

非軸対称加熱を受ける有限円柱の非定常熱応力*

野田直剛**, 竹内洋一郎***
Naotake NODA, Yoitiro TAKEUTI

1. 緒 言

軸方向に温度変化を生じる有限長さの円柱・円筒の熱応力問題は、エンジンのシリンダ、圧延ロール、切削加工等の工業上の実際問題への有用性より、比較的研究がなされている。例えば、小泉は表面温度が規定された短円柱の非定常熱応力⁽¹⁾を、Valentin-Careyは一様な熱発生のある有限円柱の非定常熱応力⁽²⁾を、野田らは表面から熱放散のある有限円筒の非定常熱応力⁽³⁾と、軸方向に非対称加熱を受ける有限円柱の非定常熱応力⁽⁴⁾を、菅野・斎藤は断続的な熱発生のある円柱の熱応力と熱変形⁽⁵⁾を研究している。これらの解析は軸対称問題であり、非軸対称加熱を受ける場合には適用できない。非軸対称加熱を受ける場合は解析の困難さから、ほとんど解析されておらず、竹内・野田の非軸対称加熱を受ける無限円柱の非定常熱応力⁽⁶⁾の研究しか見当たらないようである。

そこで本研究では、軸対称加熱を受ける有限円柱の非軸対称加熱を受ける有限円柱への拡張、または非軸対称加熱を受ける無限円柱の有限円柱への拡張として、非軸対称加熱を受ける有限円柱の非定常熱応力の理論解析をおこなった。解析においては、熱弾性変位ポテンシャル、Michellの関数とBoussinesqの関数を用いた。

2. 解 析

2.1 温度分布 図1に示すように半径 a 、長さ $2l$ の有限円柱が半径 a の表面より、単位時間、単位面積当たり $\bar{f}(\theta, z)$ の熱量を受ける場合を考える。この場合の熱伝導基礎式は

$$T_{rr} + r^{-1}T_{r\theta} + r^{-2}T_{\theta\theta} + T_{zz} = \kappa^{-1}T_t \quad (1)$$

ただし、 $T_{r\theta} \equiv \partial T / \partial r$, $T_{\theta\theta} \equiv \partial T / \partial \theta$, $T_{zz} \equiv \partial T / \partial z$, $T_t \equiv \partial T / \partial t$, T は温度、 κ は温度伝導率、 t は時間である。初期条件は

$$t=0 \text{ で } T=0 \quad (2)$$

境界条件は

$$z=\pm l \text{ で } T_{zz}=0 \quad (3)$$

$$r=a \text{ で } \lambda T_{rr} = \bar{f}(\theta, z) \quad (4)$$

ここで、 λ は熱伝導率、 $\bar{f}(\theta, z) = \bar{f}(-\theta, z)$, $\bar{f}(\theta, z) = -\bar{f}(\theta, -z)$ と仮定する。このように仮定しても一般性は失われない。 Q を単位時間、単位面積当たり一定な流入熱量とし、 a を代表寸法にとり、無次元量を導入する。

$$\begin{aligned} \rho &= r/a, \quad \zeta = z/a, \quad t' = kt/a^2, \quad \zeta_1 = l/a \\ \tau &= \lambda T/Qa, \quad f(\theta, \zeta) = \bar{f}(\theta, z)/Q \end{aligned} \quad (5)$$

式(1)～(4)を式(5)を用いて無次元表示し、式(2)を考慮してラプラス変換をおこなうと

$$\Delta_1 \tau^* = p \tau^* \quad (6)$$

$$\zeta = \pm \zeta_1 \text{ で } \tau, \zeta^* = 0 \quad (7)$$

$$\rho = 1 \text{ で } \tau, \rho^* = p^{-1}f(\theta, \zeta) \quad (8)$$

ただし、 p はラプラススペラメータ、 $\Delta_1 = \partial^2/\partial \rho^2 + (1/\rho) \times (\partial/\partial \rho) + (1/\rho^2)(\partial^2/\partial \theta^2) + \partial^2/\partial \zeta^2$ 。式(6)の一般解より、本問題に適する解は

$$\begin{aligned} \tau^* &= I_0(\sqrt{p}\rho)(A_0 + B_0\zeta) + \sum_n I_n(\sqrt{p}\rho) \cos n\theta \\ &\quad \times (C + D\zeta) + \sum_\alpha B I_0(q\rho) \sin \alpha \zeta \\ &+ \sum_n \sum_\alpha A I_n(q\rho) \sin \alpha \zeta \cos n\theta \quad q^2 = p + \alpha^2 \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、 I_n は n 次の変形ベッセル関数である。問題の ζ に対する反対称性と式(7)より

$$A_0 = B_0 = C = D = 0, \quad \alpha_n = (2m-1)\pi/2\zeta_1 \quad (10)$$

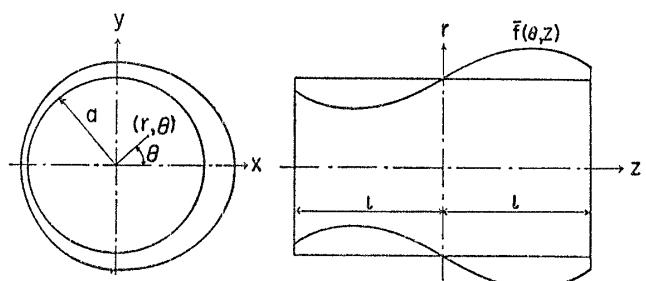


図1 非軸対称加熱を受ける有限円柱

* 昭和53年11月22日 関西支部第239回講演会において講演、原稿受付 昭和54年3月13日。

** 正員、静岡大学工学部(〒432 浜松市城北3-5-1)。

*** 正員、大阪府立大学工学部。

$$\begin{aligned} \Phi = & a^2 K \sum_{m=1}^{\infty} \left[\bar{A}_{m0} \alpha_m^{-2} \exp \{-\alpha_m^2 t'\} + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_{mn} \rho I_{n+1}(\alpha_m \rho) / 2\alpha_m + \sum_{k=1}^{\infty} A_{mnk} J_n(\beta_{nk} \rho) \right. \right. \\ & \times \exp \{-(\alpha_m^2 + \beta_{nk}^2)t'\} / (\alpha_m^2 + \beta_{nk}^2) \Big\} \cos n\theta \Big] \sin \alpha_m \zeta \quad \dots \dots \dots \quad (26) \end{aligned}$$

$$M = a^2 K \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^{-3} \left\{ B_{nm} I_n(\alpha_m \rho) + C_{nm} \alpha_m \rho I_{n+1}(\alpha_m \rho) \right\} \cos \alpha_m \zeta + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{nk}^{-3} \times \{ D_{nk} \cosh \beta_{nk} \zeta + E_{nk} \beta_{nk} \zeta \sinh \beta_{nk} \zeta \} J_n(\beta_{nk} \rho) \right] \cos n\theta \quad \dots \dots \dots \quad (27)$$

$$\Psi = a^2 K \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^{-2} F_{nm} I_n(\alpha_m \rho) \sin \alpha_m \zeta + \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_{ni}^{-2} G_{ni} J_n(\gamma_{ni} \rho) \sinh \gamma_{ni} \zeta \right] \sin n\theta \quad \dots \dots \dots \quad (28)$$

ただし、 $K = (1+\nu)\alpha_m Qa/\lambda(1-\nu)$ 、 $\bar{A}_{m0} = 2f_{0m}/\alpha_m^2$ 、 $A_{mn} = f_{nm}/(\alpha_m I_{n+1}(\alpha_m) + nI_n(\alpha_m))$ 、 $A_{mnk} = 2\beta_{nk}^2 f_{nm}$
 $/((\beta_{nk}^2 + \alpha_m^2)(\beta_{nk}^2 - n^2)J_n(\beta_{nk}))$ 。式(26)～(28)を式(19)に代入すると、各熱応力成分は次式で表される。

$$\begin{aligned}
& \widehat{\rho\rho} = \sigma_{\rho\rho}/2GK = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{m=1}^{\infty} [B_{nm} \{ (n(n-1)/\alpha_m^2 \rho^2 + 1) I_n(\alpha_m \rho) - I_{n+1}(\alpha_m \rho)/\alpha_m \rho \} \right. \\
& + C_{nm} \{ (\alpha_m^2 \rho^2 + n^2 + n) I_{n+1}(\alpha_m \rho)/\alpha_m \rho + (1-2\nu) I_n(\alpha_m \rho) \}] \sin \alpha_m \zeta \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} [D_{nk} \{ (\rho^2 \beta_{nk}^2 + n - n^2) J_n(\beta_{nk} \rho)/\beta_{nk}^2 \rho^2 - J_{n+1}(\beta_{nk} \rho)/\beta_{nk} \rho \} \sinh \beta_{nk} \zeta \\
& + E_{nk} \{ 2\nu J_n(\beta_{nk} \rho) \sinh \beta_{nk} \zeta + ((\beta_{nk}^2 \rho^2 + n - n^2) J_n(\beta_{nk} \rho)/\beta_{nk}^2 \rho^2 - J_{n+1}(\beta_{nk} \rho)/\beta_{nk} \rho \} \\
& \times \{ \sinh \beta_{nk} \zeta + \beta_{nk} \zeta \cosh \beta_{nk} \zeta \})] + 2n \sum_{m=1}^{\infty} F_{nm} \{ I_{n+1}(\alpha_m \rho)/\alpha_m \rho + (n-1) I_n(\alpha_m \rho)/\alpha_m^2 \rho^2 \} \\
& \times \sin \alpha_m \zeta + 2n \sum_{i=1}^{\infty} G_{ni} \{ (n-1) J_n(\gamma_{ni} \rho)/\gamma_{ni}^2 \rho^2 - J_{n+1}(\gamma_{ni} \rho)/\gamma_{ni} \rho \} \sinh \gamma_{ni} \zeta \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\delta_{n0} \bar{A}_{m0} \exp \{ -\alpha_m^2 t' \} + A_{mn} \{ (\alpha_m^2 \rho^2 + n^2 + n) I_{n+1}(\alpha_m \rho)/\alpha_m \rho - I_n(\alpha_m \rho) \} / 2 \right. \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} A_{mnk} \{ (n^2 - n + \alpha_m^2 \rho^2) J_n(\beta_{nk} \rho)/\rho^2 + \beta_{nk} J_{n+1}(\beta_{nk} \rho)/\rho \} \\
& \times \exp \{ -(\beta_{nk}^2 + \alpha_m^2) t' \} / (\beta_{nk}^2 + \alpha_m^2) \left. \right] \sin \alpha_m \zeta \cos n\theta \quad \dots \dots \dots \quad (29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \widehat{\partial\theta} = \sigma_{\theta\theta}/2GK = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{m=1}^{\infty} [B_{nm}\{I_{n+1}(\alpha_m\rho)/\alpha_m\rho - n(n-1)I_n(\alpha_m\rho)/\alpha_m^2\rho^2\} \right. \\
& - C_{nm}\{(2\nu-1)I_n(\alpha_m\rho) + n(n+1)I_{n+1}(\alpha_m\rho)/\alpha_m\rho\}] \sin \alpha_m \zeta \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} [D_{nm}\{J_{n+1}(\beta_{nk}\rho)/\beta_{nk}\rho + n(n-1)J_n(\beta_{nk}\rho)/\beta_{nk}^2\rho^2\} \sinh \beta_{nk}\zeta + E_{nk}[2\nu J_n(\beta_{nk}\rho) \\
& \times \sinh \beta_{nk}\zeta + \{J_{n+1}(\beta_{nk}\rho)/\beta_{nk}\rho + n(n-1)J_n(\beta_{nk}\rho)/\beta_{nk}^2\rho^2\} (\sinh \beta_{nk}\zeta + \beta_{nk}\zeta \cosh \beta_{nk}\zeta)\}] \\
& - 2n \sum_{m=1}^{\infty} F_{nm}\{(n-1)I_n(\alpha_m\rho)/\alpha_m^2\rho^2 + I_{n+1}(\alpha_m\rho)/\alpha_m\rho\} \sin \alpha_m \zeta \\
& - 2n \sum_{i=1}^{\infty} G_{ni}\{(n-1)J_n(\gamma_{ni}\rho)/\gamma_{ni}^2\rho^2 - J_{n+1}(\gamma_{ni}\rho)/\gamma_{ni}\rho\} \sinh \gamma_{ni}\zeta + \sum_{m=1}^{\infty} [\bar{A}_{m0}\delta_{n0} \exp\{-\alpha_m^2 t'\} \\
& - A_{mn}\{I_n(\alpha_m\rho) + n(n+1)I_{n+1}(\alpha_m\rho)/\alpha_m\rho\}/2 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{mnk}[\{\beta_{nk}^2 + \alpha_m^2 - n(n-1)/\rho^2\} \\
& \times J_n(\beta_{nk}\rho) - \beta_{nk}J_{n+1}(\beta_{nk}\rho)/\rho] \exp\{-(\beta_{nk}^2 + \alpha_m^2)t'\}/(\alpha_m^2 + \beta_{nk}^2)] \sin \alpha_m \zeta \Big] \cos n\theta
\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
& \widehat{\zeta\zeta} = \sigma_{\zeta\zeta}/2GK = - \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{m=1}^{\infty} [B_{nm} I_n(\alpha_m \rho) + C_{nm} \{\alpha_m \rho I_{n+1}(\alpha_m \rho) + 2(2-\nu) I_n(\alpha_m \rho)\}] \right. \\
& \quad \times \sin \alpha_m \zeta + \sum_{k=1}^{\infty} [D_{nk} J_n(\beta_{nk} \rho) \sinh \beta_{nk} \zeta + E_{nk} J_n(\beta_{nk} \rho) ((2\nu-1) \sinh \beta_{nk} \zeta \\
& \quad + \beta_{nk} \zeta \cosh \beta_{nk} \zeta)] + \sum_{m=1}^{\infty} [A_{mn} \{\alpha_m \rho I_{n+1}(\alpha_m \rho)/2 + I_n(\alpha_m \rho)\} \\
& \quad - \left. \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{nk}^2 A_{mnk} J_n(\beta_{nk} \rho) \exp \{-(\beta_{nk}^2 + \alpha_m^2)t'\}/(\alpha_m^2 + \beta_{nk}^2) \right] \sin \alpha_m \zeta \Big] \cos n\theta \quad(31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \widehat{\rho\theta} = \sigma_{\theta\theta}/2GK = \sum_{n=1}^{\infty} \left[n \sum_{m=1}^{\infty} \left[-B_{nm} \{I_{n+1}(\alpha_m \rho)/\alpha_m \rho + (n-1)I_n(\alpha_m \rho)/\alpha_m^2 \rho^2\} \right. \right. \\
& + C_{nm} \{(n+1)I_{n+1}(\alpha_m \rho)/\alpha_m \rho - I_n(\alpha_m \rho)\} \] \sin \alpha_m \zeta + n \sum_{k=1}^{\infty} \{(n-1)J_n(\beta_{nk} \rho)/\beta_{nk}^2 \rho^2 \\
& - J_{n+1}(\beta_{nk} \rho)/\beta_{nk} \rho\} [D_{nk} \sinh \beta_{nk} \zeta + E_{nk} \{ \sinh \beta_{nk} \zeta + \beta_{nk} \zeta \cosh \beta_{nk} \zeta \}] \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} F_{nm} \{(\alpha_m^2 \rho^2 + 2n^2 - 2n)I_n(\alpha_m \rho)/\alpha_m^2 \rho^2 - 2I_{n+1}(\alpha_m \rho)/\alpha_m \rho\} \sin \alpha_m \zeta \\
& - \sum_{i=1}^{\infty} G_{ni} \{(2n^2 - 2n - \gamma_{ni}^2 \rho^2)J_n(\gamma_{ni} \rho)/\gamma_{ni}^2 \rho^2 + 2J_{n+1}(\gamma_{ni} \rho)/\gamma_{ni} \rho\} \sinh \gamma_{ni} \zeta \\
& - n \sum_{m=1}^{\infty} [A_{mn} \{I_n(\alpha_m \rho) - (n+1)I_{n+1}(\alpha_m \rho)/\alpha_m \rho\}/2 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{mnk} \{(n-1)J_n(\beta_{nk} \rho)/\beta_{nk}^2 \rho^2 \\
& - \beta_{nk} J_{n+1}(\beta_{nk} \rho)/\rho\} \exp \{-(\beta_{nk}^2 + \alpha_m^2)t'\}/(\beta_{nk}^2 + \alpha_m^2)] \sin \alpha_m \zeta \Big] \sin n\theta \quad \dots \dots \dots \quad (33)
\end{aligned}$$

ただし、 β_{nk} は $\beta_n J_{n+1}(\beta_n) - n J_n(\beta_n) = 0$ の第 k 番めの正根で、 γ_{ni} は $J_n(\gamma_n) = 0$ の第 i 番めの正根である。

未知係数は境界条件式(20)～(25)より決定する。 $n=0$ の場合の未知係数の決定方法は軸対称加熱の場合と同一である⁽⁴⁾ので、ここでは $n \geq 1$ の場合について述べる。

式(20)より

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} [B_{nm}\{(n^2-n+\alpha_m^2)I_m(\alpha_m)/\alpha_m^2 - I_{n+1}(\alpha_m)/\alpha_m\} + C_{nm}\{(n^2+n+\alpha_m^2)I_{n+1}(\alpha_m)/\alpha_m \\
& + (1-2\nu)I_n(\alpha_m)\}] \sin \alpha_m \zeta + \sum_{k=1}^{\infty} [D_{nk}(1-n^2/\beta_{nk}^2)J_n(\beta_{nk}) \sinh \beta_{nk} \zeta \\
& + E_{nk}J_{nk}(\beta_{nk})\{(2\nu+1-n^2/\beta_{nk}^2) \sinh \beta_{nk} \zeta + (1-n^2/\beta_{nk}^2)\beta_{nk} \zeta \cosh \beta_{nk} \zeta\}] \\
& + 2n \sum_{m=1}^{\infty} F_{nm}\{\alpha_m I_{n+1}(\alpha_m) + (n-1)I_n(\alpha_m)\} \sin \alpha_m \zeta / \alpha_m^2 - 2n \sum_{i=1}^{\infty} G_{ni}J_{n+1}(\gamma_{ni}) \sinh \gamma_{ni} \zeta / \gamma_{ni} \\
& = - \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_{mn}\{(\alpha_m^2+n^2+n)I_{n+1}(\alpha_m) - \alpha_m I_n(\alpha_m)\} / 2\alpha_m \right. \\
& \left. + \sum_{k=1}^{\infty} (n^2+\alpha_m^2)A_{nmk}J_n(\beta_{nk}) \exp{-(\beta_{nk}^2+\alpha_m^2)t'} / (\beta_{nk}^2+\alpha_m^2) \right] \sin \alpha_m \zeta(35)
\end{aligned}$$

式(21)より

式(22)より

式(23)より

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} [B_{nm} I_n(\alpha_m \rho) + C_{nm} \{\alpha_m \rho I_{n+1}(\alpha_m \rho) + 2(2-\nu) I_n(\alpha_m \rho)\}] \sin \alpha_m \zeta_1 \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} [D_{nk} J_n(\beta_{nk} \rho) \sinh \beta_{nk} \zeta_1 + E_{nk} J_n(\beta_{nk} \rho) \{(2\nu-1) \sinh \beta_{nk} \zeta_1 + \beta_{nk} \zeta_1 \cosh \beta_{nk} \zeta_1\}] \\
& = - \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_{mn} \{\alpha_m \rho I_{n+1}(\alpha_m \rho)/2 + I_n(\alpha_m \rho)\} - \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{nk}^2 A_{mnk} J_n(\beta_{nk} \rho) \right. \\
& \times \left. \exp \{-(\beta_{nk}^2 + \alpha_m^2)t'\}/(\beta_{nk}^2 + \alpha_m^2) \right] \sin \alpha_m \zeta_1 \quad \dots \dots \dots \quad (38)
\end{aligned}$$

式(24)より

式(25)より

$$\sum_{k=1}^{\infty} [D_{nk} \cosh \beta_{nk} \zeta_1 + E_{nk} \{ 2\nu \cosh \beta_{nk} \zeta_1 + \beta_{nk} \zeta_1 \sinh \beta_{nk} \zeta_1 \}] \{ J_{n+1}(\beta_{nk} \rho) - n J_n(\beta_{nk} \rho) / \beta_{nk} \rho \} + n \sum_{i=1}^{\infty} G_{ni} J_n(\gamma_{ni} \rho) \cosh \gamma_{ni} \zeta_1 / \gamma_{ni} \rho = 0 \dots \dots \dots \quad (40)$$

式(35)は $\sinh \beta_{nk}\zeta$, $\beta_{nk}\zeta \cosh \beta_{nk}\zeta$, $\sinh \gamma_{ni}\zeta$ と $\sin \alpha_m\zeta$ の関数だから, $\sinh \beta_{nk}\zeta$, $\beta_{nk}\zeta \cosh \beta_{nk}\zeta$ と $\sinh \gamma_{ni}\zeta$ を区間 $-\zeta_1 \leq \zeta \leq \zeta_1$ で $\sin \alpha_m\zeta$ に関してフーリエ級数に展開し, その係数をそれぞれ a_{nkm} , b_{nkm} , c_{nkm} とし, 式(35)で $\sin \alpha_m\zeta$ の係数を等置すれば, B_{nm} , C_{nm} 等の未知係数を決定する式を得る. 同様に $I_m(\alpha_m\rho)$, $\rho I_{n+1}(\alpha_m\rho)$, $J_n(\gamma_{ni}\rho)$, $\rho J_{n+1}(\gamma_{ni}\rho)$ を区間 $0 \leq \rho \leq 1$ で $J_n(\beta_{nk}\rho)$ に関するベッセル級数展開し, その係数を d_{nkm} , e_{nkm} , f_{nik} , g_{nik} とし, $J_n(\beta_{nk}\rho)$, $\rho J_{n+1}(\beta_{nk}\rho)$ を区間 $0 < \rho < 1$ で $J_n(\gamma_{ni}\rho)$ に関するベッセル級数展開し, その係数を h_{nki} , l_{nki} とすると

$$F_{nm} = -\alpha_m B_{nm} \{I_{n+1}(\alpha_m)/I_n(\alpha_m) + n/\alpha_m\}/n - \alpha_m C_{nm} \{2(1-\nu)n/\alpha_m + \alpha_m + (2-2\nu-n)I_{n+1}(\alpha_m)/I_n(\alpha_m)\}/n - \alpha_m A_{mn} \{\alpha_m - nI_{n+1}(\alpha_m)/I_n(\alpha_m)\}/2n \quad \dots \dots \dots \quad (41)$$

$$G_{ni} = -\gamma_{ni} \sum_{k=1}^{\infty} (l_{nki} - nh_{nki}/\beta_{nk}) [D_{nk} \cosh \beta_{nk} \zeta_1 + E_{nk} (2\nu \cosh \beta_{nk} \zeta_1 + \beta_{nk} \zeta_1 \sinh \beta_{nk} \zeta_1)] / \{n \cosh \gamma_{ni} \zeta_1\} \quad \dots \dots \dots \quad (42)$$

$$B_{nm} = \left[\bar{V}_{nm} \left\{ \bar{T}_{nm} + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{S}_{nk} - \sum_{k=1}^{\infty} D_{nk} \bar{Q}_{nk} - \sum_{k=1}^{\infty} E_{nk} \bar{R}_{nk} \right\} - \bar{P}_{nm} \left\{ \bar{Z}_{nm} + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{Y}_{nk} - \sum_{k=1}^{\infty} D_{nk} \bar{W}_{nk} - \sum_{k=1}^{\infty} E_{nk} \bar{X}_{nk} \right\} \right] / (\bar{O}_{nm} \bar{V}_{nm} - \bar{U}_{nm} \bar{P}_{nm}) \quad \dots \quad (43)$$

$$C_{nm} = \left[\bar{O}_{nm} \left\{ \bar{Z}_{nm} + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{Y}_{nkm} - \sum_{k=1}^{\infty} D_{nk} \bar{W}_{nkm} - \sum_{k=1}^{\infty} E_{nk} \bar{X}_{nkm} \right\} - \bar{U}_{nm} \left\{ \bar{T}_{nm} + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{S}_{nkm} - \sum_{k=1}^{\infty} D_{nk} \bar{O}_{nkm} - \sum_{k=1}^{\infty} E_{nk} \bar{R}_{nkm} \right\} \right] / (\bar{O}_{nm} \bar{V}_{nm} - \bar{U}_{nm} \bar{P}_{nm}) \quad (44)$$

ただし

$$\begin{aligned} \bar{O}_{nm} &= \{1 - n(n-1)/\alpha_m^2\} I_n(\alpha_m) - (4n-1) I_{n+1}(\alpha_m)/\alpha_m - 2I_{n+1}^2(\alpha_m)/I_n(\alpha_m) \\ \bar{P}_{nm} &= \{n(n+1)/\alpha_m + \alpha_m\} I_n(\alpha_m) + (1-2\nu) I_n(\alpha_m) - 2\{2n(1-\nu)/\alpha_m + \alpha_m + (2-2\nu-n) \\ &\quad \times I_{n+1}(\alpha_m)/I_n(\alpha_m)\} \{ \alpha_m I_{n+1}(\alpha_m) + (n-1) I_n(\alpha_m) \}/\alpha_m \\ \bar{Q}_{nkm} &= (1-n^2/\beta_{nk}^2) a_{nkm} J_n(\beta_{nk}) + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \cosh \beta_{nk} \zeta_i C_{nkm} J_{n+1}(\gamma_{ni}) (l_{nki} - nh_{nki}/\beta_{nk}) / \cosh \gamma_{ni} \zeta_1 \\ \bar{R}_{nkm} &= J_n(\beta_{nk}) \{(2\nu+1-n^2/\beta_{nk}^2) a_{nkm} + (1-n^2/\beta_{nk}^2) b_{nkm}\} + (2\nu \cosh \beta_{nk} \zeta_1 \\ &\quad + \beta_{nk} \zeta_1 \sinh \beta_{nk} \zeta_1) \sum_{i=1}^{\infty} 2C_{nkm} J_{n+1}(\gamma_{ni}) (l_{nki} - nh_{nki}/\beta_{nk}) / \cosh \gamma_{ni} \zeta_1 \\ \bar{T}_{nm} &= A_{mn} \{(\alpha_m^2 - 3n^2 + n) I_{n+1}(\alpha_m) + \alpha_m (2n-1) I_n(\alpha_m) - 2n\alpha_m I_{n+1}^2(\alpha_m)/I_n(\alpha_m)\} / 2\alpha_m \\ \bar{S}_{nkm} &= -(n^2 + \alpha_m^2) A_{nkm} J_n(\beta_{nk}) \exp \{-(\alpha_m^2 + \beta_{nk}^2) t'\} / (\beta_{nk}^2 + \alpha_m^2) \\ \bar{U}_{nm} &= n I_{n+1}(\alpha_m)/\alpha_m + n(n-1) I_n(\alpha_m)/\alpha_m^2 - \{I_{n+1}(\alpha_m)/I_n(\alpha_m) + n/\alpha_m\} \\ &\quad \times \{(\alpha_m^2 + 2n^2 - 2n) I_n(\alpha_m) - 2\alpha_m I_{n+1}(\alpha_m)\} / n\alpha_m \\ \bar{V}_{nm} &= -[n(n+1) I_{n+1}(\alpha_m)/\alpha_m - n I_n(\alpha_m) + \{2n(1-\nu)/\alpha_m + \alpha_m + (2-2\nu-n) \\ &\quad \times I_{n+1}(\alpha_m)/I_n(\alpha_m)\} \{(\alpha_m^2 + 2n^2 - 2n) I_n(\alpha_m) - 2\alpha_m I_{n+1}(\alpha_m)\} / n\alpha_m] \\ \bar{W}_{nkm} &= n a_{nkm} J_n(\beta_{nk}) / \beta_{nk}^2 - 2 \cosh \beta_{nk} \zeta_1 \sum_{i=1}^{\infty} C_{nkm} J_{n+1}(\gamma_{ni}) (\beta_{nk} l_{nki} - nh_{nki}) / (n \beta_{nk} \cosh \gamma_{ni} \zeta_1) \\ \bar{X}_{nkm} &= n(a_{nkm} + b_{nkm}) J_n(\beta_{nk}) / \beta_{nk}^2 - 2 \{2\nu \cosh \beta_{nk} \zeta_1 + \beta_{nk} \zeta_1 \sinh \beta_{nk} \zeta_1\} \\ &\quad \times \sum_{i=1}^{\infty} C_{nkm} J_{n+1}(\gamma_{ni}) (\beta_{nk} l_{nki} - nh_{nki}) / (n \beta_{nk} \cosh \gamma_{ni} \zeta_1) \\ \bar{Z}_{nm} &= A_{mn} \{ \alpha_m (\alpha_m^2 + n^2 - 2n) I_n(\alpha_m) - (2\alpha_m^2 + n\alpha_m^2 + n^3 - 3n^2) I_{n+1}(\alpha_m) \\ &\quad + 2n\alpha_m I_{n+1}^2(\alpha_m)/I_n(\alpha_m)\} / 2n\alpha \\ \bar{Y}_{nkm} &= n A_{nkm} J_n(\beta_{nk}) \exp \{-(\beta_{nk}^2 + \alpha_m^2) t'\} / (\beta_{nk}^2 + \alpha_m^2) \end{aligned}$$

式(41)～(44)を式(38), (39)を区間 $0 \leq \rho \leq 1$ で $J_n(\beta_{nk}\rho)$ に関してベッセル級数に展開した式に代入することにより, 次式を得る.

$$\begin{aligned} &D_{nk} \sinh \beta_{nk} \zeta_1 + E_{nk} \{ (2\nu-1) \sinh \beta_{nk} \zeta_1 + \beta_{nk} \zeta_1 \cosh \beta_{nk} \zeta_1 \} \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \sin \alpha_m \zeta_1 \left[d_{nmk} \sum_{j=1}^{\infty} D_{nj} (\bar{P}_{nm} \bar{W}_{njm} - \bar{V}_{nm} \bar{Q}_{njm}) + (\alpha_m e_{nmk} + 2(2-\nu) d_{nmk}) \right. \\ &\quad \times \sum_{j=1}^{\infty} D_{nj} (\bar{U}_{nm} \bar{Q}_{njm} - \bar{O}_{nm} \bar{W}_{njm} + d_{nmk} \sum_{j=1}^{\infty} E_{nj} (\bar{P}_{nm} \bar{X}_{njm} - \bar{V}_{nm} \bar{R}_{njm})) \\ &\quad \left. + (\alpha_m e_{nmk} + 2(2-\nu) d_{nmk}) \sum_{j=1}^{\infty} E_{nj} (\bar{U}_{nm} \bar{R}_{njm} - \bar{O}_{nm} \bar{X}_{njm}) \right] / (\bar{O}_{nm} \bar{V}_{nm} - \bar{P}_{nm} \bar{U}_{nm}) \\ &= - \sum_{m=1}^{\infty} [A_{mn} \{ \alpha_m e_{nmk} / 2 + d_{nmk} \} - \beta_{nk}^2 A_{nkm} \exp \{-(\alpha_m^2 + \beta_{nk}^2) t'\} / (\beta_{nk}^2 + \alpha_m^2)] \\ &\quad \times \sin \alpha_m \zeta_1 - \sum_{m=1}^{\infty} \sin \alpha_m \zeta_1 \left[d_{nmk} \left\{ \bar{V}_{nm} \left(\bar{T}_{nm} + \sum_{j=1}^{\infty} \bar{S}_{njm} \right) - \bar{P}_{nm} \left(\bar{Z}_{nm} + \sum_{j=1}^{\infty} \bar{Y}_{njm} \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. + (\alpha_m e_{nmk} + 2(2-\nu) d_{nmk}) \left\{ \bar{O}_{nm} \left(\bar{Z}_{nm} + \sum_{j=1}^{\infty} \bar{Y}_{njm} \right) - \bar{U}_{nm} \left(\bar{T}_{nm} + \sum_{j=1}^{\infty} \bar{S}_{njm} \right) \right\} \right] / (\bar{O}_{nm} \bar{V}_{nm} - \bar{P}_{nm} \bar{U}_{nm}) \quad (45) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &D_{nk} n \cosh \beta_{nk} \zeta_1 / \beta_{nk} + E_{nk} n \{ 2\nu \cosh \beta_{nk} \zeta_1 + \beta_{nk} \zeta_1 \sinh \beta_{nk} \zeta_1 \} / \beta_{nk} \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} (f_{nik} - \gamma_{ni} g_{nik} / n) \sum_{j=1}^{\infty} D_{ni} \cosh \beta_{nj} \zeta_i (l_{nji} - nh_{nji}/\beta_{nj}) + E_{nj} (l_{nji} - nh_{nji}/\beta_{nj}) \\ &\quad \times \{ 2\nu \cosh \beta_{nj} \zeta_i + \beta_{nj} \zeta_i \sinh \beta_{nj} \zeta_i \} = 0 \quad (46) \end{aligned}$$

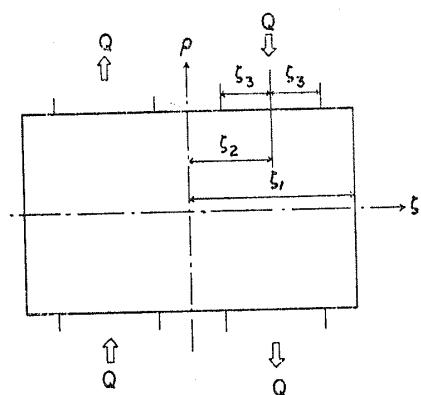


図2 ステップ状非軸対称加熱を受ける有限円柱

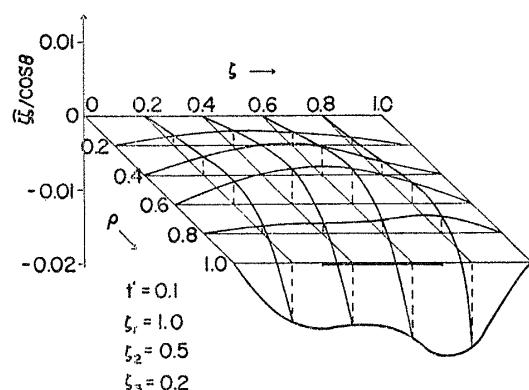


図6 軸応力分布

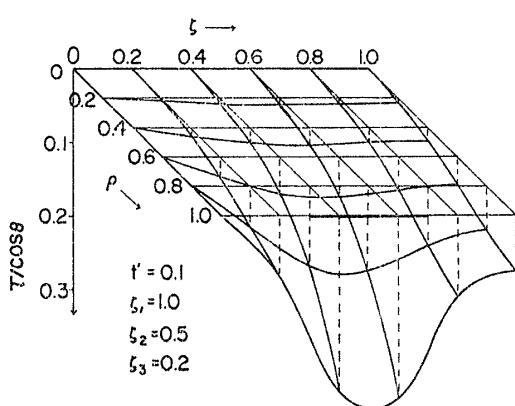


図3 温度分布

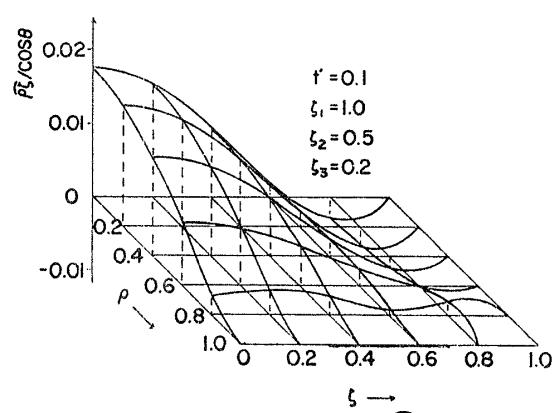
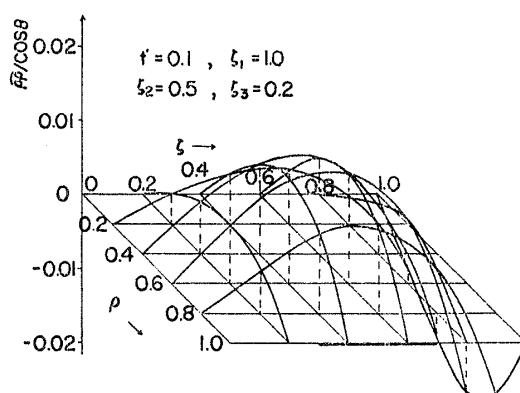
図7せん断応力分布 ($\rho\zeta$)

図4 半径応力分布

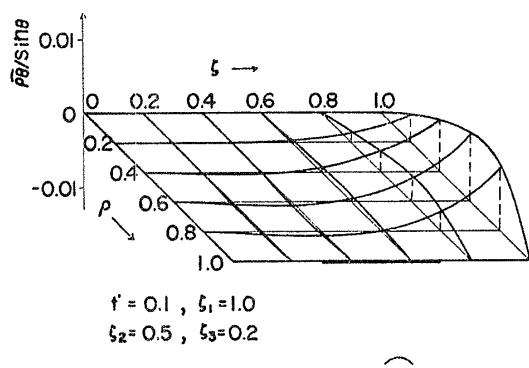
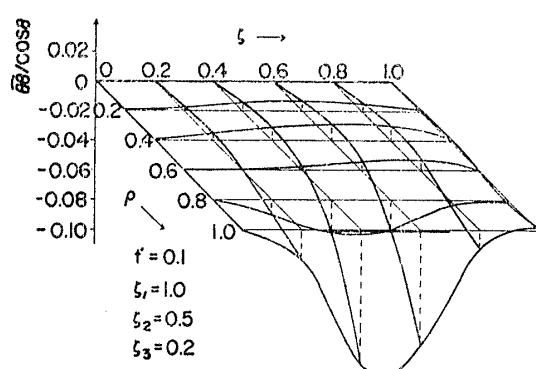
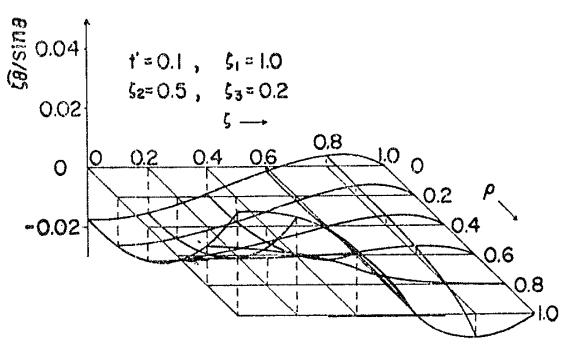
図8 せん断応力分布 ($\rho\theta$)

図5 フープ応力分布

図9 せん断応力分布 ($\zeta\theta$)

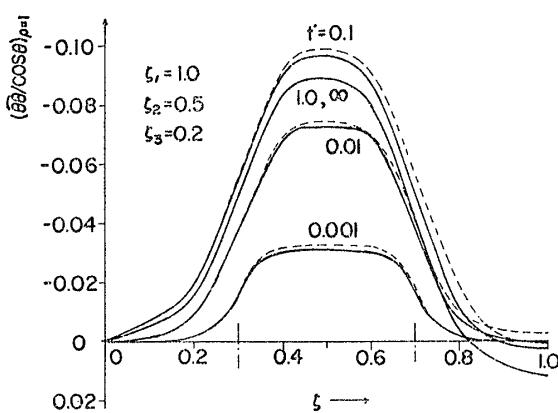
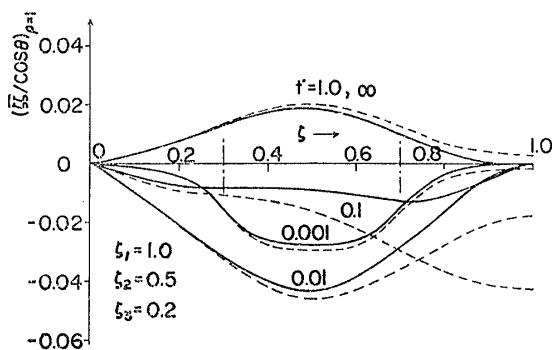
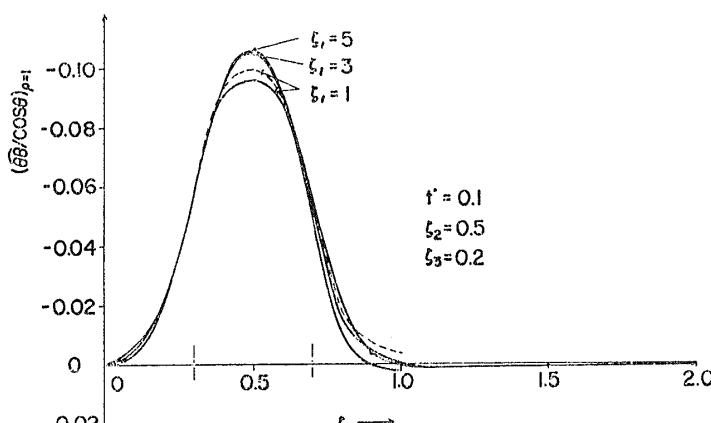
図 10 $\rho=1$ 上のフープ応力の時間変化図 11 $\rho=1$ 上の軸応力の時間変化

図 12 フープ応力

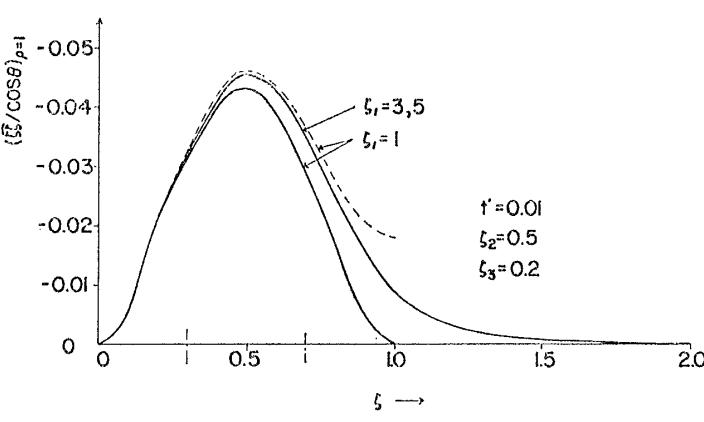


図 13 軸応力

式(45)と(46)の無限連立方程式を有限連立方程式で近似することにより、 D_{nk} , E_{nk} が決定される。順次式(42)～(44)と(41)に代入することにより、 B_{nm} , C_{nm} , G_{ni} , F_{nm} が決定される。

3. 数値計算結果と考察

数値計算は図2に示す受熱形状

$$\begin{aligned} f(\theta, \zeta) &= H(\zeta_3 - |\zeta - \zeta_2|)(\zeta/|\zeta|) \cos \theta \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} (4/\alpha_m \zeta_1) \sin \alpha_m \zeta_2 \sin \alpha_m \zeta_3 \\ &\quad \times \sin \alpha_m \zeta \cos \theta \end{aligned}$$

の場合について実行した。ここで、 $H(\cdot)$ はヘビサイドのステップ関数である。図3から図9には $t'=0.1$, $\zeta_1=1.0$, $\zeta_2=0.5$, $\zeta_3=0.2$ の場合の温度分布と各熱応力分布を示す。最大応力はフープ応力である。図6で軸応力が $\rho=1$, $\zeta=0.5$ 近傍で波をうっているのは、図11からわかるように時間の経過につれ圧縮応力場から引張応力場に変化する途中の状態を示しているからである。図10と11には他の応力成分と比較して大きな応力を示すフープ応力と軸応力の $\rho=1$ 上における時間変化を示す。図10と11に示された破線は $\zeta=\pm\zeta_1$ の境界において、合力と合モーメントが零である条件から求めた近似解である。

すなわち、式(27)と(28)において $D_{nk}=E_{nk}=G_{ni}=0$ と置き、未知係数 B_{nm} , C_{nm} , F_{nm} を境界条件式(20)～(22)から決定することにより得られる解である。フープ応力は時間とともに圧縮応力が増加し、フーリエ数(t')が0.1近傍で最大値を示し、定常状態になる。軸応力は初期のときは圧縮応力が増加し、時間が経過するにつれ引張応力となる。近似解はフープ応力の場合が軸応力の場合より厳密解に近い値をとる。図12と13には $\zeta_2=0.5$, $\zeta_3=0.2$ と受熱位置と幅を一定にし、円柱の長さを変化させた場合のフープ応力と軸応力を示す。破線は近似解を示し、 $\zeta_1=3, 5$ の場合ともグラフ上では近似解と厳密解は一致する。受熱位置と幅が同一の場合、円柱が長くなるにつれ応力は大きくなるが、 $\zeta_1=3$ と $\zeta_1=5$ の場合では応力はほぼ等しくなる。

数値計算において、 $\sum_{m=1}^{\infty}$, $\sum_{k=1}^{\infty}$, $\sum_{i=1}^{\infty}$ を $\sum_{m=1}^{20}$, $\sum_{k=1}^{20}$, $\sum_{i=1}^{20}$ で近似して計算を実行した。解の精度はフーリエ数、円柱の長さ、境界上の

位置により異なるが、 $t'=0.1$ 、 $\zeta_1=1$ のとき、零でなければならない境界上の各熱応力成分は最大応力に対し平均で、 $(\widehat{\rho\rho})_{\theta=1}=2\%$ 、 $(\widehat{\rho\zeta})_{\theta=1}=2\times 10^{-5}\%$ 、 $(\widehat{\rho\theta})_{\theta=1}=0.2\%$ 、 $(\widehat{\zeta\zeta})_{\zeta=\pm\zeta_1}=2\%$ 、 $(\widehat{\zeta\theta})_{\zeta=\pm\zeta_1}=5\times 10^{-4}\%$ 、 $(\widehat{\theta\theta})_{\zeta=\pm\zeta_1}=0.02\%$ 程度の値をもつ。よってほぼ境界条件は満足していると考えられる。

4. 結論

非軸対称加熱を受ける有限円柱の非定常熱応力を理論解析し、図2に示す形状の熱量 ($\zeta_2=0.5$ 、 $\zeta_3=0.2$) を受ける場合について数値計算をおこない、次の結論を得た。

(1) 非軸対称加熱を受ける有限円柱の非定常熱応力問題は熱弾性変位ポテンシャル、Michellの関数、Boussinesqの関数を用いて求めることができる。

(2) 最大応力は圧縮のフープ応力であり、最大応力が生じる時間は $t'=0.1$ 近傍である。

(3) 受熱位置と幅が同一の場合、円柱が長くなるにつれ応力は大きくなる。

(4) 円柱が長くなるにつれ、近似解は厳密解に近づく。

文 献

- (1) 小泉、機論、43-218(昭39-10), 1183.
- (2) Valentin, R.A. and Carey, J.J., Nucl. Engng. & Des., 12-3 (1970-6), 227.
- (3) 野田・ほか2名、機論、43-365(昭52-1), 38.
- (4) Noda, N. and Takeuti, Y., Theor. Appl. Mech., 25 (1977), 637.
- (5) 菅野・斎藤、機論、44-382(昭53-6), 1865.
- (6) Takeuti, Y. and Noda, N., Trans. ASME, Ser. E, 45-4 (1978-12), 817.

討 論

[質問] 長谷川久夫(広島電機大学)

(1) 有限円柱の非軸対称熱応力問題の論文、興味深く拝見させていただいた。内容に問題があるといふ

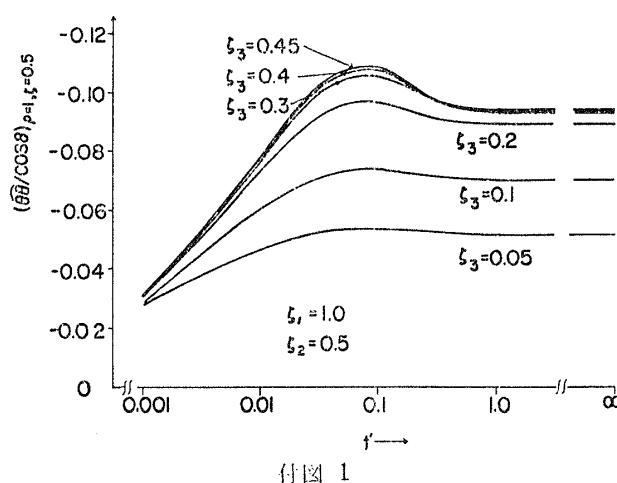
ことではないが、解法の統一性(あるいは美しさ)の観点から、結論(1)に関して、次のことをお伺いしたい。本問題の熱応力を、熱弾性ポテンシャル ϕ と Michell の応力関数 M だけ、あるいは熱弾性ポテンシャル ϕ と Boussinesq の応力関数(複数)だけで取扱うことはできないか。

(2) 温度分布 $\tau(r, \theta, z, t)$ では時間 t を考慮し、式(15)~(17)では考慮していないが、それでも実用上十分な精度で妥当な結果が得られるであろうことは、直観的にはわかる。ところで、この妥当性について何か資料がおありなら、ご教示願いたい。

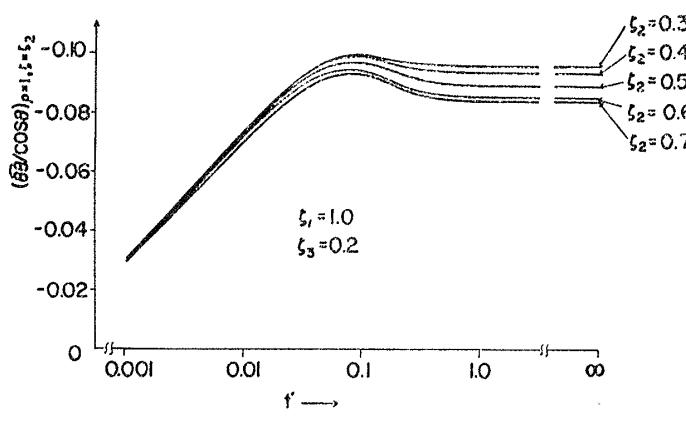
(3) 本論文の次の問題になるかも知れないが、境界からの受熱量が $\bar{f}(\theta, z)$ ではなく、より一般的に、 $\bar{f}(\theta, z, t)$ の場合も本論文とほぼ同様にして取扱うことができるか。

(4) 結論(2)は受熱条件および円柱長さによって変わらないか。

[回答] (1) 非軸対称問題であるので、熱弾性変位ポテンシャル ϕ と Michell の関数 M だけで解析することはできない。ご指摘のとおり熱弾性変位ポテンシャル ϕ と Boussinesq の関数(3個)で解析することは可能であり、この方法によると解法に統一性があるかもしれないが、著者は軸対称問題を熱弾性変位ポテンシャルと Love の関数で解析(付1)、その拡張としての非軸対称問



付図 1



付図 2

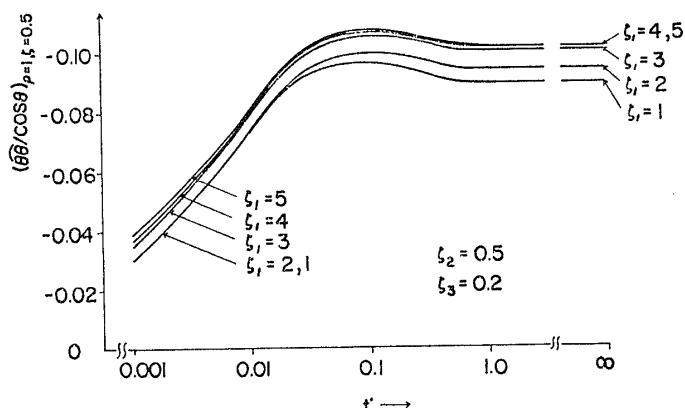
(付1) 野田・ほか2名、機論、43-365(昭52-1), 38.

題であるので、本解析法を用いた。

(2) 慣性項を考慮した動的問題として取扱うのが正確だと考えるが、三次元動的熱応力問題の実際的な解析例は見あたらないようである。一般的に熱応力問題は温度の時間的变化が緩やかであり、そのため準静的問題として処理するのが大多数であり、実際的にはこの取扱いで十分と考えられている。

(3) 同様に処理できると考えられる。

(4) 図2に示す受熱条件に対し、 $\zeta_1=1.0$, $\zeta_2=0.5$ とし、受熱幅を変化させた場合の受熱中心位置（ほぼ最大応力が生じる位置）でのフープ応力を付図1に、 $\zeta_1=1.0$, $\zeta_3=0.2$ とし、受熱中心位置を変化させた場合の受熱中心位置でのフープ応力を付図2に、 $\zeta_2=0.5$, $\zeta_3=0.2$ とし、円柱の長さを変化させた場合の受熱中心位置でのフープ



付図 3

応力を付図3に示す。以上の付図1~3より、付図1~3に示した受熱条件、円柱の長さに対しても、結論(2)はほぼ成立すると考えられる。図2以外の受熱条件であると結論(2)は変わると考えられる。