

## 円柱穴を有する無限体の一般化された熱弾性問題\*

古川俊雄\*<sup>1</sup>, 野田直剛\*<sup>2</sup>, 芦田文博\*<sup>3</sup>Generalized Thermoelasticity for an Infinite Body  
with a Circular Cylindrical Hole

Toshio FURUKAWA, Naotake NODA, and Fumihiko ASHIDA

A one-dimensional generalized thermoelasticity is presented based on Lord and Shulman's Theory which involves one relaxation time of the thermoelastic process. This theory has been developed in an attempt to eliminate the paradox of an infinite velocity of thermoelastic propagation inherent in the classical one. The analytical object of this paper is an infinite body with a circular cylindrical hole. The boundary condition is that a constant heat flux is flowing into the infinite body so that the displacement at a circular cylindrical hole is constrained. An approximate analysis for short times is carried out because it is very difficult to obtain an exact solution. The numerical results of the effect of the relaxation time on displacement, temperature and stress distributions are shown.

**Key Words:** Elasticity, Thermal Stress, Generalized Thermoelasticity, Lord and Shulman's Theory, Relaxation Time, Infinite Body, Circular Cylindrical Hole, Short Times Solution

## 1. 結 言

Chester<sup>(1)</sup>は、巨視的なエネルギー保存式と熱流動式を用いて固体内に第二音波(熱波)が存在する可能性について議論した。その後Ackermanら<sup>(2)</sup>とAckermanとOverton<sup>(3)</sup>は、固体ヘリウムに対する実験結果より、第二音波が実際に固体内に生じることを示した。

古典線形熱弾性理論では、等方等質の弾性体が熱的乱れを受けると、その源から無限に離れた位置でも瞬間にその影響を受ける、すなわち熱波の速度が無量大という物理的に不合理な結果を生じる。その矛盾をなくすため、すなわち熱波が有限の速度であることを前提として古典線形熱弾性理論を修正した一般化された熱弾性理論が二つ提案されている。それは、LordとShulmanの理論<sup>(4)</sup>と、GreenとLindsayの理論<sup>(5)</sup>である。前者は熱伝導のフーリエの法則を修正し、一つの緩和時間を導入することにより、熱波が有限であることを組み入れた熱弾性理論であり、後者はエネルギー方程式とDuhamel-Neumannの関係式を修正し、二

つの緩和時間を導入することにより熱波が有限速度であることを考慮した熱弾性理論である。現在まで両理論に対し、基本的考察、例えば、相反定理、解の唯一性、エネルギー法則等について数多くの研究が報告されている。しかし、これらの理論を用いて理論解析を行い、熱波が温度や熱応力に具体的にどのように影響するかを検討した研究報告は少ない。

Francis<sup>(6)</sup>はLordとShulmanの理論の一つの緩和時間の値をいくらかの材料に対し与えている。しかし、GreenとLindsayの理論に対する二つの緩和時間の存在は今のところ実験で確かめられていない<sup>(7)</sup>。そこで、本研究では、LordとShulmanの理論による一般化された熱弾性の一次元問題を理論解析し、熱波が温度、熱応力等に及ぼす影響について検討を行った。解析対象は円柱穴を有する無限体であり、境界条件としては、円柱穴より一定の熱量が流入し、円柱穴の変位が拘束される場合を扱った。この種の問題では、厳密解を求めるのは困難であるため、短時間に対する近似解析を行った。数値計算で、緩和時間の変位、温度ならびに熱応力分布に及ぼす影響について検討し、それらの結果を図示した。

\* 昭和63年7月15日 東海支部浜松地方講演会において講演、原稿受付 昭和62年12月26日。

\*<sup>1</sup> 正員、福井大学工学部 (〒910 福井市文京3-9-1)。

\*<sup>2</sup> 正員、静岡大学工学部 (〒432 浜松市城北3-5-1)。

\*<sup>3</sup> 正員、津山工業高等専門学校 (〒708 津山市沼624-1)。

2. 解 析

半径  $a$  の円柱穴を有する無限体の円柱穴から一定熱量  $q_0$  が流入し、円柱穴での変位が拘束されている場合の一般化された熱弾性の次元問題を考える。

半径方向ひずみ  $\epsilon_{rr}$ 、円周方向ひずみ  $\epsilon_{\theta\theta}$  は

$$\epsilon_{rr} = u_{,r}, \quad \epsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r} \quad \dots\dots\dots (1)$$

で与えられる。ただし、 $u$  は半径方向変位、コンマはそれに続く変数による微分を表す。

応力-変位関係式は次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \end{bmatrix} = 2\mu \begin{bmatrix} u_{,r} \\ u/r \end{bmatrix} + \lambda \left( u_{,r} + \frac{u}{r} \right) - (3\lambda + 2\mu)\alpha T \quad \dots\dots\dots (2)$$

ただし、 $\sigma_{rr}$ 、 $\sigma_{\theta\theta}$  はそれぞれ半径応力、円周応力であり、 $\lambda$ 、 $\mu$  はラメの定数、 $\alpha$  は線膨張係数である。

変位で表した運動方程式は、

$$u_{,rr} + \frac{1}{r}u_{,r} - \frac{u}{r^2} - \zeta\alpha T_{,r} = \frac{1}{c_1^2}u_{,tt} \quad \dots\dots\dots (3)$$

となる。ただし、 $c_1$  は縦波の伝ば速度、 $\zeta = (1 + \nu)/(1 - \nu)$  であり、 $\nu$  はポアソン比である。

フーリエの法則による熱伝導方程式は、熱波の伝ば速度が無大とみなせるので、現実とは一致しない。そこで Lord と Shulman はフーリエの法則を修正することにより、この不都合を取り除いた理論を展開している。彼らの理論によれば、一般化された熱弾性における熱伝導方程式は、次元の場合には

$$\begin{aligned} x \left( T_{,rr} + \frac{1}{r}T_{,r} \right) &= T_{,t} + t_0 T_{,tt} \\ &+ \frac{\delta}{\zeta\alpha} \left[ u_{,r} + \frac{u}{r} + t_0 \left( u_{,r} + \frac{u}{r} \right)_{,t} \right]_{,t} \quad \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

で与えられる。ただし、 $x$  は温度伝導率、 $t_0$  は緩和時間、 $\delta$  は連成係数である。

$T_0$  を基準温度とし、無次元量

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{r}{a}, \quad \tau = \frac{xt}{a^2}, \quad \theta = \frac{T}{T_0} \\ \left[ \frac{\rho\rho}{\theta\theta} \right] &= \frac{1}{(\lambda + 2\mu)\alpha T_0} \begin{bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \end{bmatrix}, \quad \beta = \frac{x}{c_1 a} \\ U &= \frac{u}{\alpha a T_0}, \quad \tau_0 = \frac{xt_0}{a^2} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

を導入して式(2)~(4)を無次元化すると、

$$\left[ \frac{\rho\rho}{\theta\theta} \right] = \left[ \frac{1}{\eta} \right] \left( U_{,\rho} + \frac{U}{\rho} \right) \mp (1 - \eta) \frac{U}{\rho} - \zeta\theta \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$U_{,\rho\rho} + \frac{1}{\rho}U_{,\rho} - \frac{U}{\rho^2} - \zeta\theta_{,\rho} = \beta^2 U_{,\tau\tau} \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\theta_{,\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\theta_{,\rho} - (\theta + \tau_0\theta_{,\tau})_{,\tau}$$

$$= \frac{\delta}{\zeta} \left[ U_{,\rho} + \frac{U}{\rho} + \tau_0 \left( U_{,\rho} + \frac{U}{\rho} \right)_{,\tau} \right]_{,\tau} \quad \dots\dots\dots (8)$$

となる。ただし、 $\eta = \nu/(1 - \nu)$  である。

初期条件

$$\tau = 0; \quad U = U_{,\tau} = 0, \quad \theta = \theta_{,\tau} = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

の下で式(6)~(8)をラプラス変換すると、

$$\left[ \frac{\rho\rho^*}{\theta\theta^*} \right] = \left[ \frac{1}{\eta} \right] \left( U_{,\rho}^* + \frac{U^*}{\rho} \right) \mp (1 - \eta) \frac{U^*}{\rho} - \zeta\theta^* \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$U_{,\rho\rho}^* + \frac{1}{\rho}U_{,\rho}^* - \left( \beta^2 p^2 + \frac{1}{\rho^2} \right) U^* - \zeta\theta_{,\rho}^* = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\begin{aligned} \theta_{,\rho\rho}^* + \frac{1}{\rho}\theta_{,\rho}^* - (\tau_0 p + 1)p\theta^* \\ = \frac{\delta}{\zeta} p(\tau_0 p + 1) \left( U_{,\rho}^* + \frac{U^*}{\rho} \right) \quad \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

となる。ただし、\*はラプラス変換を表し、 $p$  は変換パラメータである。

式(11)、(12)を解くと次式が得られる。

$$U^* = \zeta [A_1 \xi_1 K_1(\xi_1 \rho) + A_2 \xi_2 K_1(\xi_2 \rho)] \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\begin{aligned} \theta^* = -(\xi_1^2 - \beta^2 p^2) A_1 K_0(\xi_1 \rho) \\ - (\xi_2^2 - \beta^2 p^2) A_2 K_0(\xi_2 \rho) \quad \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

ただし、 $A_1$ 、 $A_2$  は積分定数、 $K_i(\ )$  は  $i$  次の第二種変形ベッセル関数、 $\xi_1$ 、 $\xi_2$  は次式を満足する正根である。

$$\begin{aligned} \xi^4 - [1 + (\beta^2 + \tau_0)p + \delta(\tau_0 p + 1)]p\xi^2 \\ + (\tau_0 p + 1)\beta^2 p^3 = 0 \quad \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

式(15)から

$$\begin{aligned} \xi_{1,2}^2 = (p/2) \{ B_0 p + B_1 \pm [(B_0^2 - 4\tau_0 \beta^2) p^2 \\ + 2(B_0 B_1 - 2\beta^2)p + B_1^2]^{1/2} \} \quad \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

となる。ただし、

$$B_0 = \beta^2 + (1 + \delta)\tau_0, \quad B_1 = 1 + \delta \quad \dots\dots\dots (17)$$

である。式(10)に式(13)、(14)を代入すると、

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\rho\rho^*}{\theta\theta^*} \right] = -\zeta \left[ \frac{1}{\eta} \right] [A_1 \xi_1^2 K_0(\xi_1 \rho) + A_2 \xi_2^2 K_0(\xi_2 \rho)] \\ \mp (1 - \eta) U^* / \rho - \zeta\theta^* \quad \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

境界条件は、

$$r = a; \quad u = 0, \quad -kT_{,r} = q_0 H(t) \quad \dots\dots\dots (19)$$

で与えられる。ただし、 $k$  は熱伝導率、 $H(\ )$  はヘビサイドのステップ関数である。

式(19)を無次元化し、さらにラプラス変換すると、

$$\rho = 1; \quad U^* = 0, \quad \theta_{,\rho}^* = -Q_0/p \quad \dots\dots\dots (20)$$

となる。ただし、 $Q_0 = aq_0/kT_0$  である。

式(20)に式(13)、(14)を代入すると、

$$\left. \begin{aligned} A_1 \xi_1 K_1(\xi_1) + A_2 \xi_2 K_1(\xi_2) &= 0 \\ A_1 (\xi_1^2 - \beta^2 p^2) \xi_1 K_1(\xi_1) \\ &+ A_2 (\xi_2^2 - \beta^2 p^2) \xi_2 K_1(\xi_2) = -Q_0/p \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (21)$$

が得られる。これより、 $A_1$ 、 $A_2$  は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= -\frac{Q_0}{p(\xi_1^2 - \xi_2^2)\xi_1 K_1(\xi_1)} \\ A_2 &= \frac{Q_0}{p(\xi_1^2 - \xi_2^2)\xi_2 K_1(\xi_2)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

式(22)を式(13), (14), (18)に代入すると,

$$U^* = -\frac{\zeta Q_0}{p(\xi_1^2 - \xi_2^2)} \left[ \frac{K_1(\xi_1 \rho)}{K_1(\xi_1)} - \frac{K_1(\xi_2 \rho)}{K_1(\xi_2)} \right] \dots (23)$$

$$\theta^* = \frac{Q_0}{p(\xi_1^2 - \xi_2^2)} \left[ (\xi_1^2 - \beta^2 p^2) \frac{K_0(\xi_1 \rho)}{\xi_1 K_1(\xi_1)} - (\xi_2^2 - \beta^2 p^2) \frac{K_0(\xi_2 \rho)}{\xi_2 K_1(\xi_2)} \right] \dots\dots\dots (24)$$

$$\left[ \frac{\rho \rho^*}{\theta \theta^*} \right] = \frac{\zeta Q_0}{p(\xi_1^2 - \xi_2^2)} \left[ \frac{\xi_1 K_0(\xi_1 \rho)}{K_1(\xi_1)} - \frac{\xi_2 K_0(\xi_2 \rho)}{K_1(\xi_2)} \right] \left[ \frac{1}{\eta} \mp (1 - \eta) U^* / \rho - \zeta \theta^* \dots (25)$$

となる。

厳密解を得ることは困難であるため、短時間解を求めることにする。この場合、 $p$ は十分大きいので、式(16)は次のように変形することができる。

$$\xi_{1,2}^2 = \frac{p^2}{2} \left[ B_0 + C_0 + \frac{B_1 \pm C_1}{p} \pm \frac{C_2}{p^2} \pm \frac{C_3}{p^3} \right] \dots (26)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= \sqrt{B_0^2 - 4\tau_0 \beta^2}, \quad C_1 = (B_0 B_1 - 2\beta^2) / C_0 \\ C_2 &= 2\beta^2 (B_0 B_1 - \tau_0 B_1^2 - \beta^2) / C_0^3 \\ C_3 &= -C_1 C_2 / C_0 \end{aligned} \right\} \dots (27)$$

であり、級数展開項は4項までとした。また、

$$\left. \begin{aligned} \frac{K_0(\xi_{1,2} \rho)}{K_1(\xi_{1,2})} &= \frac{1}{\sqrt{\rho}} e^{-\xi_{1,2}(\rho-1)} \left( 1 - \frac{\rho_{01}}{\xi_{1,2}} + \frac{\rho_{02}}{\xi_{1,2}^2} \right) \\ \frac{K_1(\xi_{1,2} \rho)}{K_1(\xi_{1,2})} &= \frac{1}{\sqrt{\rho}} e^{-\xi_{1,2}(\rho-1)} \left( 1 - \frac{\rho_{11}}{\xi_{1,2}} + \frac{\rho_{12}}{\xi_{1,2}^2} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

となる。ただし、

$$\left. \begin{aligned} \rho_{01} &= \frac{1}{8} \left( 3 + \frac{1}{\rho} \right), \quad \rho_{02} = \frac{3}{128} \left( 11 + \frac{2}{\rho} + \frac{3}{\rho^2} \right) \\ \rho_{11} &= \frac{3}{8} \left( 1 - \frac{1}{\rho} \right), \quad \rho_{12} = \frac{3}{128} \left( 11 - \frac{6}{\rho} - \frac{5}{\rho^2} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

であり、級数展開項は3項までとした。

これから後は  $\tau_0$  の値によって取扱いが異なるため、

$$\left. \begin{aligned} \left[ \frac{a_{\rho 0}}{b_{\rho 0}} \right] &= -\left[ \frac{a_0 a_4}{b_0 b_4} \right] (\rho - 1) - \left[ \frac{1/a_0}{1/b_0} \right] \rho_{01} \\ \left[ \frac{a_{\rho 1}}{b_{\rho 1}} \right] &= \frac{1}{2} \left[ \frac{a_0^2 a_4^2}{b_0^2 b_4^2} \right] (\rho - 1)^2 + \left[ \frac{a_4}{b_4} \right] (\rho - 1) + \left[ \frac{a_3/a_0}{b_3/b_0} \right] \rho_{01} + \left[ \frac{1/a_0^2}{1/b_0^2} \right] \rho_{02} \\ \left[ \frac{a_{\rho 2}}{b_{\rho 2}} \right] &= -\left[ \frac{a_0 a_4}{b_0 b_4} \right] (\rho - 1) - \left[ \frac{1/a_0}{1/b_0} \right] \rho_{11} \\ \left[ \frac{a_{\rho 3}}{b_{\rho 3}} \right] &= \frac{1}{2} \left[ \frac{a_0^2 a_4^2}{b_0^2 b_4^2} \right] (\rho - 1)^2 + \left[ \frac{a_4}{b_4} \right] (\rho - 1) + \left[ \frac{a_3/a_0}{b_3/b_0} \right] \rho_{11} + \left[ \frac{1/a_0^2}{1/b_0^2} \right] \rho_{12} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (37)$$

である。また、次のようにおく。

場合わけをする。

(1)  $\tau_0 \neq 0$  のとき

式(26)は次のように変形することができる。

$$\xi_{1,2}^2 = \left[ \frac{a_0^2}{b_0^2} \right] p^2 \left( 1 + \left[ \frac{a_1}{b_1} \right] \frac{1}{p} + \left[ \frac{a_2}{b_2} \right] \frac{1}{p^2} \right) \dots\dots\dots (30)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \left[ \frac{a_0}{b_0} \right] &= \sqrt{\frac{B_0 \pm C_0}{2}}, \quad \left[ \frac{a_1}{b_1} \right] = \frac{B_1 \pm C_1}{B_0 \pm C_0} \\ \left[ \frac{a_2}{b_2} \right] &= \frac{\pm C_2}{B_0 \pm C_0} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

である。式(30)から、

$$\xi_{1,2} = \left[ \frac{a_0}{b_0} \right] p \left( 1 + \left[ \frac{a_3}{b_3} \right] \frac{1}{p} + \left[ \frac{a_4}{b_4} \right] \frac{1}{p^2} \right) \dots\dots\dots (32)$$

$$\xi_{1,2}^2 - \beta^2 p^2 = \frac{p^2}{2} \left( \left[ \frac{a_5}{b_5} \right] + \left[ \frac{a_6}{b_6} \right] \frac{1}{p} + \left[ \frac{a_7}{b_7} \right] \frac{1}{p^2} \right) \dots (33)$$

となる。ただし、

$$\left. \begin{aligned} \left[ \frac{a_3}{b_3} \right] &= \frac{1}{2} \left[ \frac{a_1}{b_1} \right], \quad \left[ \frac{a_4}{b_4} \right] = -\frac{1}{8} \left[ \frac{a_1^2}{b_1^2} \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{a_2}{b_2} \right] \\ \left[ \frac{a_5}{b_5} \right] &= B_0 \pm C_0 - 2\beta^2, \quad \left[ \frac{a_6}{b_6} \right] = B_1 \pm C_1 \\ \left[ \frac{a_7}{b_7} \right] &= \pm C_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (34)$$

である。

式(32)を式(28)に代入すると、次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{K_0(\xi_{1,2} \rho)}{K_1(\xi_{1,2})} &= X_{1,2} Y_{1,2} \left( 1 + \left[ \frac{a_{\rho 0}}{b_{\rho 0}} \right] \frac{1}{p} + \left[ \frac{a_{\rho 1}}{b_{\rho 1}} \right] \frac{1}{p^2} \right) \\ \frac{K_1(\xi_{1,2} \rho)}{K_1(\xi_{1,2})} &= X_{1,2} Y_{1,2} \left( 1 + \left[ \frac{a_{\rho 2}}{b_{\rho 2}} \right] \frac{1}{p} + \left[ \frac{a_{\rho 3}}{b_{\rho 3}} \right] \frac{1}{p^2} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (35)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{\sqrt{\rho}} e^{-a_0 a_3 (\rho-1)}, \quad X_2 = \frac{1}{\sqrt{\rho}} e^{-b_0 b_3 (\rho-1)} \\ Y_1 &= e^{-a_0 (\rho-1)p}, \quad Y_2 = e^{-b_0 (\rho-1)p} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36)$$

$$\begin{bmatrix} a_{\rho 4} \\ b_{\rho 4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{\rho 0} \\ b_{\rho 0} \end{bmatrix} - \frac{C_1}{C_0}, \quad \begin{bmatrix} a_{\rho 5} \\ b_{\rho 5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{\rho 1} \\ b_{\rho 1} \end{bmatrix} - \frac{C_2}{C_0}, \quad \begin{bmatrix} a_{\rho 6} \\ b_{\rho 6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{\rho 2} \\ b_{\rho 2} \end{bmatrix} - \frac{C_1}{C_0}, \quad \begin{bmatrix} a_{\rho 7} \\ b_{\rho 7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{\rho 3} \\ b_{\rho 3} \end{bmatrix} - \frac{C_2}{C_0} \dots\dots\dots (38)$$

以上の式を式(23)~(25)に代入し、ラプラス逆変換することにより、変位、温度、熱応力は、それぞれ

$$U = -\frac{\xi Q_0}{2C_0} \left\{ X_1 \tau_a^2 \left[ 1 + \frac{1}{3} \tau_a a_{\rho 6} + \frac{1}{12} \tau_a^2 \left( a_{\rho 7} - \frac{C_1}{C_0} a_{\rho 6} \right) \right] H(\tau_a) \right. \\ \left. - X_2 \tau_b^2 \left[ 1 + \frac{1}{3} \tau_b b_{\rho 6} + \frac{1}{12} \tau_b^2 \left( b_{\rho 7} - \frac{C_1}{C_0} b_{\rho 6} \right) \right] H(\tau_b) \right\} \dots\dots\dots (39)$$

$$\theta = \frac{Q_0}{2C_0} \left\{ \frac{X_1}{a_0} \tau_a \left[ a_5 + \frac{1}{2} \tau_a [a_5(a_{\rho 4} - a_3) + a_6] + \frac{1}{6} \tau_a^2 \left\{ a_5 a_{\rho 5} - \left[ a_5 \left( a_3 + \frac{C_1}{C_0} \right) - a_6 \right] a_{\rho 4} + a_5(a_3^2 - a_4) \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - a_3 a_6 + a_7 \right\} \right] H(\tau_a) - \frac{X_2}{b_0} \tau_b \left[ b_5 + \frac{1}{2} \tau_b [b_5(b_{\rho 4} - b_3) + b_6] \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{6} \tau_b^2 \left\{ b_5 b_{\rho 5} - \left[ b_5 \left( b_3 + \frac{C_1}{C_0} \right) - b_6 \right] b_{\rho 4} + b_5(b_3^2 - b_4) - b_3 b_6 + b_7 \right\} \right] H(\tau_b) \right\} \dots\dots\dots (40)$$

$$\left[ \frac{\rho \rho}{\theta \theta} \right] = \left[ \frac{1}{\eta} \right] \frac{\xi Q_0}{C_0} \left\{ a_0 X_1 \tau_a \left[ 1 + \frac{1}{2} \tau_a (a_{\rho 4} + a_3) + \frac{1}{6} \tau_a^2 \left[ a_{\rho 5} + \left( a_3 - \frac{C_1}{C_0} \right) a_{\rho 4} + a_4 \right] \right] H(\tau_a) \right. \\ \left. - b_0 X_2 \tau_b \left[ 1 + \frac{1}{2} \tau_b (b_{\rho 4} + b_3) + \frac{1}{6} \tau_b^2 \left[ b_{\rho 5} + \left( b_3 - \frac{C_1}{C_0} \right) b_{\rho 4} + b_4 \right] \right] H(\tau_b) \right\} \mp (1 - \eta) \frac{U}{\rho} - \xi \theta \dots\dots\dots (41)$$

となる。ただし、

$$\tau_a = \tau - a_0(\rho - 1), \quad \tau_b = \tau - b_0(\rho - 1) \dots\dots\dots (42)$$

である。

(2)  $\tau_0 = 0$  のとき

式(26)は次のように変形することができる。

$$\xi_1^2 = \beta^2 p^2 \left\{ 1 + \frac{\delta}{\beta^2 p} \left[ 1 + \frac{1}{\beta^2 p} + (1 - \delta) \frac{1}{\beta^4 p^2} \right] \right\}, \quad \xi_2^2 = p \left\{ 1 - \frac{\delta}{\beta^2 p} \left[ 1 + (1 - \delta) \frac{1}{\beta^2 p} \right] \right\} \dots\dots\dots (43)$$

これより、

$$\xi_1 = \beta p \left\{ 1 + \frac{\delta}{2\beta^2 p} \left[ 1 + \left( 1 - \frac{1}{4} \delta \right) \frac{1}{\beta^2 p} \right] \right\}, \quad \xi_2 = \sqrt{p} \left\{ 1 - \frac{\delta}{2\beta^2 p} \left[ 1 + \left( 1 - \frac{3}{4} \delta \right) \frac{1}{\beta^2 p} \right] \right\} \dots\dots\dots (44)$$

となる。式(44)を式(28)に代入すると次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{K_0(\xi_1 \rho)}{K_1(\xi_1)} &= X_1 Y_1 \left( 1 + \frac{a_{\rho 0}}{p} + \frac{a_{\rho 1}}{p^2} \right), & \frac{K_1(\xi_1 \rho)}{K_1(\xi_1)} &= X_1 Y_1 \left( 1 + \frac{a_{\rho 2}}{p} + \frac{a_{\rho 3}}{p^2} \right) \\ \frac{K_0(\xi_2 \rho)}{K_1(\xi_2)} &= X_2 Y_2 \left( 1 + \frac{b_{\rho 0}}{\sqrt{p}} + \frac{b_{\rho 1}}{p} + \frac{b_{\rho 2}}{p\sqrt{p}} + \frac{b_{\rho 3}}{p^2} \right), & \frac{K_1(\xi_2 \rho)}{K_1(\xi_2)} &= X_2 Y_2 \left( 1 + \frac{b_{\rho 4}}{\sqrt{p}} + \frac{b_{\rho 5}}{p} + \frac{b_{\rho 6}}{p\sqrt{p}} + \frac{b_{\rho 7}}{p^2} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (45)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{\sqrt{\rho}} \exp \left[ -\frac{\delta}{2\beta}(\rho - 1) \right], & X_2 &= \frac{1}{\sqrt{\rho}}, & Y_1 &= \exp \left[ -\beta p(\rho - 1) \right], & Y_2 &= \exp \left[ -\sqrt{p}(\rho - 1) \right] \\ \begin{bmatrix} a_{\rho 0} \\ a_{\rho 2} \end{bmatrix} &= -\frac{1}{\beta} \left\{ \frac{\delta}{2\beta^2} \left( 1 - \frac{1}{4} \delta \right) (\rho - 1) + \begin{bmatrix} \rho_{01} \\ \rho_{11} \end{bmatrix} \right\} \\ \begin{bmatrix} a_{\rho 1} \\ a_{\rho 3} \end{bmatrix} &= \frac{1}{\beta^2} \left\{ \frac{\delta^2}{8\beta^4} \left( 1 - \frac{1}{4} \delta \right)^2 (\rho - 1)^2 + \frac{\delta}{2\beta} \left[ 1 + \frac{1}{\beta} \left( 1 - \frac{1}{4} \delta \right) (\rho - 1) \right] \begin{bmatrix} \rho_{01} \\ \rho_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho_{02} \\ \rho_{12} \end{bmatrix} \right\} \\ \begin{bmatrix} b_{\rho 0} \\ b_{\rho 4} \end{bmatrix} &= \frac{\delta}{2\beta^2} (\rho - 1) - \begin{bmatrix} \rho_{01} \\ \rho_{11} \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} b_{\rho 1} \\ b_{\rho 5} \end{bmatrix} &= \frac{\delta^2}{8\beta^4} (\rho - 1)^2 - \frac{\delta}{2\beta^2} (\rho - 1) \begin{bmatrix} \rho_{01} \\ \rho_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho_{02} \\ \rho_{12} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} b_{\rho 2} \\ b_{\rho 6} \end{bmatrix} &= \frac{\delta}{2\beta^2} \left\{ \frac{\rho - 1}{\beta^2} \left[ 1 - \frac{3}{4} \delta + \frac{\delta^2}{24\beta^2} (\rho - 1)^2 \right] - \left[ 1 + \frac{\delta}{4\beta^2} (\rho - 1)^2 \right] \begin{bmatrix} \rho_{01} \\ \rho_{11} \end{bmatrix} + (\rho - 1) \begin{bmatrix} \rho_{02} \\ \rho_{12} \end{bmatrix} \right\} \\ \begin{bmatrix} b_{\rho 3} \\ b_{\rho 7} \end{bmatrix} &= \frac{\delta}{2\beta^2} \left\{ \frac{\delta(\rho - 1)^2}{2\beta^4} \left[ 1 - \frac{3}{4} \delta + \frac{\delta^2}{96\beta^2} (\rho - 1)^2 \right] - \frac{\rho - 1}{\beta^2} \left[ 1 - \frac{1}{4} \delta + \frac{\delta^2}{24\beta^2} (\rho - 1)^2 \right] \begin{bmatrix} \rho_{01} \\ \rho_{11} \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \left[ 2 + \frac{\delta}{4\beta^2} (\rho - 1)^2 \right] \begin{bmatrix} \rho_{02} \\ \rho_{12} \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (46)$$

これから後は  $\tau_0 \neq 0$  の場合と同じ手順で、変位、温度ならびに熱応力が求められるが、ここでは省略した。

3. 数値計算結果

数値計算は次の場合について行った。

$$\nu=0.3, \delta=0.1, \tau=10^{-5} Q_0=1$$

$$\beta=0.001\sim 0.1, \tau_0=0\sim 2\times 10^{-4}$$

図1~図4は  $\beta=0.01$  の場合における円柱穴近傍の変位分布, 温度分布ならびに応力分布を  $\tau_0$  (緩和時間) をパラメータにして示したものであり, 表1は緩和時間と応力波および熱波の波頭位置と速度の関係を示したものである。

図1の変位分布からわかるように,  $\tau_0$  が大きくなるにつれて変位量は次第に小さくなり, ピーク値を示す位置も円柱穴に近づくようになる。これは,  $\tau_0$  が大きくなると熱波の伝ば速度が遅いので, 熱の伝わりかたが遅くなるためである。

図2の温度分布において,  $\tau_0=0\sim 5\times 10^{-5}$  では, 熱波が伝ばされた領域で温度上昇が生じるが,  $\tau_0=2\times 10^{-4}$  の場合, 応力波の伝ば速度が熱波の伝ば速度よりも速くなり, 熱波が伝ばされていない領域でも応力波による温度上昇があるため, 熱波の波頭位置で折れ曲がりが生じ, 波頭位置が明確に現れるようになる。

図3, 4は半径応力  $\hat{\rho\rho}$ , 円周応力  $\hat{\theta\theta}$  の分布図である。  $\tau_0=0\sim 5\times 10^{-5}$  の範囲では熱波が伝ばされた後の

領域で応力が発生し, また  $\tau_0=2\times 10^{-4}$  では, 応力波が熱波より速いため, 応力波が伝ばされた後の領域で応力が発生する。そして,  $\tau_0=0\sim 5\times 10^{-5}$  の範囲では応力波の波頭位置で,  $\tau_0=2\times 10^{-4}$  では, 熱波の波頭位置で, それぞれ折れ曲がりが生じている。

次に,  $\tau_0=10^{-5}$  の場合における円柱穴近傍の変位分布ならびに熱応力分布を  $\beta$  (無次元化した縦波の伝ば速度の逆数) をパラメータにして図5~図7に示し, かつそのときの波頭位置等を表2に示す。

図5より,  $\beta$  が大きくなると変位量は小さくなり,

表1 緩和時間と応力波および熱波の波頭位置と速度の関係 ( $\beta=0.01$  の場合)

Relaxation time $\tau_0$	Position of wave front $\rho$		Velocity $v$	
	(a)	(b)	(a)	(b)
0	1.001000	$\infty$	$v_e < v_t$	
$5 \times 10^{-6}$	1.000997	1.004484		
$1 \times 10^{-5}$	1.000994	1.003180		
$2 \times 10^{-5}$	1.000988	1.002264		
$5 \times 10^{-5}$	1.000957	1.001478		
$2 \times 10^{-4}$	1.001084	1.000653	$v_e > v_t$	

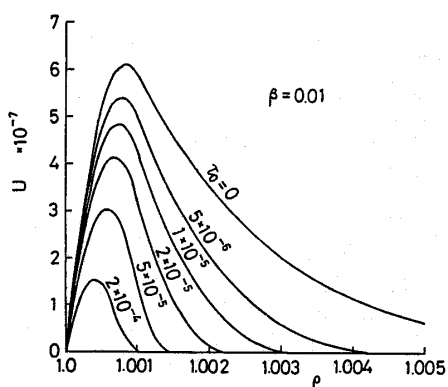


図1 円柱穴近傍の変位分布 ( $\beta=0.01$ )

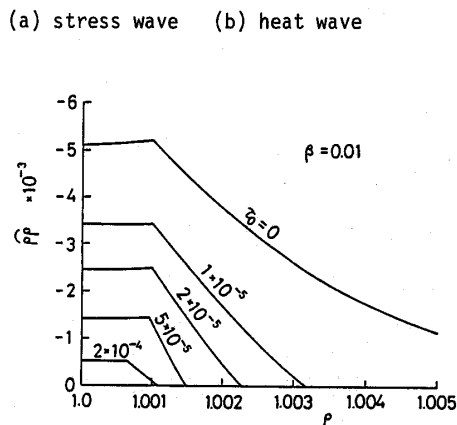


図3 円柱穴近傍の半径応力分布 ( $\beta=0.01$ )

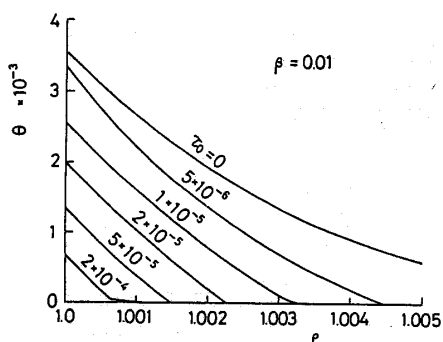


図2 円柱穴近傍の温度分布 ( $\beta=0.01$ )

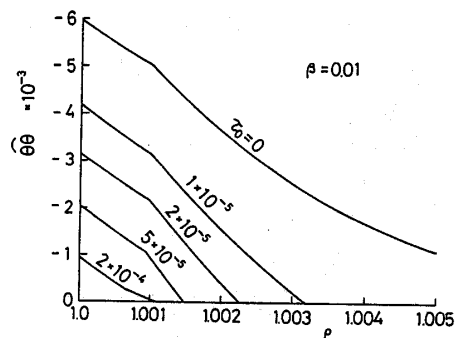


図4 円柱穴近傍の円周応力分布 ( $\beta=0.01$ )

表 2 縦波の伝ば速度の逆数と応力波および熱波の波頭位置と速度の関係 ( $\tau_0=10^{-5}$  の場合)

Reciprocal of propagation velocity $\beta$	Position of wave front $\rho$		Velocity $v$	
	(a)	(b)	(a)	(b)
0.10	1.0001000	1.003162	$v_e < v_t$	
0.03	1.0003331	1.003164		
0.02	1.0004994	1.003166		
0.01	1.0009945	1.003180		

(a) stress wave (b) heat wave

表 3 縦波の伝ば速度の逆数と応力波および熱波の波頭位置と速度の関係 ( $\tau_0=5 \times 10^{-5}$  の場合)

Reciprocal of propagation velocity $\beta$	Position of wave front $\rho$		Velocity $v$	
	(a)	(b)	(a)	(b)
0.05	1.0001998	1.001416	$v_e < v_t$	
0.02	1.0004965	1.001424		
0.01	1.0009569	1.001478		
0.005	1.002167	1.001305	$v_e > v_t$	
0.002	1.005263	1.001344		
0.001	1.010497	1.001347		

(a) stress wave (b) heat wave

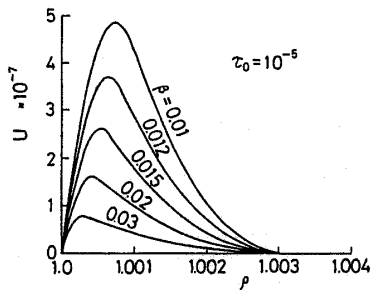


図 5 円柱穴近傍の変位分布 ( $\tau_0=10^{-5}$ )

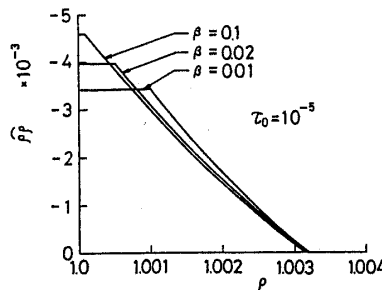


図 6 円柱穴近傍の半径応力分布 ( $\tau_0=10^{-5}$ )

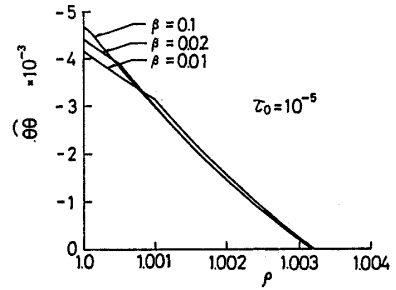


図 7 円柱穴近傍の円周応力分布 ( $\tau_0=10^{-5}$ )

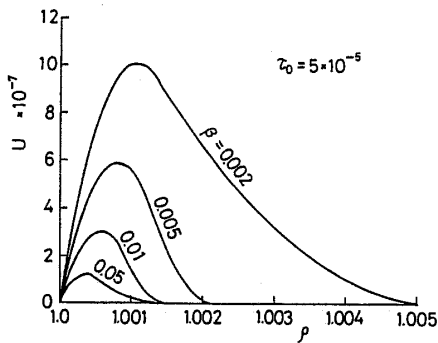


図 8 円柱穴近傍の変位分布 ( $\tau_0=5 \times 10^{-5}$ )

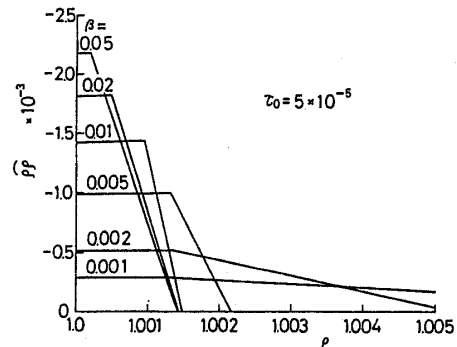


図 10 円柱穴近傍の半径応力分布 ( $\tau_0=5 \times 10^{-5}$ )

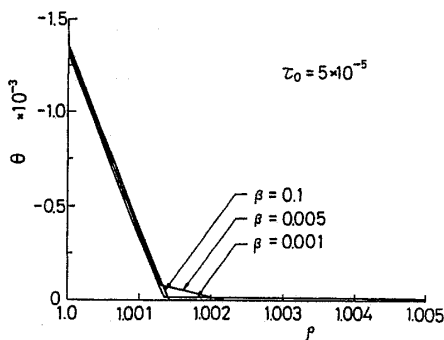


図 9 円柱穴近傍の温度分布 ( $\tau_0=5 \times 10^{-5}$ )

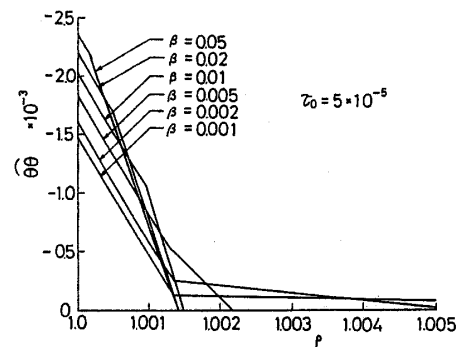


図 11 円柱穴近傍の円周応力分布 ( $\tau_0=5 \times 10^{-5}$ )

ピーク値を示す位置も円柱穴に近づくことがわかる。また図 6, 7 の応力分布より,  $\beta$  が大きくなると応力波の伝ば速度が遅くなるため, 折れ曲がる位置が円柱穴に近づくことがわかる。これらの図における  $\beta$  の範囲では, いずれの場合も熱波の伝ば速度が応力波の伝ば速度よりも速く, しかも表 2 より明らかなように, 熱波の波頭位置があまり変わらないので, だいたい同じような位置で変位ならびに応力の値が零となる。なお, この  $\beta$  の範囲における各温度の間には明確な差が現れなかったため図示を省略した。

さらに, 熱波の伝ば速度と応力波の伝ば速度の大小による変位分布, 温度分布ならびに応力分布への影響をみるために,  $\tau_0 = 5 \times 10^{-5}$  とした場合における結果を図 8~図 11 に示し, かつこの場合の波頭位置等を表 3 に示した。 $\beta$  が 0.005 以下では応力波の伝ば速度が熱波の伝ば速度より速くなるため, 表 3 より明らかなように, 変位, 温度ならびに応力の値が零となる位置がかなり変化するようになる。しかし熱波が伝ばされた領域の温度は  $\beta$  によってあまり変化しない。応力は応力波と熱波が伝わった位置の前後で大きな変化が生じる。

なお  $\tau = 10^{-5}$  はかなり時間が短いこともあり,  $\delta$  を少々変化させても変位, 温度ならびに応力にはあまり差が現れなかった。

#### 4. 結 論

円柱穴より一定の熱量が供給される無限体の一般化

された熱弾性問題の短時間における解析を行った。そして  $\tau = 10^{-5}$  の場合の円柱穴近傍における変位分布, 温度分布ならびに応力分布の数値計算を行った結果, 以下のことがわかった。

(1)  $\beta$  が一定の場合

(i)  $\tau_0$  が大きくなるにつれて変位, 温度ならびに応力の値は次第に小さくなる。

(ii) 半径応力と円周応力の半径方向分布において, 応力波および熱波の波頭位置が明確に現れる。

(2)  $\tau_0$  が一定の場合

(i)  $\beta$  が大きくなるにつれて変位量は小さくなる。

(ii)  $\beta$  が大きくなるにつれて半径応力と円周応力は大きくなる。

(iii) 半径応力と円周応力は, 応力波および熱波が伝ばされた前後の領域で大きく変化する。

#### 文 献

- (1) Chester, M., *Phys. Rev.*, 131-5 (1963), 2013.
- (2) Ackerman, C. C., ほか 3 名, *Phys. Rev. Letters*, 16-18 (1966), 789.
- (3) Ackerman, C. C. and Overton, W. C., Jr., *Phys. Rev. Letters*, 22-15 (1969), 764.
- (4) Lord, H. W. and Shulman, Y., *J. Mech. Phys. Solids*, 15 (1967), 299.
- (5) Green, A. E. and Lindsay, K. A., *J. Elasticity*, 2-1 (1972), 1.
- (6) Francis, P. H., *J. Sound Vib.*, 21-2 (1972), 181.
- (7) Hasselman, D. P. H. and Heller, R. A., *Thermal Stresses in Severe Environments*, (1980), 15, Plenum Press.