ数を加える」という等式の性質を意識した操作である。(x ² − 8 x + 10 = 0) − 10 という表記の仕方は、手による計算とはやや異なるものである。初見の生徒にとっては違和感を感じるかもしれない。

しかし、「両辺に同じ操作を施す」という等式の性質によってこの変形が行われる、という事実を再認識するためには有



［図1］

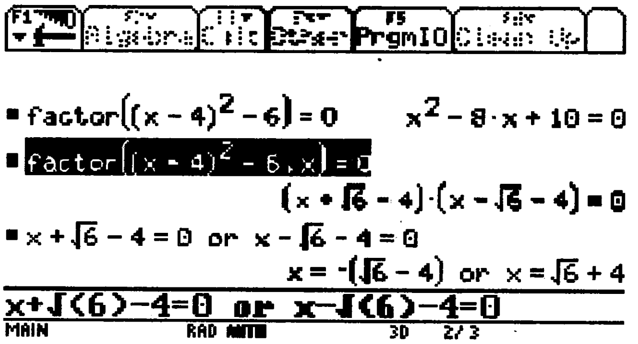
効である。もちろん、[図1]では1行目からすぐ、$((x-4)^2-6=0)+6$ とした方が早い。

また、$(x-4)^2=6$ の式全体に平方根をとると、$|x-4|=\sqrt{6}$ が表示される。中学生にとっては発展的な内容となるが、絶対値記号を用いた方程式に対する意識が高まる。

factor$((x-4)^2-6)=0$ や

factor$((x-4)^2-6=0)$ では、

$x^2-8x+10=0$ のように、因数分解がなされないままの表示が出てくる。



[図2]

何の変数について因数分解を施すのか指定しないと、因数分解された式は表示されない。この場合、xについて因数分解を施す factor$((x-4)^2-6, x)$ という入力が必要になる。あるいは、$x-4$ を他の文字で置き換えて変形を施すといった操作などが、因数分解を経て方程式を解くために必要になる。どのような計画をたてて2次方程式を解こうとするのか、それぞれの手順で必要な操作は何かが、CAS とのやりとりを通して意識される。さらに、CAS 上での独特な入力や操作の仕方を知ることにより、文字式のもつ構文論的な側面（文字式の規約など）を意識したり、暗黙のままに進めていたことがらを再認識することができる。

CAS を用いることにより、数の性質を発見し、追求したり、2次方程式を解く過程を意識しながら解いていくことが促される。CAS の活用により、代数学習を進める上で様々な効果と可能性が期待できる。

一方、CAS を用いて2次方程式を解く場合には、solve や zero キーを使わないという制限を加えることで、方程式を解く過程や変形のよりどころとなる性質が顕在化できる。solve や zero キーの使用ではブラックボックスとなってしまう部分が、制限された状況下における思考の働きにより浮き上がってくる。制限された状況がいかにつくり出されるかが重要な鍵となる。

factor キーの使用の際には、式によって何の変数について因数分解を行うのかを指定しないと、目的とする式を得られない。「CASを用いて私は何をしたいのか」を振り返り、「目的に向けた活動をするために、何に着目すればよいのか」の手がかりを得るためには、他者との議論や他者による操作を鑑賞することが必要となる。学校代数における CAS を活用する環境の設定、他者の存在、他者との相互作用の大切さも浮き彫りとなってくる。

これは、CAS そのものの可能性と、CAS を活用した代数学習の可能性との違いにあたる部分ともいえる。CAS の活用には様々な効果と可能性が期待できつつ、その活用法に関しては賢明な使い方が求められる。また、どうすれば賢明なCASの使い方となるのかなどに関する議論も盛んに行われている。(Ball・Stacy, 2005, Kendel・Stacy, 2005, etc)

2. 研究の目的と方法

本研究の目的は、学校代数における CAS を活用した代数的活動に関する最近の先行研究を分析し、

先行研究からの知見をまとめるとともに、CASを活用した代数的活動をとらえる枠組みの試案を提示することである。研究方法は、CASを活用した代数的活動に関する最近の先行研究のうち、中学校段階から高等学校初学年までに焦点をあてた論稿に焦点をあてて分析する。特に、Kieranの提唱する3つの特性をもつ代数的活動に着目し、その考えを基底におきながら、実際の中学校での授業を念頭にCASを活用した代数的活動をとらえる枠組みの試案を作成する。Kieranのほか、StacyやDrijversなど関連する研究動向も随時追うことにする。

また、中学校での実際の数学授業での運用を念頭におき、静岡県版算数・数学カリキュラムの理念から得られることを、CASを活用した代数的活動をとらえる枠組みに活かす。

Kieranに着目する理由は大きく2つある。

1つは、Kieranの掲げた3つのタイプの代数的活動の枠組みを踏まえて、中学校段階でのCASを活用した代数学習の研究が盛んに行われているからである。CASを活用した代数的活動の研究は、高等学校や大学での活用が多かった。DERIVEなどのソフトの機能を最大限活かそうとすると、高等学校以上にスポットがあたるのは自然な流れといえる。この傾向に対して、中学校段階において、CASを活用した代数的活動や代数学習をKieranらは解明しようとしている。

いま1つは、Kieranの研究の経緯である。Kieranは、初等代数の教授・学習の研究、記号化の過程に関する研究を経て、現在、CASを活用した中学校段階での代数的活動の研究に移行してきている。CASを活用した中学校の授業の実際を考察していく上で、Kieranの研究の経緯は様々な知見を与えるものとなりえる。

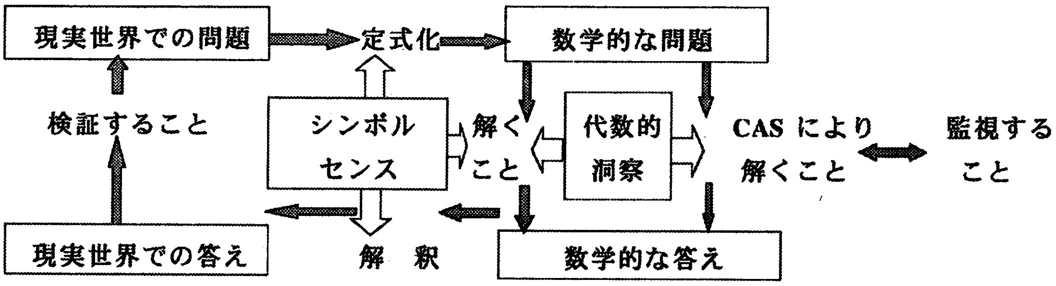
ここで、代数的活動とは代数的な考えを学習者が身につけることを促す学習活動や、代数的な考えを問題解決の際に活かす数学的活動を指している。例えば、記号を用いた数学的表現に表すこと、規則に基づいて式変形を行うこと、文脈をいったん切り離して思考を進めること、式それ自体を対象や要素とみて思考を行うことなどの活動である。最近の学校代数に関わる先行研究では、Algebraic Activityという語が多く使われるようになっている。その背景には、学校数学における代数の重要性(他領域への代数の貢献を含む)、代数の学習指導における代数の考えの強調がある。

3. CASの活用によって促される代数的洞察

PierceとStacyは、CASの活用により学習者に促されるシンボルセンスの部分を「代数的洞察」として抽出する。さらに、CASを活用した代数カリキュラムや評価を設計する上で役立たせるために、その「代数的洞察」の枠組みを提示する。(Pierce・Stacy, 2002)

PierceとStacyは、数学的な問題解決活動におけるシンボルセンスと代数的洞察の位置を、次の【図式1】のように表す。ここでのシンボルセンスとは、FeyやArcaviらによって提唱されたシンボルセンス(記号センス)の考えを用いている。細心の注意をはらいながら電卓(電卓としてのCAS)を使用することにより、学習者の数感覚が養われ、数の計算手続きに対する過重な負担が減っていく。数感覚が養われる場合と同じように、CASの活用を注意深く用いることにより、シンボルセンスが養われるという。また、文字式の計算手続きに対する学習者の過重な負担、計算手続きばかりに追われてしまうことからの脱却が行われる。

この【図式1】に対して、PierceとStacyは次のように述べる。



【図式1】

代数的な理解（代数の規則，代数の意味，代数がいかに使われるか）は、問題解決の過程を通して必要とされる。Arcavi(1994)は、記号理解や記号使用の根本にあるものをシンボルセンスと名付けた。そのシンボルセンスは、数感覚に熟達した人がもつ知識や傾向を含む形で述べられる。【図式1】は、数学を用いて作業を進めるのと同じように、シンボルセンスが現実世界と数学的な世界の橋渡しをする上で本質的な役割を果たすことを表す。先にあげた電話プランの例では、電話プランの特徴を反映させた式を立式するため、不等式の解として問題を数学的に表現するため、不等式を解くため、pとqを含む数学的な答えを得て、それを電話プランの場面に解釈するため、それぞれシンボルセンスは必要となる。しかし、数学的な問題から数学的な答えに移行する部分だけに（【図式1】では右側の縦の列で表される）、CASの活用が影響する。

シンボルセンスのこの部分に、本稿では焦点をあてる。
数学的に定式化された問題で、数学的な答えをみつけるために必要なシンボルセンスの部分を代数的洞察(algebraic activity)と呼ぶことにする。代数的洞察は、CASを活用して数学する(Doing Math）ときに、影響を受けるシンボルセンスの部分である。

【図式1】で指摘したように、シンボルセンスよりも限定された概念である。
しかし、その制限がCASを活用した学習環境での代数カリキュラムや教授を設計する際に役立つ、チェックリストとしての枠組みを形作ることを可能にする。手による、あるいはCASの活用、いずれの場合においても、問題解決を効果的に行うために学習者たちには代数的洞察が必要である。手によって問題解決を行う際に本質的な、技術的であり操作的な代数的技能の多くは、CASを活用した状況では必要とされない。

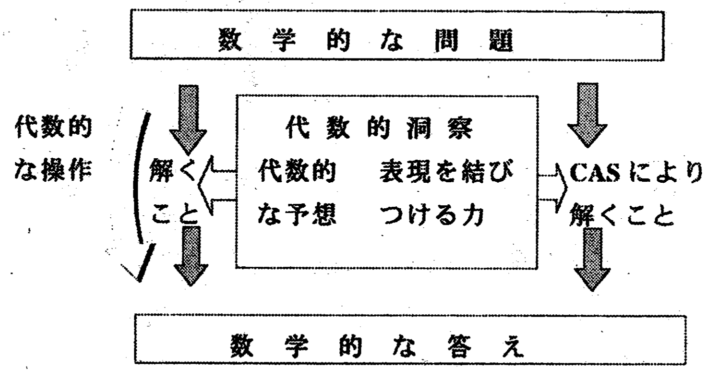
手であろうとCASを用いてであろうと、どのような方法が使われるとしても代数的洞察は【図式1】で示されるように、代数の学習の中で本質的なものである。(Pierce・Stacy, p.623,2002)

CASの活用が影響するシンボルセンスの部分としての「代数的洞察」に対して、さらにPierceとStacyは【図式2】をあげる。【図式1】においては、数学的な世界に翻訳された上での問題から、数学的な答えを導く部分に、代数的洞察という語をあてていた。

代数的洞察に対しては代数的な予想をたてること、数学的な表現を結びつける力の2つの側面を掲げる。代数的な予想とは、数学的な問題から、諸条件を満たす答えを予測したり、期待される結果を読むことである。表現を結びつける力とは、例えば文字式表現（記号表現）とグラフ表現とを関連づけ、意味づけることである。代数的な予想をたてること、数学的な表現を結びつける力により、手による代数的な操作とCASにより解くことが深く関連づけられる。

Pierce と Stacy は、数学的な問題解決活動における「代数的洞察」を【図式１】や【図式２】のように述べた後、代数的洞察をとらえる枠組みを提示する。

代数的洞察が、代数的な予想をたてること、表現を結びつける力の２つから成ることをもとに、要素、共通の例（典型例）を提示する。



【図式 2】

[Pierce と Stacy による「代数的洞察」の枠組み]

側　面	要　素	共通の例（典型例）
1. 代数的な予想	1.1　規約や基本的性質の認識	1.1.1 記号の意味を知ること
		1.1.2 演算の順序を知ること
		1.1.3 演算の特徴を知ること
	1.2　構造の同定	1.2.1 対象の同定
		1.2.2 解決の手段となる要素の集合の同定
		1.2.3 単純な因子の認識
	1.3　鍵となる特徴の同定	1.3.1 形の同定
		1.3.2 優性な語の同定（問題解決において重要な語を同定すること）
2. 表現を結びつける力	2.1　記号とグラフ表現の連結	2.1.1 具体化するための形を結びつけること
		2.1.2 鍵となる特徴を重要な位置に結びつけること
		2.1.3 鍵となる特徴を切片や漸近線に結びつけること
	2.2　記号と数の表現との連結	2.2.1 数の規則性や型を形に結びつけること
		2.2.2 鍵となる特徴を数表での適した増加に結びつけること
		2.2.3 鍵となる特徴を、数表での重要な区間に結びつけること

例えば、「1. 代数的な予想を立てること→1.1　規約や基本的性質の認識」では、CAS の活用により式の表面構造を認識できる。(ｔ＋ｐ)／ｑはｔ＋ｐ／ｑではない。この事実は、CAS に(ｔ＋ｐ)／ｑとｔ＋ｐ／ｑの双方の式を入力して比較したり、注意深くカッコを用いて CAS に式を入力することにより、はっきりする。CAS への式の入力、そして CAS からフィードバックされた式や情報をみることにより、CAS への入力の誤りを見つけたり、CAS 上での約束事を知ったり、式の形とその意味への洞察が行われる。

$(3x-1)^2+5x*(3x-1)$は、$3x-1$以外の因子$4x-1$や$6x-1$などを使って、$(4x-1)(6x-1)$のように因数分解がなされない。展開した多項式のx^2の係数が24，定数項が1で共通すること、複数の式が包含されていることから、$A^2+\square\times A$という式の構造が見抜きにくい。それゆえ、$(3x-1)^2+5x*(3x-1)$の因数分解は学習者にとって容易なものとはいえない。$(3x-1)^2+5x*(3x-1)$の式をCASに入力し、ENTERを押して出力されたものをモニターすることにより、この式の構造や因子が何かを意識することができる。CASで出力された式との対比により、もとの式の構造を探ろうとする活動が起きる。また、CASで出力された式の意味や妥当性をチェックするために、式の構造を同定すること、式の構造を見抜く技能が必要となる。もとの式、CASで出力された式を比較対照し、学習者自身の思考活動をモニタリングしていくことを通して、式の構造をとらえる力を高めていくことにもなる。これは、CASの活用による「1.2　構造の同定」にあたる部分である。

4. CASの活用により促される，過程と対象との二面で式を捉えること

Drijversは、「CASの活用，紙の上での作業，代数的思考」の三つの要素による代数学習の様相に対して、式を過程と対象とでとらえる二面性原理と道具主義の考えに着目した理論的枠組みから、継続的に研究を進めている。(Drijvers, 2003a, 2003b, 2004)

式を過程と対象でとらえることに関わる二面性原理については、GrayとTallやSfardらが、いくつかの先行研究で論じている。Drijversは、二面性原理について次のように述べる。

> 数学的な概念は時折、それが実行された過程として定義される。その一方、他の場面では、より高い段階での過程として作用する対象と考えられる。GrayとTall(1994)はプロセプトの概念として、この考えを詳しく述べている。プロセプトとは、過程（プロセス）と概念（コンセプト）とを結びつけたものである。「過程を構成する複合的な心的対象、この過程によってつくられる概念、一方あるいは双方を表すために使われる記号」としてプロセプトは記述される。GrayとTall(1994)は、数学を学ぶ上での、数学的な概念のもつ多義性の役割を強調する。
>
> $3+5$を例にとれば、$+$それ自体は、足すことや数えることの過程の実行を促す。しかし、$3+5$は加法の結果としての対象を表す。$(3+5)^2$を計算するためには、$3+5$が2乗されている対象ととらえる必要がある。
>
> 代数では、$a+b$の式ではこれ以上計算することができない。それゆえ、$+$は「aとbとの和」としての対象を示す記号である。この多義性の概念に対し、ある場面で過程なのか、対象なのかを決定づける数学的な経験を積むことが、代数を学ぶ上で大変重要である。
>
> 生徒が新たな概念を学ぶときには、過程としての側面が占有する傾向がある。生徒は、アルゴリズムを知り使うために、手続きを実行するために、計算を行う傾向がある。学習が進むと、対象としての側面が加わり、「コインの表と裏の2つの側面」としての過程と対象は一つの概念として統合される。Sfard(1991)は、過程の対象化に対して具象化という語を用いる。この概念は、Dubinsky(1991)による圧縮化の考えによく似ている。Dubinskyは、対象への過程の圧縮化は、反省的抽象化(reflective abstraction)の中での重要な段階と述べる。
>
> (Drijvers, p.243, 2003a)

式を過程と対象の二面からとらえることは、代数学習を深める上で必要不可欠である。

例えば、$2+\sqrt{5}$ を「2に $\sqrt{5}$ を加える，2と $\sqrt{5}$ をたし合わせる，2から $-\sqrt{5}$ をひく」のように、加法あるいは減法の演算が施される式ととらえることができる。演算による操作の過程を意識した見方である。一方、$2+\sqrt{5}$ を加法あるいは減法（$2--\sqrt{5}$）の結果とみて、数 $2+\sqrt{5}$ ととらえることができる。$2+\sqrt{5}$ における演算＋を、これ以上操作できない記号として、さらに $2+\sqrt{5}$ それ自体を1つの実数として対象化する段階である。これは、加法あるいは減法の演算が施される式とみるよりも、深い見方をしている段階である。$2+\sqrt{5}$ に対する「過程の対象化」が行われない限り、実数の見方は深められない。過程の対象化が行われることにより、$(5-2\sqrt{5})+(-3+3\sqrt{5})$ や $3+(-1+\sqrt{5})$ などが、実数あるいは $Q[\sqrt{5}]$ の要素同士による加法であることや、演算の結果が閉じていて、$2+\sqrt{5}$ と同値となることが理解できる。過程の対象化により、$2+\sqrt{5}$ に対する多様な見方、深いとらえができるようになる。

式を過程と対象の二面からとらえることは、学習者にとって容易なことではない。Drijvers がまとめるように、生徒たちは式を操作可能な過程としてとらえがちである。式 $a+b$ に対して、aとbをあわせるという過程の見方を過度に強調し、abとさらに記述する傾向も多くみられる。演算記号が残った状態の式を、対象としてみることに抵抗を感じるのである。例えば、$3a-3$ という式に対して、aと表す傾向も同様の理由である。

式を過程と対象の二面からとらえることは、代数学習を深める上で必要不可欠でありつつ、学習者にとってこの二面性を理解することは容易ではない。この状況に対して、CAS を活用した代数学習が、過程と対象の二面性を理解するために効果的であると Drijvers は考える。

Drijvers の理論的枠組みを支えるもう一つの考えは、道具主義の考えである。ハンマーは実際に使ってみたり、試行錯誤を通しながらその効果的な使い方を体得していかなければ、人にとって意味ある道具とはならない。人が実際に使い、その経験を深めることを通して、単なる「もの」の状態から、その人によって意味ある「道具」となっていく。そうした経験に対し、Drijvers は道具主義の考えを利用する。この道具主義の考えについて、Drijvers は次のようなことを指摘する。(Drijvers, p.244, 2003a)

・道具主義の考えは、認知人間工学から発したものである。また、Vygotsky 理論における道具の考えにも関連する。テクノロジーを活用した数学学習について研究を進めているフランスの数学教育学者の多くは、道具主義の考えを論の展開の中で活用している。

・学習者にとって単なるツール、あるいは人工物であったものが、その学習者にとって使いやすい道具に最終的に変容していく学習過程のことを、道具の発生 (instrumental genesis) と呼ぶ。

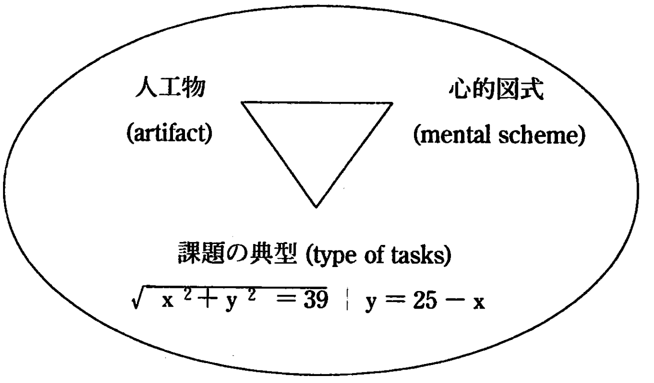
・人工物から道具に進化していくためには、時間と努力の双方が必要となる。ある課題を解決するために必要で、最適なものとしての道具の認識が必要である。人工物から道具にいかに進化するかの過程は、道具の発生を促す心的図式の形成過程でもある。

・道具の発生を促す心的図式には、技術的な側面と心的な側面の双方がある。
技術的な側面とは、目的に至るための道具を用いた行為の系列である。心的な側面とは、テクノロジーを用いた数学学習の環境でいえば、問題解決過程と道具を用いた行為双方に関して、数学的な対象ととらえたり、心的なイメージをもつことである。

・道具を用いた技能やアルゴリズム、および概念形成に関わる洞察は、道具の発生を促す心的図式の中で、密接に結びあっている。

Drijvers は、Vygotsky の理論における「道具」が意味するものも踏襲しながら、道具主義の考えについて、人工物 (artifact), 心的図式 (mental scheme), 課題の類型 (type of tasks) を3つを頂点にもつ、三角形上の図式を提示している。

(Drijvers, p.96, 2003b)



式を過程だけでなく対象を表すものとして二面でとらえる、ある課題を解決する際に必要で最適な道具を意識し、その道具を用いた課題解決の過程や道具それ自体を客観的にとらえるなど、二面性原理や道具主義の考えを踏まえた形で、代数学習の深まりの様相を語ることができる。

Drijvers は、CAS を活用して代数学習の様相が深まる様相を、14 歳から 15 歳の学習者の特徴的な学習活動の分析から解明している。

例えば、直角三角形に関わる次の課題を、CAS を活用して生徒に解かせる場面がある。

「直角をはさむ二辺の長さの和が 31 となる直角三角形があります。斜辺の長さは 25 です。

a. 直角をはさむ二辺のそれぞれの長さはどのようになりますか。

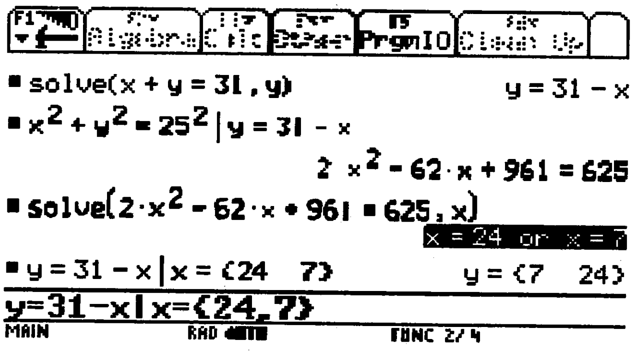
b. 直角をはさむ二辺の長さの和が 31 でなく、35 となる場合、この問題はどのように解けますか。

c. 31 や 25 という与えられた数値を使わずに、この問題を一般的に解きなさい。」

この問題の a では、直角をはさむ二辺の長さをそれぞれ x, y とおくと条件より $x+y=31$, 三平方の定理を適用して $x^2+y^2=25^2$ という 2 つの式を得る。CAS を活用してこの 2 つの式を満たす x や y の値を求めると、例えば次のような手順を踏むことになる。

2 元 1 次方程式 $x+y=31$ を x について解くことが 1 行目で行われる。

「, y」という CAS へ入力が「どの文字について解くか」に関する学習者の意識を高めるという。



解くとは何らかの具体的な数値が得られることである、という認識が方程式を解く場面で多くの学習者たちにみられるという。特に、この課題では直角三角形の直角をはさむ二辺の長さをそれぞれ求めるという具体的な場面であることから、変形した結果には数値がでるはずと考えた学習者が当初多かったという。

CAS の画面の 2 行目は、$x^2+y^2=25^2$ の式に $y=31-x$ を代入する、y を x の式で置き換えることを示している。「どの場所に何を代入するか」(Wherein-Operator) を表す「|」の記号を用いた表現は、学習者の「式の置換に関する概念」を身につけさえていく上で有効であるという。一方、問題の a に関して、$y=31-x$, $y=\sqrt{(25^2-x^2)}$ のようにそれぞれの式を y について解き、等値法による方法で最初解いていた学習者 (Martin) と観察者とのインタビューが掲載されている。

Martin：このxで、それぞれの式のyを、xを使って解いていった。
観察者：はい、それぞれのyに対してなんだね。
Martin：この方法は、置き換える方法といえるのかなあ。
観察者：それぞれ分けて解いた方法なのでは。
Martin：分けて解くことなの。
観察者：yを別々においているから。
Martin：わかった。それぞれ同じように解いていって・・・そうすると次の式が得られるよ。
(Martinは　$31-x=\sqrt{(625-x^2)}$ の方程式を解き続けていった)

(Drijvers, p.252, 2003a)

Martinのとった方法は、数学的には、2つの方程式を共通に満たす解が存在するという仮定のもとに行われるものである。CASの「どの場所に何を代入するか」(Wherein-Operator)という機能よりも、それぞれ解いてから共通部分を考えることを優先している。Drijversによれば、このMartinの方法は $y=31-x$, $y=\sqrt{(25^2-x^2)}$ の方程式の解をグラフとして表現し、2つのグラフの共通部分をCASの上で見いだすという学習活動によって、紙と鉛筆を用いた方法（Martinがとっていた方法）とCASでの解決行動が結ぶつくという。Martinの発想をもとにして、方程式のグラフ解への洞察が可能となっていく。言い換えれば、Martinの方法をきっかけにして、式からグラフへと表現様式を変えて考えてみる、それぞれの表現での解法を比較対照してみることが、方程式を解く上での新たな意味づけをもたらす。

しかし、Martinの方法では、$y_1=31-x_1$, $y_1=\sqrt{(25^2-x_1^2)}$ の式表示のように、変数xとyのうち、ある特定の値の際に成り立っていること、特定の値のもとで2つの式の関係を考えているといった意識が乏しい可能性が高い。複数の文字を含む連立方程式に出会ったら、まずそれぞれの式を1つの文字について解き、その結果得られた式を等号で結べばよい…といった手続きが先行された可能性がある。実際、Drijverは学習者へのインタビューを通して、そうした傾向がみられたとも指摘している。 また、Martinの方法は、式の中の文字を「式で」置き換えることを阻害する要因にもなるという。同じ値を持つからこそ置き換えることができるという意味が、手続きが先行された解法の強調によって妨げられる可能性がある。

前頁の問題のcは、問題のaやbよりも難度の高いものである。学習者の中には、一般の場合を何らかの文字を用いて式で表したとしても、その文字が「特定の数値のかわり」とみなして、式の意味をとらえているものがいる。Küchemann(1981)の述べた文字を評価する現象(phenomenon letter evaluation)がみられるという。

同じ値のときに成り立つという等値法における仮定の意識の欠落、複数の文字のある方程式ではまず一つの文字について解き、その行為を繰り返せばよいという手続きが先行された解法の強調、一般の場合を文字で表した場合でも学習者の意識としては特殊を評価している傾向が学習者にある。

こうした傾向に対して、CASの活用に伴う、CAS上での操作技能と学習者の概念形成や概念の深まりを促す相互作用を繰り返すことが有効であるという。特に、CASでの「どの場所に何を代入するか」(Wherein-Operator)を表す「｜」を用いた式表現と操作、CASで表示された式の意味を確認する行為が、学習者の概念形成や概念の深まりを促す上で有効であるという。

ただし、個別の場合により、CASの活用の有効性が変わるおそれがある。この点について、道具の発

生(instrumental genesis)が学習者に生じたとき、およびその前後での学習者の典型的な学習活動状況についてさらに調べる必要がある。Drijversは、自身の博士論文(2003b)の中で、いくつかの教授実験の事例を挙げている。その事例の中には長期的な教授実験に基づく、個人の活動や思考の変容に迫ったものもある。これらの点については、Drijversに関連する先行研究にもあたりながら、考察を詳細に行う必要がある。

総じて、中学から高校への接続での、学習者のパラメータや置換の理解の様相に焦点をあてているDrijvers(2003a, 2003b, 2005)は、CASの活用によって次の学習活動の促進があると述べる。

・CASを用いて式を置き換えることにより、学習者の内面で式を対象としてみる見方が深まる。手で実行することに比べ、複雑な計算手続きが減るので、式そのものや計算の過程を対象化することが促される。また、対象としての式のとらえにより、構造的な特徴を見いだす傾向も強まる。

・CASの画面上で式を入力したり、式を操作するための規則（統語論的側面）を技術的に習得することにより、置き換えることの意味、パラメータの意味、どの文字に着目して方程式を解くのかの意味の形成が、学習者の内面で促される。

・代数学習における道具の発生、課題の類型－人工物－心的図式の道具主義的三角形の実際の様相については、その様相がより見やすい教授実験の場の設定や、典型的な学習者の学習活動の事例収集を通して、さらに解明する必要がある。

5. Kieranの提唱する3つの代数的活動

Drijversが一連の研究で焦点をあてているのは、中学校から高校への接続あるいは高校の段階である。Stacyらは、高校の段階あるいは高校から大学への接続に焦点をあてる。このように、CASを活用した代数学習の対象の多くは高校段階である。こうした傾向の一方、近年、CASを活用した代数学習を中学校段階で積極的に行い、その可能性と課題について検討する研究も増えつつある。その典型が、Kieranによる最近の研究である。

例えば、Kieran・Guzman(2005)は、整数に関する原理の生成を学習者に促す、電卓としてのCASを活用した学習活動について分析をしている。Kieranらは「1から9までの自然数を用いた四則計算で、1000までの自然数を、5以下のステップで0にしてみよう」というFive Steps to Zeroの課題をカナダとメキシコの中1～中3の学習者に与え、それぞれ1週間ずつ学習が深化していった様子を分析している。なお、この課題では、851と853の2つの数は特別な答えとなっている。それゆえ、実際の授業では学習者とのやりとりをもとに、Five Steps to Zeroの条件に満たすものから851と853の2つの数を除外している。この2つの数が特別であること自体も、電卓としてのCASの活用を通して学習者に発見させている。

Five Steps to Zeroとは、例えば151に対して、次のような計算を行うことである。

151 − 1 = 150
150 ／ 2 = 75
75 ／ 3 = 25
25 ／ 5 = 5
5 − 5 = 0

この場合、5回の操作で0に至っているので、Five Steps to Zeroの条件を満たしている。
しかし、2つの数2, 3で割り切れるので、当然2×3でも割り切れる。それゆえ、151から0に至る

ステップの回数は4となる。実際の学習活動の中でも、ステップの回数を減らすためにはどうすればよいかがかなり議論されている。電卓としてのCASの活用により、大きな数での試行を通して、次の学習活動が促されたと指摘する。

・合成数であることを見抜く方法の生成
・一見して合成数であると見抜けない場合、あるいは合成数ではない場合、その数から1や2など小さな数をたしたり引いたりして、合成数にする方法の共有
・倍数の見分け方に関する原理の生成
　(例えば、9の倍数かどうかを、それぞれの桁の数に着目して判断する方法の生成)
・9を因数とみて、9の倍数で目的とする数に近づけるためのうまい方法の生成
　(ステップの回数を減らすためには、9でわる活動を入れた方がよいという議論をもとに)
・素因数分解の一意性、除数と余りの関係
　因数が3つある自然数の特性の認識
・素因数分解した形からステップを考える方法の生成

また、CASを活用した探求と議論を通して、学習者は数の潜在能力を引き出すと共に、その活動を通して学習者にとって新たな知識や考えが生成されたと述べる。

同様に、CASを活用した学習活動により、既知のことがらと課題解決の過程との相互作用が促された他の事例として、Cedillo・Kieran(2003)はメキシコの15校の中学校で組織的に行われたプロジェクトの研究成果を挙げている。このプロジェクトでは、CASを活用して「数列や幾何学的なパターンから生じる一般性を表現し、その一般性の意味を形成する活動」や「CASでの文字式の同値変形の操作を通して、同値の概念を形成する活動」が行われている。いずれの場合もCASを活用した代数の学習活動に関して、代数的活動(Algebraic Activity)という表現を用いている。また、代数的活動という表現を強調している。

こうした実践研究のよりどころとなっているのが、Kieranの掲げる代数的活動の3つの分類である。Kieran(2003, 2004)は、学校代数での学習活動には3つのタイプ「生成(generational), 変形(transformational), グローバルな内省(global-metalevel)」があると指摘する。第12回のICMI Studyでの Kieranの講演記録によれば、3つの活動は次のような特性を持つという。

(Kieran, 2004, Cedillo・Kieran, 2003, Kieran・Guzman, 2005)

① 生成の活動

1つ目の代数的活動 －生成の活動－ は、代数の対象として式や等式を形作ることを含む。典型的な例として、次の3つが挙げられる。

・未知や量に関する問題場面を表した方程式を形作ること(Bell, 1995)
・幾何学的な規則性や数列からの生成される一般性を表すこと(Mason,1996)
・数の関係を決める規則を式で表すこと(Lee and Wheeler,1987)

生成の活動で焦点があたるものは、状況、性質、規則性、関係の表現であり、解釈である。代数の最初の意味形成は、この領域の活動に位置づけられる。

② 変形の活動

2つ目の代数的活動 －変形の活動(規則に基づいた活動)－は、例えば、因数分解、展開、置

換、多項式の加法や乗法、多項式での冪乗、方程式を解くこと、式を簡単にすること、同値な式や等式を伴った作業を行うこと、などの表現で語られる活動を含む。このタイプの活動の重点は同値関係を保つための式や等式の変形に関わる。

③ グローバルな内省の活動

3つ目のタイプの代数的活動 －グローバルな内省の活動－ は、代数を道具として用いることである。しかし、この活動は代数だけに限定されない。グローバルな内省の活動は、問題解決、モデリング、構造に気づくこと、正当化すること、証明すること、予測することなどを含む。これらの活動は必ずしも代数を必要としていない。しかし、代数からこれらの活動を切り離そうとすればするほど、内省の活動が広い範囲に使えることや、文脈から自由であることを知る。あるいは代数を用いて問題解決をすることの大切さや必要性を味わう。グローバルな内省の活動を引き起こすことにより、数学の中での代数の役割に気づく。さらに代数の役割を深化させることが促される。

Kieranの提唱する代数的活動とは、その活動の特性により3つに分類される。記号を用いた数学的表現で対象を表現する活動、規則に基づいて形式を変えていく活動、道具として代数を使い、そのよさがわかるグローバルな内省の活動である。これらの活動は、三輪(2000)の提唱する文字式使用の図式における「表す，変形する，読む」という3つの過程によく似ている。表されるものから表すものへの移行過程としての「表す」過程は、生成の活動に対応する。文字式同士の間の移行過程としての「変形する」過程は、変形の活動に対応する。「読む」過程とグローバルな内省の活動が対応するが、Kieranの提唱するグローバルな内省の活動の方が広い意味を持つ。また、三輪の文字式使用の図式では、表現様式を式に限定し、式のもつ言語学的側面に焦点をあてて議論を行っている。これに対して、Kieranの場合にはグラフ表現など、式以外の表現様式も念頭に議論を行っている。三輪の文字式使用の図式における「表す，変形する，読む」という3つの過程を内包する概念として、Kieranによる「生成の活動，変形の活動，グローバルな内省の活動」が位置づけられそうである。この点については「読む」活動とは何かを再検討すると共に、global-metalevelという表現に込めたKieranの強い意図を読み解くことや、Kieranに関わる研究、Kieranに影響を受けた研究動向の分析から、考察を行うこととする。

6. 静岡県版算数・数学カリキュラムの理念から得られること
－「習得と整理」「探求と発見」の視点－

Kieranの提唱する3つの代数的活動の考えを、実際の中学校での数学授業に活かすために、静岡県版算数・数学カリキュラムの理念に着目したい。確かな学力の育成という視座で作成された静岡県版算数・数学カリキュラムでは、次のことが重視されている。

ア．個々の算数・数学授業を細切れでとらえるのではなく、単元全体を見通した授業を形成していくこと。

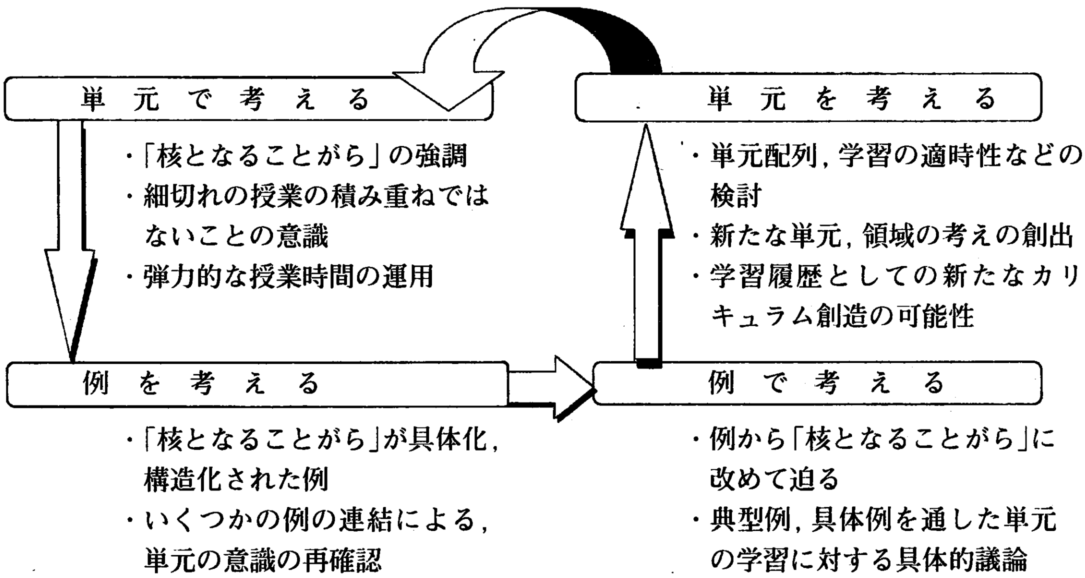
イ．単元全体の学習指導の中で何を培いたいのか、何が本質的なことがらなのかを追求していくこと。

ウ．単元全体を見通した学習指導の中で培うことを具体化し，構造化した例について考えること。具体化，構造化された例を考える学習活動を通して、コーティングされたことがらをつかみとって

いくこと。

エ. いくつかの典型例で考えることを通して、改めて単元全体で何が大切なのかを問うこと。
(可能であれば) さらに推し進めて、単元それ自体も問うていくこと。

ア～エでは、単元で考えること、単元全体で大切にしたいこと (核となることがら)を意識すること、核となることがらを具体化した例を考えること、いくつかの例から核となることがらを再検討していくこと、などの思想が込められている。算数・数学の学習指導における
「単元で考える, 例を考える, 例で考える, 単元を考える」ことの重視である。
なお、単元全体で大切にしたいこと (核となることがら) は、それぞれの単元ごと、3つくらいの文章で示されている。



【図式3】

「核となることがら」が具体化された例を考えることを通し、「核となることがら」それ自体を洞察すること (【図式3】の左側) は、単元で培いたいことを習得し、例を通して理解や思考を整理する段階といえる。一方、いくつかの典型的な例から、「核となることがら」に改めて迫っていくこと (【図式3】の右側) は、新たな観方を得ることや、「核となることがら」の更なる一般化 (本質的なものが何か) を目指す段階である。これは、探求し、新たな観方などを発見する学習活動といえる。

また、【図式3】の矢印は、習得と整理、探求と発見が循環して行われる様子も示している。この点は、提言「静岡の子どもに確かな学力を」(静岡県教育委員会, 2004) にみられる、市川伸一による習得と探求の2軸モデルの発想と同じである。以上のことから、習得と整理、探求と発見という、学習の様相に関する視点を得ることができる。

7. CASを活用した代数的活動をとらえる枠組みとその事例

宮崎ら (2005) は、「3次元動的幾何ソフトの利用による教材開発の枠組み」として、次のような2つの視点を柱とした3×2の枠組みを設定している。ここで2つの視点とは、図形を考察する活動と、空間において図形を考察する方法を指す。

この枠組みの【A】～【F】に関して、次のような事例を宮崎らは掲げる。

「A , B , Cには、中学校図形領域カリキュラムの空間図形の教材(例：正八面体の理解【A】)などとともに、「立方体から正八面体の作図」【B】や「相似な正四面体の体積比」【C】などが入る。
一方、D , E , Fには、従来の平面図形の教材を空間でとらえることにより概念を一層理解できる教材（例：「折り返しと線対称の関係」【D】）や、基本的な作図の考えを空間図形の作図にいかす教材（例：「円錐に内接する球の作図」【E】）などとともに、平面図形の証明の適用範囲を空間の図形に広げる教材【F】などが該当する。」 (宮崎ほか, p.144, 2005)

視点Ⅰ ＼ 視点Ⅱ	概念の理解 推測や検証	作　図	証　明
次元の移行を伴わない考察	【A】	【B】	【C】
次元の移行を伴う考察	【D】	【E】	【F】

【3次元動的幾何ソフトの利用による教材開発の枠組み】

図形と代数という学習内容の違いがあれど「道具としての3D-DGS or CASの活用－数学的課題－メンタルシェマ」の三角形状のモデルで、学習活動をとらえようとする点で、宮崎らによる3D-DGSの活用による図形の教材開発の枠組みとCASを活用した代数的活動との類似点が多い。(Drijvers,2003b, Lagrange,2005)

そこで、3D-DGSの活用による教材開発の枠組みの発想を参考に、Kieranの述べる代数的活動に基礎づけられた「CASを活用した代数的活動の枠組み」を次のように設定する。

視点１：活動の特性としての「生成する活動, 変形する活動, 広域の内省的活動」
視点２：学習の様相としての「習得と整理, 探求と発見」
視点３：視点１と視点２をクロスさせた代数的活動の具体例を設計・実践

【CASを活用した代数的活動の枠組み】

学習の特性 ＼ 学習の様相	生成の活動	変形の活動	グローバルな内省の活動
習得と整理	A	B	C
探求と発見	D	E	F

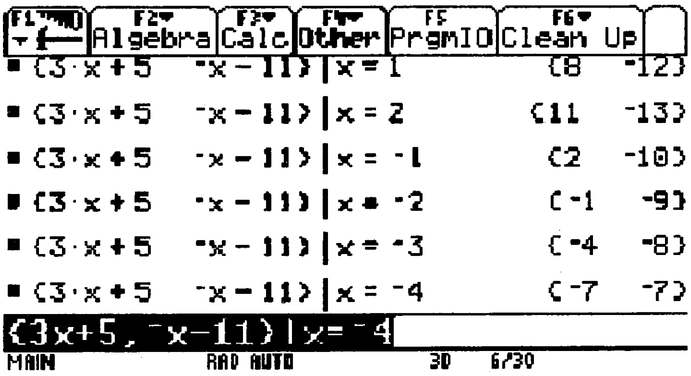
この代数的活動の枠組みに関して、数学的な問題から数学的な答えが出てくる領域に焦点をあて、事例を次のように提示する。

[図3]・・・A， [図4]・・・B， [図5]・・・C， [図6]・・・D
[図7]・・・F　（A～Cは中1, D・Fは中3を想定)

Eについては、規則を用いた変形の活動での同値性の保存について、関数的なアプローチから、グラフの形状で同値性が保たれることを鑑賞することが事例として挙げられる。

Aの例：1次方程式の導入としての左辺，右辺から式の値を近似していくこと

1次方程式に関する中1の数学教科書の記述では、「等式を成り立たせる文字の値について調べよう」(大日本図書)，「方程式の解を，xにいろいろな値を代入して求めてみよう」(東京書籍)など、文字に数値を代入することを通して方程式の解を求める学習活動が促される。



[図3]

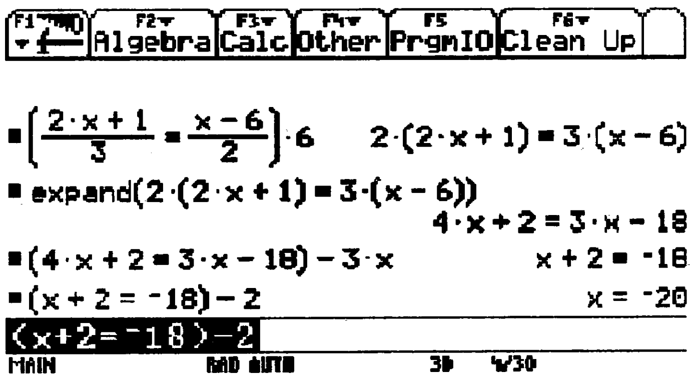
[図3]では、$3x+5={}^{-}x-11$ の1次方程式を左辺と右辺に分けてとらえ、同じxの値に対する「式の値の比較」をして、つりあう部分を探していくことができる。

$\{3x+5, {}^{-}x-11\} \mid x=$　の部分は共通であるので、数値を次々に入力し、ENTERを押せば、左辺と右辺の式の値はすぐ出力されるという簡便さがある。(T^3 Japan, 2005)

Bの例：等式の性質に着目して1次方程式を解くこと

CASを活用して一次方程式を解くためには、「両辺に同じ操作を施す」という等式の性質をふんだんに使うことが要求される。

また、両辺から2を引く場合には、$(x+2={}^{-}18)-2$　のように、方程式それ自体を一つのかたまりとみて操作を施すことが求められる。



[図4]

手で計算する場合との文法面での顕著な違いがあるが、「両辺に同じ操作を施す」という規則に基づいた変形の活動を行っていること、逆算による算術的な方法との違いを強く意識づけるためには大変有効である。

Edwarads(2003)は、CASを活用して1次方程式を解くことは、解く過程が対象化されること、何に基づいて式の変形を行っているのかという規則への学習者の関心を高める上で大きな効果があると述べる。1次方程式と同じように、solveのコマンドを使わずに、expandやfactorのコマンドだけで(制限された環境下)、2次方程式を解く学習活動も同様のことがいえる。

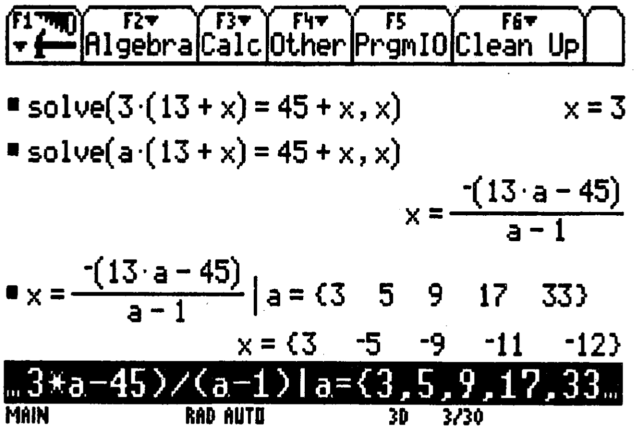
Cの例：１次方程式で解ける年齢算の一般解をパラメータ表示した方程式への数値の代入を通して、考察すること

「現在、達也君は 13 歳、達也君の父は 45 歳である。父親の年齢が達也君の年齢の□倍になるのは何年後だろうか。

(1) □＝3，5，9
　それぞれの場合で求めてみよう。

(2) □が (1) 以外の場合では
　どうなるか。」

この年齢算の一般解では、父親と達也君の年齢差 32 の約数がポイントとなる。

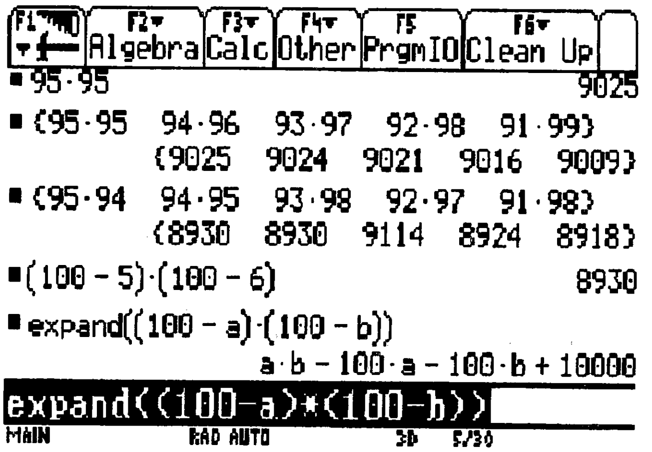


[図 5]

solve(3・(13 ＋ x) ＝ 45 ＋ x , x)の 3 の部分に次々と数値を入れ、その結果を画面上でみながら、文脈に沿った一般解を調べる方法から、[図 5] のようにパラメータ表示をして、パラメータに数値を代入しながら得られた結果の意味を解釈する方法がある。パラメータの意味を理解するためには、CAS で行った学習者自身の活動を振り返って検討することが有効といわれる。(Drijvers, 2003a, 2003b)

Dの例：95 × 95 の簡便算から、95 × 94 などの 100 に近い 2 数の積を簡単に求める方法の探求へ、一般化を図ること

100 に近い 2 数の積は、100 との差に着目すると簡単に求めることができる。95 × 94 を擬変数とみなし代数的な洞察をすること、その簡便な計算方法と (100 − a)(100 − b) の展開式や変形した形の式との間で、意味の関連づけが行える。見方によれば、これはＣの活動ともいえる。ここでは、CAS 上での数式の形と文字式の形を結びつけるという意味で、Ｄの事例とした。



[図 6]

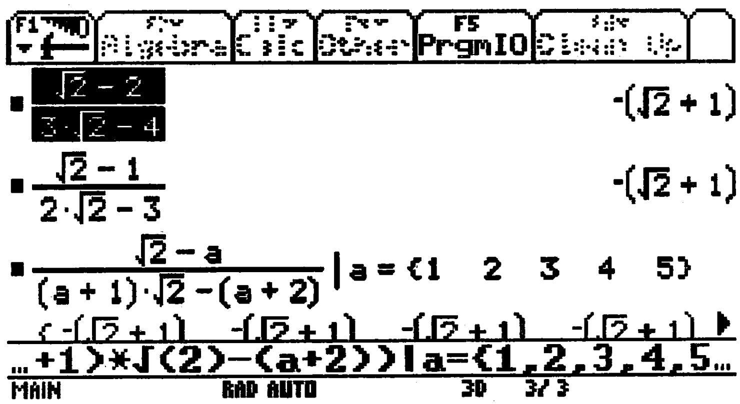
Ｆの例：Q [√ 2] の構造を洞察すること

(√ 2 − 1) ／ (2√ 2 − 3),
(√ 2 − 2) ／ (3√ 2 − 4),
(√ 2 − 3) ／ (4√ 2 − 5),
・・・ などの規則性をもった数は、CAS 上ではみな⁻ (√ 2 − 1) を示す。

a＋b$\sqrt{\ }$2の形の数が「１つの実数」を表すことの再認識と共に、a＋b$\sqrt{\ }$2の形の数同士の計算結果はどうなるのかという洞察を生む。

(Lagrange, 2005)

Q［$\sqrt{\ }$2］の構造の洞察は、中学３年の多項式の発展的扱いといえるが、CASの活用により複雑な計算が省かれ、計算結果を鑑賞しながら考察できるというよさがある。



［図7］

8. まとめと今後の課題

数式処理電卓などのCAS(Computer Algebra Systems)を活用した代数学習により、式や式の変形の過程を対象としてとらえる活動が促される。CASの画面上で文字式の変形などを行うことを通し、文字式の規約を改めて意識することができる。CASの活用によって促進される、こうした学習活動が、Kieran, Drijvers, Stacyらの先行研究より解明されつつある。

本研究の目的は、CASを活用した代数的活動に関する最近の研究のうち、中学校段階から高等学校初学年までに焦点をあてた論稿に焦点をあてて分析すると共に、Kieranの提唱する３つの特性をもつ代数的活動に着目してCASを活用した代数的活動をとらえる枠組みを提案することであった。

本稿では、PierceとStacy, Drijvers, Kieranに焦点をあて、先行研究の動向をまとめていった。本研究で得られたことは次の通りである。

① CASを活用した代数的活動をとらえる枠組みとは、「生成，変形，内省」の３つの活動の特性と「習得と整理，探求と発見」の２つの学習の様相から成るものである。
なお、「生成，変形，内省」はKieranによる，記号を用いた数学的表現で対象を表現する活動，規則に基づいて形式を変えていく活動，道具として代数を使うことができる、そのよさがわかるグローバルな内省の活動を指す。

② CASを活用した代数的活動をとらえるために、シンボルセンスの部分としての代数的洞察に着目し、代数的な予想をたてること、数学的な表現を結びつける力という２つの代数的洞察の側面、CASにより解くことと代数的な操作との関連づけ（監視すること）などに着目した先行研究がある。

③ 式を過程と対象の二面でとらえることをCASの活用は促し、人工物であったCASが道具になる過程（道具の発生）における心的図式の変容に焦点をあてた先行研究がある。

今後の課題は、次の２点である。

(a) CASを活用した代数的活動に関わる先行研究のさらなる分析から、代数的活動をとらえる枠組みを再検討する。特に、Kieranの提唱するグローバルな内省の活動が具体的に何を表し、その活動が生成や変形の活動にどのように関わるのかを先行研究の分析を通して明らかにしていく。

(b) 中学校数学に焦点をあてたCASを活用した代数的活動の典型例の作成、および授業実践を通した知見（可能性と課題）を収集する。

【附記】 本研究は，平成17年度科学教育研究費補助金「基盤研究 (C)　CASを活用した代数カリキュラムと教授単元の開発に関する研究」(課題番号17530656)の交付を受けて行われた研究成果の一部である。

本稿は、第38回日本数学教育学会数学教育論文発表会論文集所収論文「CASを活用した代数的活動に関する基礎的研究」のうち、CASを活用した代数的活動の先行研究の分析の部分などを大幅に加筆し、修正を加えた論文である。

【参考文献】

平山諦 (1986). *東西数学物語*. 恒星社

両角達男 (2005). *範例的教授・学習理論に基づく数学授業の教授と数学的活動に関する研究.* 平成14年～16年度科学研究費補助金研究成果報告書, pp.1-189

両角達男 (2004). シンボルセンスの育成を促す学習活動に関する研究. *第37回数学教育論文発表会論文集*, pp.289-294, 日本数学教育学会

両角達男 (2005). 代数学習におけるシンボルセンスの育成を促す活動. *静岡大学教育学部研究報告(教科教育学篇) 第36号*, pp.87-97, 静岡大学教育学部

Lyn Arthur Steen 編. 三輪辰郎訳 (2000). *世界は数理でできている.* 丸善

Lynda Ball,Kate Stacy(2005). Teaching Strategies for Developing Judicious Technology Use, *Technology-Supported Mathematics Learning Environments,* Sisty-Seventh Yearbook, pp.3-16, NCTM

Margaret Kendel, Kate Stacy, Robin Pierce(2005). The Influence of a computer algebra environment on teachers' practice, *The Didactical Challenge of Symbolic Calcullators,* pp.83-112, Springer

Robin Pierce, Kate Stacy(2002).Algebraic Insight: The Algebra Needed to Use Computer Algebra Systems, *Mathematics Teacher,* pp.622-627, Volume95, Number 8, NCTM

Drijvers(2003a).Algebra on Screen, on Paper, and in the Mind, *Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education,* pp.241-267, NCTM

Drijvers(2003b). *Learning algebra in a computer algebra environment.* CD- β Press. Freudenthal Institute

Kieran(2004).The Core of Algebra: Reflection on its Main Activitis, pp.21-51,
Research on the Role of Technological Environments in Algebra Learning and Teaching,pp.99-152, *The Future of the Teaching and Learninh of Algebra,* Kluwer/ Springer

Tenoch Cedillo, Carolyn Kieran(2003).Initiating Students into Algebra with Symbol-Manipulating Calcuators, *Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education,* pp.219-239, NCTM

Carolyn Kieran, Jose Guzman(2005).Five Steps to Zero: Students Developing Elementary Number Theory Concepts When Using Calculators, *Technology-Supported Mathematics Learning Environments,* Sisty-Seventh Yearbook, pp.35-50, NCTM

三輪辰郎 (2000) 文字式の指導に関する重要な諸問題, ICME9 Regular Lecture, *(筑波数学教育研究第20号所収論文)*

宮崎樹夫ほか (2005) 中学校数学における3次元動的幾何ソフトの利用に関する研究. *日本科学教育学会年会論文集29,* pp.143-144, 日本科学教育学会

静岡県教育委員会 (2005). *静岡県版カリキュラム　算数・数学科*