

539.377.01 : 536.21

瞬間点熱源による直交異方性中空円板の非定常熱応力*

竹内洋一郎**, 野田直剛***, 須見尚文***, 杉浦博治****

1. 緒 言

等方性体の熱応力問題に関しては従来、定常、非定常、動的、連成、偶応力などの各種の問題について、すでに多数の報告がなされている。しかし近年工業材料の多種多様化に伴い、異方性体に属する工業材料も多く現れている。異方性体の熱応力問題の研究報告は、熱伝導問題の異方性処理の困難さが重複されるため、比較的発表が少なく今後の課題とされている⁽¹⁾ [直角座標による解析としては、1970 年以後文献 (2) がある]。ことに重複連結領域、すなわち穴のある有限領域の問題は、直交異方性体に対象をしぼっても、変位、回転の一価性の吟味の数学的、物理的困難さを伴う条件が加わるため、応力関数法による解析は見当たらない。本研究では直交異方性体に関する変位、回転の一価性を保証する、いわゆる Michell の条件式を誘導し、その結果を応用して、 r, θ 方向に対する直交異方性を有する中空円板の非定常熱応力問題を解析した。実際に処理したのは、平面熱応力問題において、理論的見地から見ると、最も基本的場合に相当する中空円板の任意の 1 点に瞬間点熱源が作用する問題を解析し、数値計算を行った。瞬間点熱源の問題の結果は、熱弾性論的立場からは一種のグリーン関数を示していることになる。なお直交異方性中空円板の熱伝導問題は、変数分離法により解析した。

2. 解 析

2.1 温度分布 極座標表示 (r, θ) による r, θ 方向の直交異方性材料の、二次元非定常熱伝導の基礎方程式は次式で与えられる。

$$\alpha^{-2} \left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tau}{\partial \theta^2} = \beta^{-2} \frac{\partial \tau}{\partial t} \dots (1)$$

ただし、 τ は温度変化、 t は時間、 $\alpha^2 = \lambda_\theta / \lambda_r$ 、 $\beta^2 = \lambda_\theta / c\gamma$ 、 $\lambda_r, \lambda_\theta$ はそれぞれ r および θ 方向の熱伝導率、 c は比熱、 γ は密度である。

いま、図 1 の内外半径が a および b の中空円板を考え、内部の任意の 1 点 $(r_1, 0)$ に瞬間点熱源が作用するものとする。このとき式 (1) に対する境界条件は、媒体温度を 0 とするとき

$$\left[\frac{1}{h_a} \frac{\partial \tau}{\partial r} - \tau \right]_{r=a} = 0, \left[\frac{1}{h_b} \frac{\partial \tau}{\partial r} + \tau \right]_{r=b} = 0 \dots (2)$$

ただし、 h_a, h_b はそれぞれ内外両境界面の相対熱伝達率である。円板の上下両面よりの熱伝達は小さいとして無視する。式 (2) のもとに、初期条件

$$[\tau]_{t=0} = f(r, \theta) \dots (3)$$

の場合、式 (1) を変数分離法で解くと解は次式の形で与えられる。

$$\tau = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (A_{ns} \cos n\theta + B_{ns} \sin n\theta) u_{an}(p_{ns}r) \times \exp\left(-\frac{p_{ns}^2 \beta^2}{\alpha^2} t\right) \dots (4)$$

ただし、

$$u_{an}(p_{ns}r) = \left\{ \left(1 - \frac{\alpha n}{ah_a}\right) J_{an}(p_{ns}a) + \frac{p_{ns}}{h_a} J_{an+1}(p_{ns}a) \right\} Y_{an}(p_{ns}r) - \left\{ \left(1 - \frac{\alpha n}{ah_a}\right) Y_{an}(p_{ns}a) + \frac{p_{ns}}{h_a} Y_{an+1}(p_{ns}a) \right\} J_{an}(p_{ns}r) \dots (5)$$

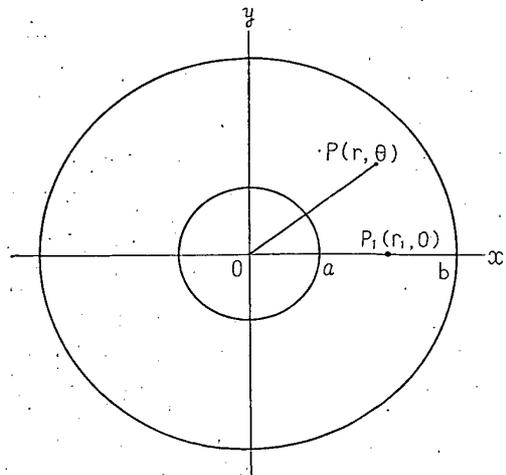


図 1 瞬間点熱源の作用をうける中空円板

* 昭和 49 年 9 月 2 日 東海支部浜松地方講演会において講演、原稿受付 昭和 50 年 3 月 13 日。
 ** 正員、大阪府立大学工学部 (堺市百舌鳥梅町 4-804)。
 *** 正員、静岡大学工学部。
 **** 准員、ヤマハ発動機会社。

$$A_{ns} = \frac{1}{\pi \varepsilon_n q_{ns}} \int_a^b \int_{-\pi}^{\pi} f(r, \theta) \cos n\theta u_{an}(p_{ns}r) r d\theta dr \dots\dots\dots (6)$$

$$B_{ns} = \frac{1}{\pi \varepsilon_n q_{ns}} \int_a^b \int_{-\pi}^{\pi} f(r, \theta) \sin n\theta u_{an}(p_{ns}r) r d\theta dr \quad (\varepsilon_0=2, \varepsilon_1=\varepsilon_2, \dots\dots=1) \dots\dots\dots (7)$$

p_{ns} は次式を満足する s 番めの正根である.

$$\left(1 + \frac{\alpha n}{bh_b}\right) u_{an}(p_{ns}b) - \frac{p_{sn}}{h_b} v_{an}(p_{ns}b) = 0 \dots\dots\dots (8)$$

ただし,

$$v_{an}(p_{ns}r) = \left\{ \left(1 - \frac{\alpha n}{ah_a}\right) J_{an}(p_{ns}a) + \frac{p_{sn}}{h_a} J_{an+1}(p_{ns}a) \right\} Y_{an+1}(p_{ns}r) - \left\{ \left(1 - \frac{\alpha n}{ah_a}\right) Y_{an}(p_{ns}a) + \frac{p_{sn}}{h_a} Y_{an+1}(p_{ns}a) \right\} J_{an+1}(p_{ns}r) \dots\dots\dots (9)$$

$$q_{ns} = \int_a^b u_{an}^2(p_{ns}r) r dr \dots\dots\dots (10)$$

等方性円板の任意の1点に瞬間点熱源が作用する場合の熱応力は, すでに著者らによって, 中実, 中空の両者に対して解かれている⁽³⁾⁽⁴⁾. [文献(4)と別解法によってその後文献(5)が発表されている].

先の報告にみならって, 中空円板の任意の1点(r_1, θ_1)に強さ S の瞬間点熱源が作用するとき, デルタ関数表示による初期温度分布は

$$[\tau]_{t=0} = S \delta(r-r_1) \delta(\theta-\theta_1) / r \dots\dots\dots (11)$$

式(11)を式(6), (7)に代入すれば

$$A_{ns} = \frac{S}{\pi \varepsilon_n q_{ns}} \cos n\theta_1 u_{an}(p_{ns}r_1) \dots\dots\dots (12)$$

$$B_{ns} = \frac{S}{\pi \varepsilon_n q_{ns}} \sin n\theta_1 u_{an}(p_{ns}r_1) \dots\dots\dots (13)$$

上記の A_{ns}, B_{ns} の値を式(4)に代入すれば

$$\tau = S \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{u_{an}(p_{ns}r_1)}{\pi \varepsilon_n q_{ns}} \cos n(\theta-\theta_1) \times u_{an}(p_{ns}r) \exp\left(-\frac{p_{ns}^2 \beta^2}{\alpha^2} t\right) \dots\dots\dots (14)$$

熱源の作用点に $\theta=0$ 軸 (x 軸) を合わせると,

$$\tau = S \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{u_{an}(p_{ns}r_1)}{\pi \varepsilon_n q_{ns}} \cos n\theta u_{an}(p_{ns}r) \times \exp(-p_{ns}^2 \beta^2 t / \alpha^2) \dots\dots\dots (15)$$

上式が $(r_1, 0)$ に, 瞬間点熱源が作用するときの $t>0$ の温度関数を与える式である.

2.2 直交異方性体の Michell の条件式 応力関

数法により多重連結領域の平面弾性問題を解析するとき, 変位および回転が一価になるための条件式を誘導しないと, 条件式が不足し, 応力関数中の未知定数を決定することができない. 温度変化の無い場合の直角座標系の条件式は, すでに著者⁽⁶⁾によって求められているが, 本研究の熱応力問題に適用するために, 以下に極座標系のいわゆる Michell の条件式を誘導する. さて, 直交異方性体における応力-ひずみ関係式は極座標表示でつぎのように表される.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= a_{11}\sigma_{rr} + a_{12}\sigma_{\theta\theta} + \alpha_1\tau \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= a_{12}\sigma_{rr} + a_{22}\sigma_{\theta\theta} + \alpha_2\tau \\ \varepsilon_{r\theta} &= a_{66}\sigma_{r\theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

ただし, ε_{ij} はひずみテンソル成分, σ_{ij} は応力テンソル成分, α_i は r および θ 方向の熱膨張係数, a_{ij} は弾性係数である.

つぎにつりあい方程式を満足する応力テンソルの, Airy の応力関数 χ 表示はつぎのようになる.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial \theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

ひずみの適合条件式は平面問題では

$$2 \frac{\partial^2 (r\varepsilon_{r\theta})}{\partial r \partial \theta} = \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{r\theta}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta^2} - r \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial r} \dots\dots\dots (18)$$

式(16)~(18)より応力関数に関する基礎微分方程式は

$$\left\{ \frac{\partial^4}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3}{\partial r^3} - \frac{\beta_1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\beta_1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{2\beta_2}{r^3} \frac{\partial^3}{\partial r \partial \theta^2} + \frac{2\beta_2}{r^2} \frac{\partial^4}{\partial r^2 \partial \theta^2} + \frac{2(\beta_1 + \beta_2)}{r^4} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\beta_1}{r^4} \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} \right\} \chi = -\nu \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2-\mu}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} \tau \dots\dots\dots (19)$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= a_{11}/a_{22}, \quad \beta_2 = (a_{12} + a_{66})/a_{22} \\ \mu &= \alpha_1/\alpha_2, \quad \nu = \alpha_2/\alpha_{22} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

重複連結領域において, 穴を囲む任意の閉曲線に沿うてのつぎの1周積分値が0になれば, 変位および回転の一価性が保証される.

$$\oint d\omega = 0 \dots\dots\dots (21)$$

$$\oint du_z = 0 \dots\dots\dots (22)$$

$$\oint du_y = 0 \dots\dots\dots (23)$$

ただし, ω は回転成分, u_z, u_y はそれぞれ x および y

方向の変位成分である。まず式 (21) の条件を考える。

$$d\omega = \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{dr}{ds} + \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \frac{d\theta}{ds} \right) ds \dots\dots\dots (24)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial r} = \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2}{r} \varepsilon_{r\theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \theta} = r \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial r} + \varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{rr} - \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta} \dots\dots\dots (25)$$

式 (16), (17) を式 (25) に代入し, 式 (24) を考慮して式 (21) を書き表すと

$$\oint \left[\cos(n, \theta) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \beta_2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \beta_1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} \right) + \mu \nu \tau \right\} + \cos(n, r) \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{\beta_2}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} \right. \right. \\ \left. \left. + \nu \tau - (\beta_1 - 1) \int \frac{1}{r^2} \frac{\partial \chi}{\partial r} dr - (\beta_1 - \beta_2) \int \frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} dr - \nu(\mu - 1) \int \frac{\tau}{r} dr \right\} \right] ds = 0 \dots\dots\dots (26)^*$$

式 (24), (26) において n は選んだ閉曲線の法線, s は線素を示す。同様な手続きで式 (22), (23) の変位一個の条件式はそれぞれつぎのようになる。

$$\oint \left[x \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \beta_2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \beta_1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} \right) + \mu \nu \tau \right\} - y \left[\cos(n, \theta) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \beta_2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \beta_1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} \right) \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \mu \nu \tau \right\} + \cos(n, r) \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \beta_2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} \right) + \nu \tau \right\} \right] ds = 0 \dots\dots\dots (27)$$

$$\oint \left[y \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \beta_2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \beta_1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} \right) + \mu \nu \tau \right\} + x \left[\cos(n, r) \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \beta_2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} \right) + \nu \tau \right\} \right. \right. \\ \left. \left. - \cos(n, \theta) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \beta_2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \beta_1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} \right) + \mu \nu \tau \right\} \right] ds = 0 \dots\dots\dots (28)$$

上の三つの直方異方性体に対するいわゆる Michell の条件式は, いずれも境界外力の存在しない純熱応力問題に対するものである。

2.3 熱応力の解析 式 (19) を解くために, 式 (15) の温度分布を考慮して応力関数 χ の形として次式を考える。

$$\chi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} R_n(r) S \frac{u_{an}(p_n s r_1)}{\pi \varepsilon_n q_n s} \cos n\theta \exp(-p_n s^2 \beta^2 t / \alpha^2) \dots\dots\dots (29)$$

ただし, $R_n(r)$ は r のみの関数である。

式 (29) を式 (19) に代入すれば

$$\left\{ \frac{d^4}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3}{dr^3} - \frac{\beta_1 + 2\beta_2 n^2}{r^2} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\beta_1 + 2\beta_2 n^2}{r^3} \frac{d}{dr} + \frac{\beta_1(n^2 - 1)^2 - (\beta_1 + 2\beta_2 n^2)}{r^4} \right\} R_n(r) = -\nu f_n(r) \dots\dots\dots (30)$$

ただし,

$$r^2 f_n(r) = \{ (\alpha^2 - \mu)n^2 + (1 - \mu)\alpha n - p_n s^2 r^2 \} u_{an}(p_n s r) + (\mu - 1)p_n s r v_{an}(p_n s r) \dots\dots\dots (31)$$

式 (30) を解くと, 解としてつぎの三つの場合に分類される。

(i) $n=0, \beta_1=1$ のとき,

$$R_0(r) = C_{01} + C_{02} r^2 + C_{03} \ln r + C_{04} r^2 \ln r + \frac{\nu}{4} \left\{ \int_a^r f_0(r) r^3 (\ln r - 1) dr + r^2 \int_a^r f_0(r) r (\ln r + 1) dr \right. \\ \left. - \ln r \int_a^r f_0(r) r^3 dr - r^2 \ln r \int_a^r f_0(r) r dr \right\} \dots\dots\dots (32)$$

(ii) $n=1$ のとき

$$R_1(r) = C_{11} r + C_{12} r^{-\lambda+1} + C_{13} r^{\lambda+1} + C_{14} r \ln r + \nu / \lambda^2 \left[-r \int_a^r f_1(r) r^2 \ln r dr + \frac{r^{-\lambda+1}}{2\lambda} \int_a^r f_1(r) r^{\lambda+2} dr \right. \\ \left. - \frac{r^{\lambda+1}}{2\lambda} \int_a^r f_1(r) r^{-\lambda+2} dr + r \ln r \int_a^r f_1(r) r^2 dr \right] \dots\dots\dots (33)$$

(iii) $n \neq 1, \beta_1 \neq 1$ のとき

* 式 (26) において, $\beta_1 = \beta_2 = \mu = 1, \nu = \alpha E$ とおくと, 周知の等方性体の場合となる。

$$R_n(r) = C_{n1}r^{m_1+1} + C_{n2}r^{m_2+1} + C_{n3}r^{-m_1+1} + C_{n4}r^{-m_2+1} + \frac{\nu}{2(m_1^2 - m_2^2)} \left\{ -\frac{r^{m_1+1}}{m_1} \int_a^r f_n(r)r^{-m_1+2} dr \right. \\ \left. + \frac{r^{m_2+1}}{m_2} \int_a^r f_n(r)r^{-m_2+2} dr + \frac{r^{-m_1+1}}{m_1} \int_a^r f_n(r)r^{m_1+2} dr - \frac{r^{-m_2+1}}{m_2} \int_a^r f_n(r)r^{m_2+2} dr \right\} \dots\dots\dots(34)$$

ただし,

$$\lambda^2 = 1 + \beta_1 + 2\beta_2 \dots\dots\dots(35)$$

また, m_1^2, m_2^2 はつぎの方程式の2根である.

$$m^4 - (1 + \beta_1 + 2\beta_2 m^2)m^2 + \beta_1(n^2 - 1)^2 = 0 \dots\dots\dots(36)$$

式(32)~(34)を式(29)に代入し, この結果と式(15)を, 式(26)~(28)の Michell の条件式に代入し, 積分を実行すればつぎの関係が得られる.

$$\left. \begin{aligned} \beta_0 = 1 \text{ に対し } & C_{04} = \nu K_0 / 4 \\ \beta_0 \neq 1 \text{ に対し } & C_{04} = \nu K_0 / 2(1 - \beta_1), \quad C_{14} = \nu K_1 / \lambda^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(37)$$

ただし,

$$K_0 = \frac{2}{\pi} \left\{ (\mu - 1) \frac{1}{ah_a} - 1 \right\}, \quad K_1 = \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{\mu}{ah_a} \right) a$$

つぎに応力関数の境界条件式は, 本問題の場合, 次式のようにおける.

$r = a$ で,

$$(\chi)_a = (\partial\chi/\partial r)_a = 0 \dots\dots\dots(38)$$

$r = b$ で,

$$(\chi)_b = \bar{C}_1 x + \bar{C}_2 y + \bar{C}_3, \quad (\partial\chi/\partial r)_b = \bar{C}_1 \cos \theta + \bar{C}_2 \sin \theta \dots\dots\dots(39)$$

式(29)を考慮して, 式(39)の境界条件式をつぎのように変形しておく.

$r = b$ において,

$$(\chi)_b = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{S u_{an}(p_{ns} r_1)}{\pi \epsilon_n q_{ns}} (\bar{a}x + \bar{b}y + \bar{c}) \exp(-p_{ns}^2 \beta^2 t / \alpha^2) \dots\dots\dots(40)$$

$$\left(\frac{\partial\chi}{\partial r} \right)_b = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{S u_{an}(p_{ns} r_1)}{\pi \epsilon_n q_{ns}} (\bar{a} \cos \theta + \bar{b} \sin \theta) \exp(-p_{ns}^2 \beta^2 t / \alpha^2) \dots\dots\dots(41)$$

式(37)を考慮し, 式(38), (40), (41)より, 式(32)~(34)中に含まれる未知定数を決定することができる. この場合 n と β_1 の値により, つぎの4種類の4元一次方程式が得られる.

(i) $n = 0, \beta_1 = 1$ のとき

$$\left. \begin{aligned} C_{01} + C_{02}a^2 + C_{03} \ln a &= -\frac{\nu}{4} K_0 a^2 \ln a, \quad 2C_{04} + C_{03}a^{-1} = -\frac{\nu}{4} K_0 a(2 \ln a + 1) \\ C_{01} + C_{02}b^2 + C_{03} \ln b - \bar{c} &= -\frac{\nu}{4} K_0 b^2 \ln b - S_{01}, \quad 2C_{02}b + C_{03}b^{-1} = -\frac{\nu}{4} K_0 b(2 \ln b + 1) - S_{02} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(42)$$

ただし,

$$S_{01} = \frac{\nu}{4} \left\{ \int_a^b f_0(r)r^2(\ln r - 1)dr + b^2 \int_a^b f_0(r)r(\ln r + 1)dr - \ln b \int_a^b f_0(r)r^3 dr - b^2 \ln b \int_a^b f_0(r)r dr \right\} \\ S_{02} = \frac{\nu}{4} \left\{ 2b \int_a^b f_0(r)r(\ln r + 1)dr - b^{-1} \int_a^b f_0(r)r^3 dr - b(2 \ln b + 1) \int_a^b f_0(r)r dr \right\}$$

(ii) $n = 0, \beta_1 \neq 1$ のとき

$$\left. \begin{aligned} C_{01} - C_{02}a^{-\xi+1} + C_{03}a^{\xi+1} &= -\frac{\nu K_0 a^2}{2(1-\beta_1)}, \quad -(\xi-1)C_{02}a^{-\xi} + (\xi+1)C_{03}a^{\xi} = -\frac{2\nu K_0 a}{2(1-\beta_1)} \\ C_{01} + C_{02}b^{-\xi+1} + C_{03}b^{\xi+1} - \bar{c} &= -\frac{2\nu K_0 b}{2(1-\beta_1)} - S_{01}', \quad -(\xi-1)C_{02}b^{-\xi} + (\xi+1)C_{03}b^{\xi} = -\frac{2\nu K_0 b}{2(1-\beta_1)} - S_{02}' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(43)$$

ただし,

$$S_{01}' = \frac{\nu}{2(1-\beta_1)} \left\{ \int_a^b f_0(r)r^3 dr - \frac{b^{-\xi+1}}{\xi} \int_a^b f_0(r)r^{\xi+2} dr + \frac{b^{\xi+1}}{\xi} \int_a^b f_0(r)r^{-\xi+2} dr - b^2 \int_a^b f_0(r)r dr \right\}$$

$$S_{02}' = \frac{\nu}{2(1-\beta_1)} \left\{ \frac{\xi-1}{\xi} b^{-\xi} \int_a^b f_0(r) r^{\xi+2} dr + \frac{\xi+1}{\xi} b^{\xi} \int_a^b f_0(r) r^{-\xi+2} dr - 2b \int_a^b f_0(r) r dr \right\}$$

上式中の ξ は, $n=0$ のときに式 (36) から得られる m の値であり, つぎの関係がある.

$$\xi^2 = \beta_1 \dots\dots\dots (44)$$

(iii) $n=1$ のとき

$$\left. \begin{aligned} C_{11}a + C_{12}a^{-\lambda+1} + C_{13}a^{\lambda+1} &= -\frac{\nu}{\lambda^2} K_1 a \ln a \\ C_{11} - (\lambda-1)C_{12}a^{-\lambda} + (\lambda+1)C_{13}a^{\lambda} &= -\frac{\nu}{\lambda^2} K_1 (\ln a + 1) \\ C_{11} + C_{12}b^{-\lambda+1} + C_{13}b^{\lambda+1} - \bar{a}b &= -\frac{\nu}{\lambda^2} K_1 b \ln b - S_{11} \\ C_{11} - (\lambda-1)C_{12}b^{-\lambda} + (\lambda+1)C_{13}b^{\lambda} - \bar{a} &= -\frac{\nu}{\lambda^2} K_1 (\ln b + 1) - S_{12} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (45)$$

ただし,

$$\begin{aligned} S_{11} &= -\frac{\nu}{\lambda^2} \left\{ -b \int_a^b f_1(r) r^2 \ln r dr + \frac{b^{-\lambda+1}}{2\lambda} \int_a^b f_1(r) r^{\lambda+2} dr - \frac{b^{\lambda+1}}{2\lambda} \int_a^b f_1(r) r^{-\lambda+2} dr + b \ln b \int_a^b f_1(r) r^2 dr \right\} \\ S_{12} &= -\frac{\nu}{\lambda^2} \left\{ -\int_a^b f_1(r) r^2 \ln r dr - \frac{\lambda-1}{2\lambda} b^{-\lambda} \int_a^b f_1(r) r^{\lambda+2} dr - \frac{\lambda+1}{2\lambda} b^{\lambda} \int_a^b f_1(r) r^{-\lambda+2} dr \right. \\ &\quad \left. + (\ln b + 1) \int_a^b f_1(r) r^2 dr \right\} \\ \lambda^2 &= 1 + \beta_1 + 2\beta_2 \end{aligned}$$

(iv) $n \geq 2$ のとき

$$\left. \begin{aligned} C_{n1}a^{m_1+1} + C_{n2}a^{m_2+1} + C_{n3}a^{-m_1+1} + C_{n4}a^{-m_2+1} &= 0 \\ C_{n1}(m_1+1)a^{m_1} + C_{n2}(m_2+1)a^{m_2} - C_{n3}(m_1-1)a^{-m_1} - C_{n4}(m_2-1)a^{-m_2} &= 0 \\ C_{n1}b^{m_1+1} + C_{n2}b^{m_2+1} + C_{n3}b^{-m_1+1} + C_{n4}a^{-m_2+1} &= -S_{n1} \\ C_{n1}(m_1+1)b^{m_1} + C_{n2}(m_2+1)b^{m_2} - C_{n3}(m_1-1)b^{-m_1} - C_{n4}(m_2-1)b^{-m_2} &= -S_{n2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (46)$$

ただし,

$$\begin{aligned} S_{n1} &= \frac{\nu}{2(m_1^2 - m_2^2)} \left\{ -\frac{b^{m_1+1}}{m_1} \int_a^b f_n(r) r^{-m_1+2} dr + \frac{b^{m_2+1}}{m_2} \int_a^b f_n(r) r^{-m_2+2} dr + \frac{b^{-m_1+1}}{m_1} \int_a^b f_n(r) r^{m_1+2} dr \right. \\ &\quad \left. - \frac{b^{-m_2+1}}{m_2} \int_a^b f_n(r) r^{m_2+2} dr \right\} \\ S_{n2} &= \frac{\nu}{2(m_1^2 - m_2^2)} \left\{ -\frac{m_1+1}{m_1} b^{m_1} \int_a^b f_n(r) r^{-m_1+2} dr + \frac{m_2+1}{m_2} b^{m_2} \int_a^b f_n(r) r^{-m_2+2} dr \right. \\ &\quad \left. - \frac{m_1-1}{m_1} b^{-m_1} \int_a^b f_n(r) r^{m_1+2} dr + \frac{m_2-1}{m_2} b^{-m_2} \int_a^b f_n(r) r^{m_2+2} dr \right\} \end{aligned}$$

上記のそれぞれの n に対して, 連立方程式を解いて, 応力関数中の未定係数を決定し総和をとれば式 (29) の値は確定する. 式 (29) を式 (17) に代入すれば熱応力成分はつぎのように決定される.

(i) $\beta_1=1$ のとき

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \sum_{s=1}^{\infty} \left[2C_{02} + C_{03}r^{-2} + \frac{\nu}{4} K_0 (2 \ln r + 1) + \frac{\nu}{4} \left\{ 2 \int_a^r f_0(r) (\ln r + 1) dr - \frac{1}{r^2} \int_a^r f_0(r) r^3 dr \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (2 \ln r + 1) \int_a^r f_0(r) r dr \right\} \right] \frac{Su_{0\alpha}(p_{0s}r_1)}{\pi \varepsilon_0 q_{0s}} \exp(-p_{0s}^2 \beta^2 t / \alpha^2) + \sum_{s=1}^{\infty} \left[-C_{12} \lambda r^{-\lambda-1} + C_{13} \lambda r^{\lambda-1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\nu}{\lambda^2} K_1 r^{-1} + \frac{\nu}{\lambda^2} \left\{ -\frac{r^{-\lambda-1}}{2} \int_a^r f_1(r) r^{\lambda+2} dr - \frac{r^{\lambda-1}}{2} \int_a^r f_1(r) r^{-\lambda+2} dr + \frac{1}{r} \int_a^r f_1(r) r^2 dr \right\} \right] \\ &\quad \times \frac{Su_{1\alpha}(p_{1s}r_1)}{\pi \varepsilon_n q_{1s}} \cos \theta \exp(-p_{1s}^2 \beta^2 t / \alpha^2) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \left[C_{n1} \{ (m_1+1) - n^2 \} r^{m_1-1} \right. \\ &\quad \left. + C_{n2} \{ (m_2+1) - n^2 \} r^{m_2-1} - C_{n3} \{ (m_1-1) + n^2 \} r^{-m_1-1} - C_{n4} \{ (m_2-1) + n^2 \} r^{-m_2-1} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\nu}{2(m_1^2 - m_2^2)} \left\{ -\frac{(m_1 + 1) - n^2}{m_1} r^{m_1 - 1} \int_a^r f_n(r) r^{-m_1 + 2} dr + \frac{(m_2 + 1) - n^2}{m_2} r^{m_2 - 1} \right. \\
 & \times \int_a^r f_n(r) r^{-m_2 + 2} dr - \frac{(m_1 - 1) + n^2}{m_1} r^{-m_1 - 1} \int_a^r f_n(r) r^{m_1 + 2} dr + \frac{(m_2 - 1) + n^2}{m_2} r^{-m_2 - 1} \\
 & \left. \times \int_a^r f_n(r) r^{m_2 + 2} dr \right\} \frac{Su_{an}(p_{ns}r_1)}{\pi \epsilon_n q_{ns}} \cos n\theta \exp(-p_{ns}^2 \beta^2 t / \alpha^2) \dots \dots \dots (47)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\theta\theta} = & \sum_{s=1}^{\infty} \left[2C_{02} - C_{03} r^{-2} + \frac{\nu}{4} K_0 (2 \ln r + 3) + \frac{\nu}{4} \left\{ 2 \int_a^r f_0(r) r (\ln r + 1) dr + \frac{1}{r^2} \int_a^r f_0(r) r^3 dr \right. \right. \\
 & \left. \left. - (2 \ln r + 3) \int_a^r f_0(r) r dr \right\} \right] \frac{Su_{a0}(p_{0s}r_1)}{\pi \epsilon_0 q_{0s}} \exp(-p_{0s}^2 \beta^2 t / \alpha^2) + \sum_{s=1}^{\infty} \left[C_{12} (\lambda - 1) \lambda r^{-\lambda - 1} \right. \\
 & - C_{13} (\lambda + 1) \lambda r^{\lambda - 1} + \frac{\nu}{\lambda^2} K_1 r^{-1} + \frac{\nu}{\lambda^2} \left\{ \frac{\lambda - 1}{2} r^{-\lambda - 1} \int_a^r f_1(r) r^{\lambda + 2} dr - \frac{\lambda + 1}{2} r^{\lambda - 1} \int_a^r f_1(r) r^{-\lambda + 2} dr \right. \\
 & \left. + r^{-1} \int_a^r f_1(r) r^2 dr \right\} \frac{Su_{a1}(p_{1s}r_1)}{\pi \epsilon_1 q_{1s}} \cos \theta \exp(-p_{1s}^2 \beta^2 t / \alpha^2) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \left[C_{n1} (m_1 + 1) m_1 r^{m_1 - 1} \right. \\
 & \left. + C_{n2} (m_2 + 1) m_2 r^{m_2 - 1} + C_{n3} (m_1 - 1) m_1 r^{-m_1 - 1} - C_{n4} (m_2 - 1) m_2 r^{-m_2 - 1} \right. \\
 & \left. + \frac{\nu}{2(m_1^2 - m_2^2)} \left\{ -(m_1 + 1) r^{-m_1 - 1} \int_a^r f_n(r) r^{-m_1 + 2} dr + (m_2 + 1) r^{m_2 - 1} \int_a^r f_n(r) r^{-m_2 + 2} dr \right. \right. \\
 & \left. \left. + (m_1 - 1) r^{-m_1 - 1} \int_a^r f_n(r) r^{m_1 + 2} dr - (m_1 - 1) r^{-m_2 - 1} \int_a^r f_n(r) r^{m_2 + 2} dr \right\} \right] \\
 & \times \frac{Su_{an}(p_{ns}r_1)}{\pi \epsilon_n q_{ns}} \cos n\theta \exp(-p_{ns}^2 \beta^2 t / \alpha^2) \dots \dots \dots (48)
 \end{aligned}$$

(ii) $\beta \neq 1$ のとき

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} = & \sum_{s=1}^{\infty} \left[-C_{02} (\xi - 1) r^{-\xi - 1} - C_{03} (\xi + 1) r^{\xi + 1} + \frac{2\nu K_0}{2(1 - \beta_1)} + \frac{\nu}{2(1 - \beta_1)} \left\{ \frac{\xi - 1}{\xi} r^{-\xi - 1} \int_a^r f_0(r) r^{\xi + 2} dr \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\xi + 1}{\xi} r^{\xi + 1} \int_a^r f_0(r) r^{-\xi + 2} dr - 2 \int_a^r f_0(r) r dr \right\} \right] \frac{Su_{0s}(p_{0s}r_1)}{\pi \epsilon_0 q_{0s}} \exp(-p_{0s}^2 \beta^2 t / \alpha^2) \\
 & + \sum_{s=1}^{\infty} \left[-C_{12} \lambda r^{-\lambda - 1} + C_{13} \lambda r^{\lambda - 1} + \frac{\nu}{\lambda^2} K_1 r^{-1} + \frac{\nu}{\lambda^2} \left\{ -\frac{r^{-\lambda - 1}}{2} \int_a^r f_1(r) r^{\lambda + 2} dr - \frac{r^{\lambda - 1}}{2} \int_a^r f_1(r) r^{-\lambda + 2} dr \right. \right. \\
 & \left. \left. + r^{-1} \int_a^r f_1(r) r^2 dr \right\} \right] \frac{Su_{1s}(p_{1s}r_1)}{\pi \epsilon_1 q_{1s}} \cos \theta \exp(-p_{1s}^2 \beta^2 t / \alpha^2) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \left[C_{n1} \{ (m_1 + 1) - n^2 \} r^{m_1 - 1} \right. \\
 & \left. + C_{n2} \{ (m_2 + 1) - n^2 \} r^{m_2 - 1} - C_{n3} \{ (m_1 - 1) + n^2 \} r^{-m_1 - 1} - C_{n4} \{ (m_2 - 1) + n^2 \} r^{-m_2 - 1} \right. \\
 & \left. + \frac{\nu}{2(m_1^2 - m_2^2)} \left\{ -\frac{(m_1 + 1) - n^2}{m_1} r^{m_1 - 1} \int_a^r f_n(r) r^{-m_1 + 2} dr + \frac{(m_2 + 1) - n^2}{m_2} r^{m_2 - 1} \int_a^r f_n(r) r^{-m_2 + 2} dr \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{(m_1 - 1) + n^2}{m_1} r^{-m_1 - 1} \int_a^r f_n(r) r^{m_1 + 2} dr + \frac{(m_2 - 1) + n^2}{m_2} r^{-m_2 - 1} \int_a^r f_n(r) r^{m_2 + 2} dr \right\} \right] \\
 & \times \frac{Su_{an}(p_{ns}r_1)}{\pi \epsilon_n q_{ns}} \cos n\theta \exp(-p_{ns}^2 \beta^2 t / \alpha^2) \dots \dots \dots (49)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\theta\theta} = & \sum_{s=1}^{\infty} \left[C_{02} (\xi - 1) \xi r^{-\xi - 1} + C_{03} (\xi + 1) \xi r^{\xi - 1} + \frac{2\nu K_0}{2(1 - \beta_1)} + \frac{\nu}{2(1 - \beta_1)} \left\{ -(\xi - 1) r^{-\xi - 1} \int_a^r f_0(r) r^{\xi + 2} dr \right. \right. \\
 & \left. \left. + (\xi + 1) r^{\xi - 1} \int_a^r f_0(r) r^{-\xi + 2} dr - 2 \int_a^r f_0(r) r dr \right\} \right] \frac{Su_{0s}(p_{0s}r_1)}{\pi \epsilon_0 q_{0s}} \exp(-p_{0s}^2 \beta^2 t / \alpha^2) \\
 & + \sum_{s=1}^{\infty} \left[C_{12} (\lambda - 1) \lambda r^{-\lambda - 1} + C_{13} (\lambda + 1) \lambda r^{\lambda - 1} + \frac{\nu}{\lambda^2} K_1 r^{-1} + \frac{\nu}{\lambda^2} \left\{ \frac{\lambda - 1}{2} r^{-\lambda - 1} \int_a^r f_1(r) r^{\lambda + 2} dr \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\lambda + 1}{2} r^{\lambda - 1} \int_a^r f_1(r) r^{-\lambda + 2} dr + r^{-1} \int_a^r f_1(r) r^2 dr \right\} \right] \frac{Su_{a1}(p_{1s}r_1)}{\pi \epsilon_1 q_{1s}} \cos \theta \exp(-p_{1s}^2 \beta^2 t / \alpha^2) \\
 & + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \left[C_{n1} (m_1 + 1) m_1 r^{m_1 - 1} + C_{n2} (m_2 + 1) m_2 r^{m_2 - 1} + C_{n3} (m_1 - 1) m_1 r^{-m_1 - 1} + C_{n4} (m_2 - 1) m_2 r^{-m_2 - 1} \right. \\
 & \left. + \frac{\nu}{2(m_1^2 - m_2^2)} \left\{ -(m_1 + 1) r^{m_1 - 1} \int_a^r f_n(r) r^{-m_1 + 2} dr + (m_2 + 1) r^{m_2 - 1} \int_a^r f_n(r) r^{-m_2 + 2} dr \right. \right. \\
 & \left. \left. + (m_1 - 1) r^{-m_1 - 1} \int_a^r f_n(r) r^{m_1 + 2} dr - (m_1 - 1) r^{-m_2 - 1} \int_a^r f_n(r) r^{m_2 + 2} dr \right\} \right] \frac{Su_{an}(p_{ns}r_1)}{\pi \epsilon_n q_{ns}} \\
 & \times \cos n\theta \exp(-p_{ns}^2 \beta^2 t / \alpha^2) \dots \dots \dots (50)
 \end{aligned}$$

$\sigma_{r\theta}$ については紙面の都合で省略した。以上で本問題に対する熱応力成分が決定される。

3. 数値計算と考察

数値計算では温度、応力成分ともつぎのように無次元化した。

$$\left. \begin{aligned} \rho &= r/a, \quad \rho_0 = b/a, \quad \rho_1 = r_1/a, \quad t_d = \beta^2 t/a^2 \\ \gamma_s &= a p n_s, \quad H_a = a h_a, \quad H_b = a h_b \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(51)$$

$$\begin{aligned} \bar{t} &= \tau/a^2 S, \quad \theta\theta = \sigma_{\theta\theta} a^2/\nu S \\ \widehat{\rho\rho} &= \sigma_{rr} a^2/\nu S, \quad \widehat{\rho\theta} = \sigma_{r\theta} a^2/\nu S \end{aligned}$$

実際の数値計算は、 $\rho_0=3, \rho_1=2, H_a=H_b=\infty$ とし、異方性材料の特性としては、

	β_1	β_2	μ	α	} \dots\dots\dots(52)
I	1	1	1	2	
II	0.5	1	1	1	
III	1	1	2	1	

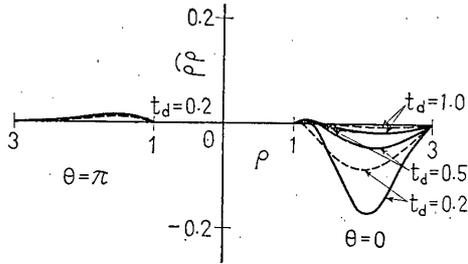


図 2 x 軸上の半径方向応力 (I の場合)

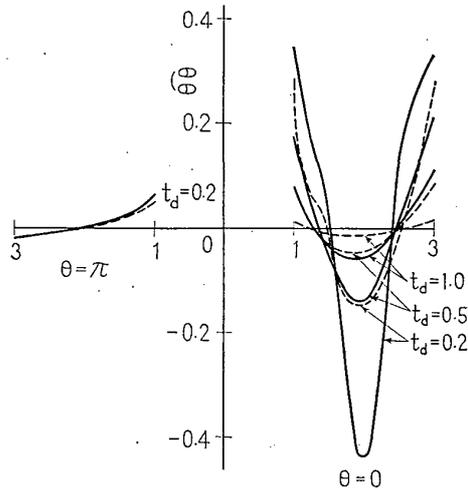


図 3 x 軸上のフープ応力分布 (I の場合)

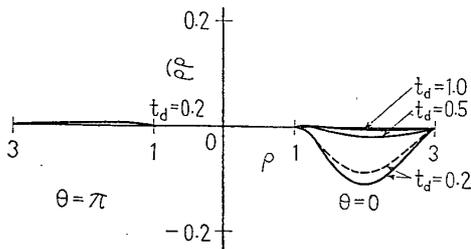


図 4 x 軸上半径方向応力分布 (II の場合)

の三つの場合を計算した。I の場合は、弾性定数、線膨張係数は等方性体と同一にして、熱伝導率のみを異

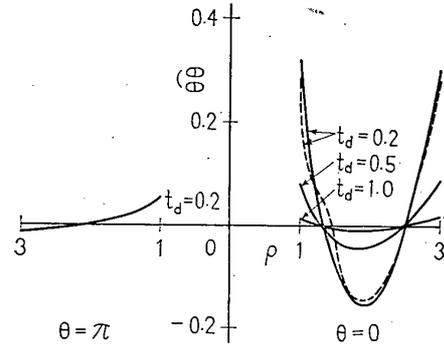


図 5 x 軸上のフープ応力分布 (II の場合)

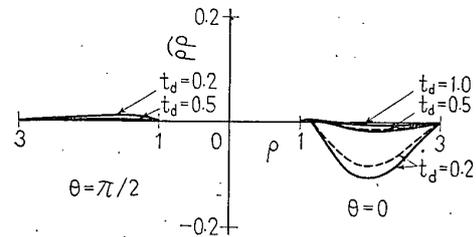


図 6 x 軸上の半径方向応力分布 (III の場合)

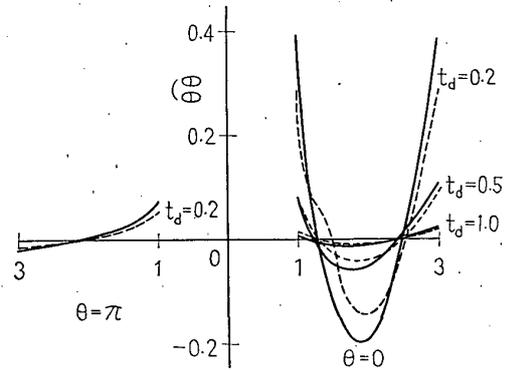


図 7 x 軸上のフープ応力分布 (III の場合)

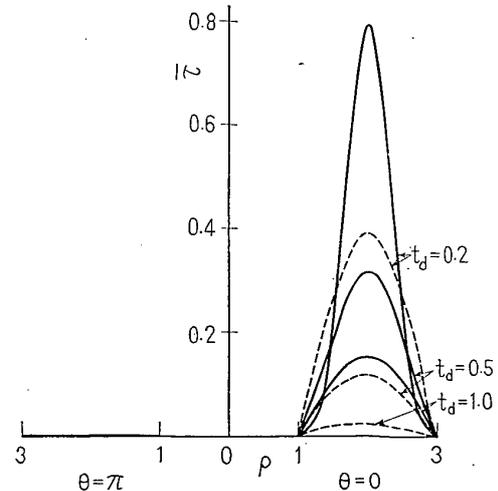


図 8 瞬間点熱源による温度分布 (I の場合)

方性にしたら, 等方性体の場合とどのように変わるかを調べたので, 主として非定常温度分布と解析的見地からの検討である. これらの三つの場合について, 無次元時間, $t_d=0.2, 0.5, 1.0$ について数値計算(名古屋大学大型計算センター)した結果, $\widehat{\rho\rho}, \widehat{\theta\theta}$ の x 軸上の分布を図 2~7 に示す. また, 温度分布は I の場合について図 8 に示した 図 2 以下のすべての図において, 点線は完全な等方性体の場合である. いずれの場合でも, 熱源付近では半径応力, フープ応力とも当然大きい圧縮応力となり, フープ応力は両境界で大きい引張応力となっている. また, 熱源の存在しない側の x 軸上の応力は小さい. また応力集中の傾向も異方性体の場合顕著である.

おわりに著者の不注意によるミスをご教示していただいた藤井石根氏に感謝します.

文 献

- (1) Akoz, A.Y. and Tauchert, T.R., *Trans. ASME, Ser. E*, **39-1** (1972-3), 87; Iesan, D., *Bulletin de L'Academie Polonaise des Sciences*, **18-6** (1970), 449.
- (2) Dey, D.K. and Das, A.K., *Bulletin de L'Academie Polonaise des Sciences*, **20-11** (1972), 867; Parida, J. and Das, A.K., *Acta Mechanica*, **13-4** (1972), 205.
- (3) 竹内, 機論, **32-242** (昭 41-10), 1470
- (4) 野田・竹内, 機論, **40-329** (昭 49-1), 125.
- (5) Hsu, T.R., *Trans. ASME, Ser. E*, **36-1** (1969), 113.
- (6) Sekiya, T., ほか 2 名, *Proc. 9th Japan Nat. Congr. Appl. Mech.*, (1959), 21.

討 論

[質問] 藤井石根(明治大学工学部)

(1) 本論文の最後のところで「応力集中の傾向も異方性体の場合顕著である」と記されているが, このことは図 2~7 の各図を見るかぎり, 等方性体の場合と比較して異方性体の場合の計算結果のほうが最大引張り, 圧縮応力, 両者共大きなものになっているが, このことを意味しているものと解釈してもよいか. もしそうだとすると, この傾向を最も顕著に表すものとして $\beta_1, \beta_2, \mu, \alpha$ のいずれであると考えられるか.

(2) 図 8 の縦軸の値がはっきりしないので確かなことは言えないが, この場合の熱流の出口は $r=a, b$ の円周上であることから, α の値が 1 より小さい値のとき, 温度分布の傾向は図 8 の結果とは逆に半径方向

温度変化は等方性体のそれよりもかんまんなものになると考えられ, その結果発生熱応力もゆるやかになるものと想像されるが, このへんのところを(1)と関連させてお考えをお聞かせ願いたい.

[回答] (1) 材料の異方性特性は, 種々異なると思われるので断定できないが, 著者らの体験では α の影響が大きいようである.

(2) 直交異方性体の場合, ご教示のように一方向には応力集中は拡大され, 一方向には緩和される. これは熱応力の発生原因が自由熱膨張(収縮)の拘束にあることより, 均質な物体の場合, 材料特性と拘束が相関的であるためと思われる.