

## 円形き裂を有する横等方性無限体の非定常熱応力\*

芦田 文博\*\*, 野田 直剛\*\*\*

The Transient Thermal Stress in a Transversely Isotropic  
Infinite Solid Containing a Penny-Shaped Crack

by Fumihiko ASHIDA and Naotake NODA

The present paper is concerned with the transient thermal stress in a transversely isotropic infinite solid containing a penny-shaped crack with heat exchange on the crack surface. This problem is analyzed by means of the finite differences method with respect to only time variables and by the transversely isotropic potential functions method with respect to stress. The numerical calculations of the stress intensity factor were carried out for a graphite which belongs under transverse isotropy. The effects of the various anisotropies of the material properties on the stress intensity factor are shown in figures.

**Key Words:** Elasticity, Thermal Stress, Transverse Isotropy, Penny-Shaped Crack, Transient State

## 1. 緒 言

近年の技術革新に伴い、異方性体の一種である横等方性体に属する工業材料が数多く開発され、そして実用化されてきた。高温状態で使用されるこれらの横等方性材料に含まれているき裂の問題は、破壊強度との関連からきわめて重要である。したがって、き裂を有する横等方性体の熱応力問題に関する研究は Maiti<sup>(1)</sup>あるいは Murata<sup>(2)</sup>による円柱、Ram<sup>(3)</sup>あるいは Tsai<sup>(4)(5)</sup>による無限体など、いくつか見受けられる。しかし、これらの報告はいずれも定常熱応力問題であり、非定常熱応力問題に関する研究はラプラス逆変換の困難さのためか、報告例は見当たらないようである。

そこで本報は、円形き裂を有する横等方性無限体の非定常熱応力問題の理論解析を行った。解析に際して、温度の厳密解を得ることは困難であると思われたので、時間に対して階差法を導入し、空間変数に対して解析解を得た。また応力解析には、横等方性体に関するポテンシャル関数法を用いた。

\* 昭和61年6月27日 北陸信越支部北陸地方(金沢)講演会において講演、原稿受付 昭和60年8月26日。

\*\* 正員、津山工業高等専門学校(〒708 津山市沼624-1)。

\*\*\* 正員、静岡大学工学部(〒432 浜松市城北3)。

## 2. 解 析

2・1 熱伝導方程式の階差表示 直交座標系において、次のような横等方性体の熱伝導問題を考える。

$$\Delta_1 T = T_x / \kappa_1 \dots\dots\dots (1)$$

初期条件と境界条件は

$$t=0 \text{ で } T = \Psi(\bar{P}) \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{境界上で } T_x = -h_n(T - T_0) + Q_0 / \lambda_n \dots\dots (3)$$

ここで、 $\Delta_1 = [\lambda_1(\partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2) + \lambda_3\partial^2/\partial x_3^2]/\lambda_1$  で、 $\lambda_i$  および  $\lambda_n$  は熱伝導率、 $T$  は温度、 $t$  は時間、 $\kappa_i = \lambda_i/c_p\rho$  で、 $c_p$  は比熱、 $\rho$  は密度、 $h_i = \bar{\alpha}/\lambda_i$  で、 $\bar{\alpha}$  は熱伝達率、 $T_x = \partial T/\partial x$  であり、 $\bar{P}$  は領域内の任意の点を表す。また、 $T_0$  と  $Q_0$  は境界上における位置と時間の関数である。

さて、時間に対する階差法を導入する。任意の時間  $t_j$  を次式のように表す。

$$t_j = \sum_{k=1}^j \Delta t_k, \Delta t_k = t_k - t_{k-1} \dots\dots\dots (4)$$

ただし、時間のきざみ  $\Delta t_k$  の大きさはすべて異なるものと仮定する。式(1)を階差表示すると

$$\Delta_1 T_j - T_j / \kappa_1 \Delta t_j = -T_{j-1} / \kappa_1 \Delta t_j \dots\dots\dots (5)$$

となる。また、 $T_j$  を補助解  $T_c$  と特解  $T_p$  の和として表示すると、

$$T_j = T_{jp} + \sum_{k=1}^j \omega_{jk} T_{kc} \dots\dots\dots (6)$$

となる。ここで、 $\omega_{jk}$  は

$$\omega_{jk} = (1 - \delta_{jk}) \prod_{l=k+1}^j \frac{\Delta t_k}{\Delta t_k - \Delta t_l} + \delta_{jk} \dots\dots\dots (7)$$

である。ただし、 $\delta_{jk}$  はクロネッカのデルタである。  
 $t = t_1$  の場合、式(6)を式(5)と(3)に代入すると、

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 T_{1c} - T_{1c} / \kappa_1 \Delta t_1 &= 0 \\ \Delta_1 T_{1p} - T_{1p} / \kappa_1 \Delta t_1 &= -\Psi(\bar{P}) / \kappa_1 \Delta t_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

$$\begin{aligned} \text{境界上で } T_{1c,n} + h_n T_{1c} \\ = -(T_{1p,n} + h_n T_{1p}) + h_n T_{b1} + Q_{b1} / \lambda_n \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

を得る。 $t = t_2$  の場合も同様にして、

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 T_{2c} - T_{2c} / \kappa_1 \Delta t_2 &= 0 \\ \Delta_1 T_{2p} - T_{2p} / \kappa_1 \Delta t_2 &= -T_{1p} / \kappa_1 \Delta t_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

$$\begin{aligned} \text{境界上で } T_{2c,n} + h_n T_{2c} &= -\omega_{21} (T_{1c,n} + h_n T_{1c}) \\ &- (T_{2p,n} + h_n T_{2p}) + h_n T_{b2} + Q_{b2} / \lambda_n \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

を得る。式(9)を式(11)に代入すると、

$$[T_{2c,n} + h_n T_{2c}]_{x_i = x_{ib}} = \omega_{22} A_2 - \omega_{21} A_1 \dots\dots\dots (12)$$

となる。ただし、 $x_i = x_{ib}$  は境界上の点を示し、 $A_j$  は

$$A_j = [-(T_{jp,n} + h_n T_{jp}) + h_n T_{bj} + Q_{bj} / \lambda_n]_{x_i = x_{ib}} \dots\dots\dots (13)$$

である。同様の手順を繰返すと、 $t = t_j$  の場合は

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 T_{jc} - T_{jc} / \kappa_1 \Delta t_j &= 0 \\ \Delta_1 T_{jp} - T_{jp} / \kappa_1 \Delta t_j &= -T_{(j-1)p} / \kappa_1 \Delta t_j \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

$$[T_{jc,n} + h_n T_{jc}]_{x_i = x_{ib}} = D_j \dots\dots\dots (15)$$

によって表される。ただし、 $D_j$  は、

$$D_j = -(1 - \delta_{j1}) \sum_{k=1}^{j-1} \omega_{jk} D_k + A_j \dots\dots\dots (16)$$

である。

2.2 円形き裂を有する横等方性無限体の温度場

図1に示すような極座標系において、半径  $a$  のき裂を有する横等方性無限体のき裂面の媒質温度が  $-T_0 \times f(r)g(t)$  で与えられる問題を考える。この場合の熱伝導基礎方程式は、

$$\Delta_2 T + \lambda^2 T_{,zz} = T_{,t} / \kappa_r \dots\dots\dots (17)$$

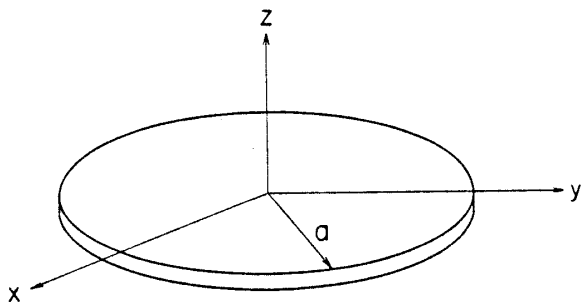


図1 円形き裂を有する横等方性無限体

によって表される。ここで、 $\Delta_2 = \partial^2 / \partial r^2 + r^{-1} \partial / \partial r$ ,  $\lambda^2 = \lambda_z / \lambda_r$ ,  $T_0$  は一定な温度である。

初期条件と境界条件は、次式によって表される。

$$t=0 \text{ で } T=0 \dots\dots\dots (18)$$

$$\begin{aligned} z=0 \text{ で } T_{,z} &= h_z \{ T - [-T_0 f(r)g(t)] \\ &\times H(a-r) \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

ここで、 $H(\ )$  はヘビサイドの単位関数である。

式(17)~(19)に式(14)と式(15)を用いて、階差表示すると、次式のようなになる。

$$\Delta_2 T_{jc} + \lambda^2 T_{jc,zz} - T_{jc} / \kappa_r \Delta t_j = 0 \dots\dots\dots (20)$$

$$\left. \begin{aligned} [T_{jc,z} - h_z T_{jc}]_{z=0} &= D_j f(r), \quad (r < a) \\ [T_{jc,z}]_{z=0} &= 0, \quad (a < r) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

この場合、式(13)の  $A_j$  は

$$A_j = h_z T_0 g(t_j)$$

となる。

式(20)の解は、次式のように表される。

$$T_{jc} = \int_0^\infty p F_j J_0(pr) \exp\left(-\frac{s_j z}{\lambda}\right) dp \dots\dots\dots (22)$$

ここで、 $F_j$  は未定係数であり、 $s_j$  は

$$s_j = \sqrt{p^2 + 1 / \kappa_r \Delta t_j} \dots\dots\dots (23)$$

である。式(22)を式(21)に代入すると、

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty p F_j (s_j + \lambda h_z) J_0(pr) dp &= -\lambda D_j f(r), \quad (r < a) \\ \int_0^\infty p F_j s_j J_0(pr) dp &= 0, \quad (a < r) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

を得る。この連立積分方程式を解くために、第2式を恒等的に満足するように  $F_j$  を

$$F_j = \frac{1}{p s_j} \sum_{n=0}^\infty F_{jn} Z_n \dots\dots\dots (25)$$

とおく。ただし、

$$Z_n = J_{2n+3/2}(pa) / \sqrt{p} \dots\dots\dots (26)$$

であり、 $J_n(\ )$  は第1種ベッセル関数である。式(25)を式(24)の第1式に代入すると、次式を得る。

$$\sum_{n=0}^\infty F_{jn} \int_0^\infty \left\{ 1 + \frac{\lambda h_z}{s_j} \right\} Z_n J_0(pr) dp = -\lambda D_j f(r) \dots\dots\dots (27)$$

ここで、 $r$  と次の関係にある新しい変数  $\bar{\phi}$  を導入する。

$$r = a \sqrt{(1 - \cos \bar{\phi}) / 2} \dots\dots\dots (28)$$

$J_0(pr)$  と  $f(r)$  の変数を変換して、ノイマンの加法定理とフーリエ級数を用いて、それぞれ展開すると、

$$\left. \begin{aligned} J_0(pr) &= J_0\left(\frac{pa}{2}\right) + 2 \sum_{m=1}^\infty J_m^2\left(\frac{pa}{2}\right) \cos(m\bar{\phi}) \\ f(r) &= f_0 + 2 \sum_{m=1}^\infty f_m \cos(m\bar{\phi}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

となる。ここで  $f_m$  は

$$f_m = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f[a\sqrt{(1-\cos\phi)/2}] \cos(m\phi) d\phi$$

$$(m=0, 1, 2, \dots)$$

である。式(29)を式(27)に代入し、すべての  $\cos(m\phi)$  について成立するとすれば、

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{jn} \int_0^\infty \left(1 + \frac{\lambda h_z}{s_j}\right) Z_n J_m^2\left(\frac{p a}{2}\right) dp = -\lambda D_j f_m$$

$$(m=0, 1, 2, \dots) \dots\dots\dots (30)$$

を得る。上式により、 $F_{jn}$  を決定することができる。

定常状態の場合の温度は

$$T_\infty = \int_0^\infty p F_\infty J_0(p r) \exp\left(-\frac{p z}{\lambda}\right) dp \dots\dots\dots (31)$$

によって表される。ここで、 $F_\infty$  は式(25)において  $s_j = p$ 、また  $F_{\infty n}$  は式(30)において  $D_j = g(\infty)$  とすればよい。

2.3 円形き裂を有する横等方性無限体の応力場

横等方性体の応力-ひずみ関係式は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= C_{11}\epsilon_{rr} + C_{12}\epsilon_{\theta\theta} + C_{13}\epsilon_{zz} - \beta_1 T \\ \sigma_{\theta\theta} &= C_{12}\epsilon_{rr} + C_{11}\epsilon_{\theta\theta} + C_{13}\epsilon_{zz} - \beta_1 T \\ \sigma_{zz} &= C_{13}\epsilon_{rr} + C_{13}\epsilon_{\theta\theta} + C_{33}\epsilon_{zz} - \beta_3 T \\ \sigma_{rz} &= C_{44}\epsilon_{rz} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

によって表される。ここで、 $\sigma_{ij}$  は応力、 $\epsilon_{ij}$  はひずみ、 $C_{ij}$  と  $\beta_i$  は材料定数である。

いま、変位  $u_i$  と次のような関係にある変位ポテンシャル関数  $\phi_1, \phi_2, Q, \chi^{(6)}$  を導入する。

$$\left. \begin{aligned} u_r &= (\phi_1 + \phi_2 + Q)_{,r} \\ u_z &= (k_1\phi_1 + k_2\phi_2 + \chi)_{,z} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

上式をつり合い方程式に代入すると、変位ポテンシャル関数の満足すべき基礎式

$$\left. \begin{aligned} C_{11}\Delta_2 Q + C_{44}Q_{,zz} + (C_{13} + C_{44})\chi_{,zz} &= \beta_1 T \\ (C_{13} + C_{44})\Delta_2 Q + C_{44}\Delta_2 \chi + C_{33}\chi_{,zz} &= \beta_3 T \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (34)$$

$$\Delta_2 \phi_i + \mu_i \phi_{i,zz} = 0, (i=1, 2) \dots\dots\dots (35)$$

を得る。ここで、 $\mu_1$  と  $\mu_2$  は

$$C_{11}C_{44}\mu^2 + (C_{13}^2 + 2C_{13}C_{44} - C_{11}C_{33})\mu + C_{33}C_{44} = 0$$

を満足する2根である。また、 $k_i$  は

$$k_i = (C_{11}\mu_i - C_{44}) / (C_{13} + C_{44}), (i=1, 2)$$

である。

式(33)をひずみ-変位関係式に代入した後、さらに式(32)に代入すると、応力は変位ポテンシャル関数によって

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= C_{11}(\phi_1 + \phi_2 + Q)_{,rr} + C_{12}r^{-1}(\phi_1 + \phi_2 + Q)_{,r} \\ &\quad + C_{13}(k_1\phi_1 + k_2\phi_2 + \chi)_{,zz} - \beta_1 T \\ \sigma_{\theta\theta} &= C_{12}(\phi_1 + \phi_2 + Q)_{,rr} + C_{11}r^{-1}(\phi_1 + \phi_2 + Q)_{,r} \\ &\quad + C_{13}(k_1\phi_1 + k_2\phi_2 + \chi)_{,zz} - \beta_1 T \\ \sigma_{zz} &= C_{13}(\phi_1 + \phi_2 + Q)_{,rr} + C_{13}r^{-1}(\phi_1 + \phi_2 + Q)_{,r} \\ &\quad + C_{33}(k_1\phi_1 + k_2\phi_2 + \chi)_{,zz} - \beta_3 T \\ \sigma_{rz} &= C_{44}[(1+k_1)\phi_1 + (1+k_2)\phi_2 + Q + \chi]_{,rz} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36)$$

のように表される。

変位ポテンシャル関数  $Q$  と  $\chi$  を次のようにおく。

$$\left. \begin{aligned} Q &= \sum_{k=1}^j \omega_{jk} \sum_{n=0}^{\infty} F_{kn} \int_0^\infty G_k Z_n \frac{J_0(p r)}{p^2 s_k} \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{s_k z}{\lambda}\right) dp \\ \chi &= \sum_{k=1}^j \omega_{jk} \sum_{n=0}^{\infty} F_{kn} \int_0^\infty H_k Z_n \frac{J_0(p r)}{p^2 s_k} \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{s_k z}{\lambda}\right) dp \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (37)$$

$G_k$  と  $H_k$  は上式を式(34)に代入すると、

$$\left. \begin{aligned} G_k &= [\beta_1(C_{33}s_k^2 - C_{44}p^2\lambda^2) \\ &\quad - \beta_3(C_{13} + C_{44})s_k^2] \overline{GH} \\ H_k &= [\beta_1(C_{13} + C_{44})p^2\lambda^2 \\ &\quad - \beta_3(C_{11}p^2\lambda^2 - C_{44}s_k^2)] \overline{GH} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38)$$

と決定される。ただし、

$$\overline{GH} = p^2\lambda^2 / [-(C_{11}p^2\lambda^2 - C_{44}s_k^2)(C_{33}s_k^2 - C_{44}p^2\lambda^2) + (C_{13} + C_{44})^2 p^2\lambda^2 s_k^2]$$

である。また、式(35)の一般解として、

$$\phi_i = \int_0^\infty P_{ij} \frac{J_0(p r)}{p^2} \exp\left(-\frac{p z}{\sqrt{\mu_i}}\right) dp, (i=1, 2) \dots\dots\dots (39)$$

を採用する。ここで  $P_{1j}$  と  $P_{2j}$  は、力学的境界条件から決定される未定係数である。

式(37)と(39)を式(33)と(36)に代入すると、任意時間  $t=t_j$  における変位と応力は次式によって表される。

$$u_{rj} = -\int_0^\infty \frac{J_1(p r)}{p} \left[ \sum_{i=1}^2 P_{ij} \exp\left(-\frac{p z}{\sqrt{\mu_i}}\right) + \sum_{k=1}^j \omega_{jk} \sum_{n=0}^{\infty} F_{kn} G_k \frac{Z_n}{s_k} \exp\left(-\frac{s_k z}{\lambda}\right) \right] dp \dots\dots\dots (40)$$

$$u_{zj} = -\int_0^\infty \frac{J_0(p r)}{p} \left[ \sum_{i=1}^2 P_{ij} \frac{k_i}{\sqrt{\mu_i}} \exp\left(-\frac{p z}{\sqrt{\mu_i}}\right) + \sum_{k=1}^j \omega_{jk} \sum_{n=0}^{\infty} F_{kn} H_k \frac{Z_n}{p\lambda} \exp\left(-\frac{s_k z}{\lambda}\right) \right] dp \dots\dots\dots (41)$$

$$\sigma_{rrj} = -\int_0^\infty \left\{ \sum_{i=1}^2 P_{ij} \left[ (C_{11} - C_{13}) \frac{k_i}{\mu_i} \right] J_0(p r) - (C_{11} - C_{12}) \frac{J_1(p r)}{p r} \right\} \exp\left(-\frac{p z}{\sqrt{\mu_i}}\right)$$

$$+ \sum_{k=1}^j \omega_{jk} \sum_{n=0}^{\infty} F_{kn} \left[ (G_k C_{11} - H_k C_{13} \frac{S_k^2}{p^2 \lambda^2} + \beta_1) J_0(pr) - G_k (C_{11} - C_{12}) \frac{J_1(pr)}{pr} \right] \frac{Z_n}{S_k} \exp\left(-\frac{S_k z}{\lambda}\right) dp \quad (42)$$

$$\sigma_{\theta\theta j} = - \int_0^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^2 P_{ij} \left[ (C_{12} - C_{13} \frac{k_i}{\mu_i}) J_0(pr) + (C_{11} - C_{12}) \frac{J_1(pr)}{pr} \right] \exp\left(-\frac{pz}{\sqrt{\mu_i}}\right) + \sum_{k=1}^j \omega_{jk} \sum_{n=0}^{\infty} F_{kn} \left[ G_k C_{12} - H_k C_{13} \frac{S_k^2}{p^2 \lambda^2} + \beta_1 \right] J_0(pr) + G_k (C_{11} - C_{12}) \frac{J_1(pr)}{pr} \right\} \frac{Z_n}{S_k} \exp\left(-\frac{S_k z}{\lambda}\right) dp \quad (43)$$

$$\sigma_{zz j} = - \int_0^{\infty} J_0(pr) \left\{ \sum_{i=1}^2 P_{ij} (C_{13} - C_{33} \frac{k_i}{\mu_i}) \exp\left(-\frac{pz}{\sqrt{\mu_i}}\right) + \sum_{k=1}^j \omega_{jk} \sum_{n=0}^{\infty} F_{kn} \left( G_k C_{13} - H_k C_{33} \frac{S_k^2}{p^2 \lambda^2} + \beta_3 \right) \frac{Z_n}{S_k} \exp\left(-\frac{S_k z}{\lambda}\right) \right\} dp \quad (44)$$

$$\sigma_{rz j} = C_{44} \int_0^{\infty} J_1(pr) \left\{ \sum_{i=1}^2 P_{ij} \frac{1+k_i}{\sqrt{\mu_i}} \exp\left(-\frac{pz}{\sqrt{\mu_i}}\right) + \sum_{k=1}^j \omega_{jk} \sum_{n=0}^{\infty} F_{kn} (G_k + H_k) \frac{Z_n}{p\lambda} \exp\left(-\frac{S_k z}{\lambda}\right) \right\} dp \quad (45)$$

変位と応力の境界条件は

$$z=0 \text{ で } \sigma_{rz}=0 \quad (46)$$

$$z=0 \text{ で } \sigma_{zz}=0 \quad (r < a), \quad u_z=0 \quad (a < r) \quad (47)$$

によって表される。式(45)を式(46)に代入すると、

$$P_{2j} = - \frac{\sqrt{\mu_2}}{1+k_2} \left[ \frac{1+k_1}{\sqrt{\mu_1}} P_{1j} - \sum_{k=1}^j \omega_{jk} \sum_{n=0}^{\infty} F_{kn} (G_k + H_k) \frac{Z_n}{p\lambda} \right] \quad (48)$$

を得る。式(41)と式(44)を式(47)に代入すると、

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} p^2 R_j J_0(pr) dp &= \int_0^{\infty} L_j(p) J_0(pr) dp, & (r < a) \\ \int_0^{\infty} p R_j J_0(pr) dp &= 0, & (a < r) \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

を得る。ここで、

$$R_j = \frac{(C_{13} - C_{33} k_1 / \mu_1) \sqrt{\mu_1} (1+k_2) - (C_{13} - C_{33} k_2 / \mu_2) \sqrt{\mu_2} (1+k_1)}{p^2 (1+k_2) (k_1 - k_2)} \times \left[ \frac{k_1 - k_2}{\sqrt{\mu_1}} P_{1j} - \sum_{k=1}^j \omega_{jk} \sum_{n=0}^{\infty} F_{kn} (G_k k_2 - H_k) \frac{Z_n}{p\lambda} \right] \quad (50)$$

$$L_j(p) = - \sum_{k=1}^j \omega_{jk} \sum_{n=0}^{\infty} F_{kn} q_{kn}(S_k, p) \quad (51)$$

である。ただし、

$$q_{kn}(S_k, p) = \left[ G_k \left\{ C_{13} + \frac{S_k}{(k_1 - k_2) p \lambda} \left[ k_2 \sqrt{\mu_1} (C_{13} - C_{33} \frac{k_1}{\mu_1}) - k_1 \sqrt{\mu_2} (C_{13} - C_{33} \frac{k_2}{\mu_2}) \right] \right\} - H_k \left\{ \frac{C_{33} S_k^2}{p^2 \lambda^2} + \frac{S_k}{(k_1 - k_2) p \lambda} \left[ \sqrt{\mu_1} (C_{13} - C_{33} \frac{k_1}{\mu_1}) - \sqrt{\mu_2} (C_{13} - C_{33} \frac{k_2}{\mu_2}) \right] \right\} + \beta_3 \right] \frac{Z_n}{S_k} \quad (52)$$

である。式(49)の連立積分方程式の解は、

$$R_j = \frac{2}{\pi p} \int_0^a \sin(p\eta) \int_0^{\eta} \frac{\delta}{\sqrt{\eta^2 - \delta^2}} \int_0^{\infty} L_j(\xi) J_0(\delta\xi) d\xi d\delta d\eta \quad (53)$$

によって与えられる。したがって、上式と式(50)から未定係数  $P_{1j}$  が決定される。

モード I の応力拡大係数  $K_I$  は

$$K_I = \lim_{r \rightarrow a} \sqrt{2\pi(r-a)} (\sigma_{zz})_{z=0} \quad (54)$$

によって定義される。上式に式(44)、(48)、(50)および(53)を代入すると、任意時間における応力拡大係数は、

$$K_{Ij} = \frac{2}{\sqrt{\pi a}} \int_0^{\infty} \frac{1}{p} L_j(p) \sin(pa) dp \quad (55)$$

となる。

定常状態の場合の応力拡大係数  $K_{I\infty}$  は、式(51)で

$$L_{\infty}(p) = - \sum_{n=0}^{\infty} F_{kn} q_{\infty n}(p, p)$$

とおけばよい。

### 3. 数値計算

数値計算を実行するうえで便宜上、き裂半径  $a$  を代表長さにとり、次のような無次元量を導入した。

$$\rho = \frac{r}{a}, \quad \zeta = \frac{z}{a}, \quad t' = \frac{\kappa r t}{a^2}, \quad \bar{T} = \frac{T}{T_0},$$

$$\bar{u}_z = \frac{u_z}{a \alpha_r T_0}, \quad \bar{K}_I = \frac{K_I}{\sqrt{a} \alpha_r E_r T_0}, \quad E = \frac{E_z}{E_r},$$

$$G = \frac{G_{rz}}{E_r}, \quad \alpha = \frac{\alpha_z}{\alpha_r}, \quad B_i = a h_z$$

冷却温度の状態が, Case I: 一定な場合, Case II: 局所的な場合, Case III: 時間とともに小さくなる場合, Case IV: 局所的かつ時間とともに小さくなる場合について, 数値計算を実行した.

Case I:  $f(\rho)=1, g(t')=1$

Case II:  $f(\rho)=1-\rho^2, g(t')=1$

Case III:  $f(\rho)=1, g(t')=\exp(-t')$

Case IV:  $f(\rho)=1-\rho^2, g(t')=\exp(-t')$

数値計算には横等方性材料として, 黒鉛を用いた. その材料定数は,

$\lambda_r=1.172 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K}), \lambda_z=1.340 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K}),$

$E_r=10.4 \text{ GPa}, E_z=11.8 \text{ GPa}, G_{rz}=4.14 \text{ GPa},$

$\alpha_r=3.9 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}, \alpha_z=3.5 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1},$

$\nu_{r\theta}=\nu_{rz}=0.11$

である. また, 等方性体の材料定数に対しては,

$E=\alpha=\lambda^2=1.0, G=E/2(1+\nu_{rz}),$

$\nu_{r\theta}=\nu_{rz}=0.11$

とした. そして, ビオ数は  $B_i=0.1$  とした.

本報の目的である応力拡大係数を表す式(55)に含まれている無限級数および階差法の収束性を調査した結果を表1に示す. 表1より,  $n$ に関する無限級数および階差法の収束性は10項までで十分収束しており, また  $t'=10^8$  と  $t'=\infty$  の応力拡大係数が一致していることより, 本階差法は有効であると思われる.

図2~4には, Case I~IVの冷却状態について,  $\rho$

表1 応力拡大係数の収束性 ( $\sum_{n=0}^{\infty} \approx \sum_{n=0}^N$ ) ( $\times 10^{-2}$ )

N	t'	10 <sup>-2</sup>	10 <sup>0</sup>	10 <sup>2</sup>	10 <sup>4</sup>	10 <sup>6</sup>	10 <sup>8</sup>	∞
5		0.21	2.89	4.72	4.91	4.93	4.94	4.94
10		0.21	2.86	4.68	4.88	4.90	4.91	4.91
15		0.21	2.86	4.68	4.88	4.90	4.91	4.91

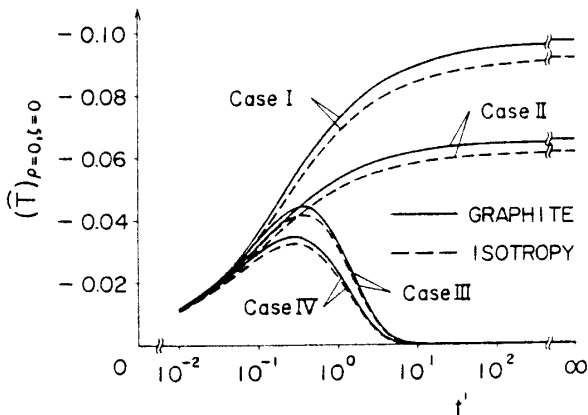


図2 黒鉛と等方性体の  $\rho=0, \zeta=0$  における温度

$=0, \zeta=0$  における温度と開口変位, および応力拡大係数を黒鉛の場合と等方性体の場合を比較して示した. 図2~4中の実線は黒鉛の値, 破線は等方性体の値をそれぞれ表している. 図2~4より, 黒鉛の温度, 開口変位および応力拡大係数は等方性体のそれより大きくなっている. これは黒鉛の熱伝導率が半径方向よりも軸方向のほうが大きいために熱が蓄えられやすく, したがって温度が高くなり, その結果開口変位と応力拡大係数も大きくなるものと考えられる.

図5~9は Case I の冷却状態において, 横等方性体の材料定数  $\lambda^2, E, G, \alpha$  および  $\nu_{r\theta}$  の中の一つのみが異方性を示し, 他の材料定数が等方性を示す場合に, その異方性が応力拡大係数に与える影響について調査したものである. 図5~9より, 個々の材料定数の異方性が応力拡大係数に与える影響は  $\lambda^2, E, G$  および  $\alpha$  の場合は大きい,  $\nu_{r\theta}$  の場合は小さいことがわかる.

4. 結 言

円形き裂を有する横等方性無限体の非定常熱応力問題の理論解析を行い, 特定の熱的および力学的境界条

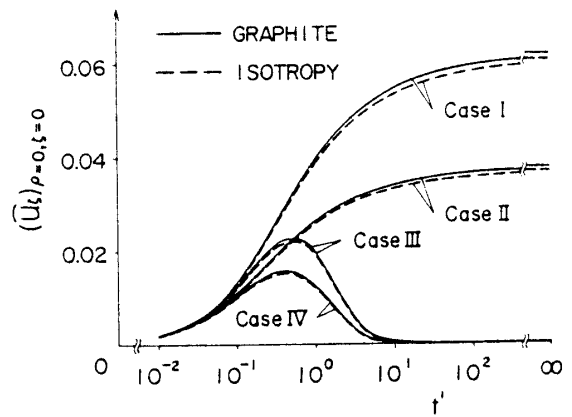


図3 黒鉛と等方性体の  $\rho=0, \zeta=0$  における開口変位

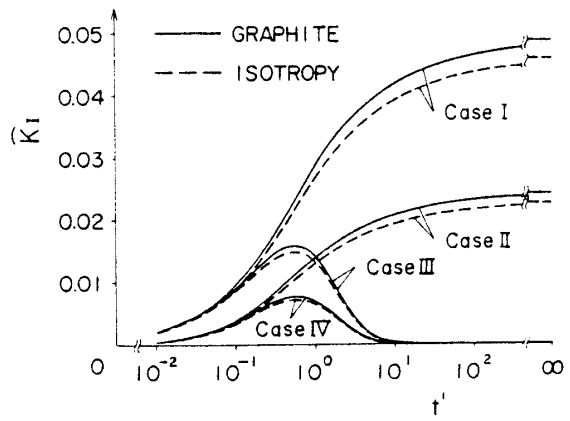


図4 黒鉛と等方性体の応力拡大係数

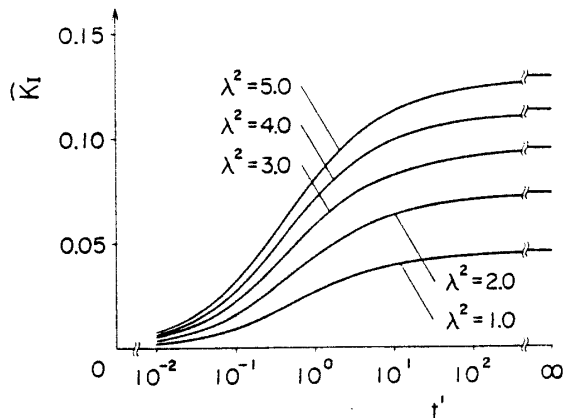


図 5 熱伝導率の異方性が応力拡大係数に与える影響

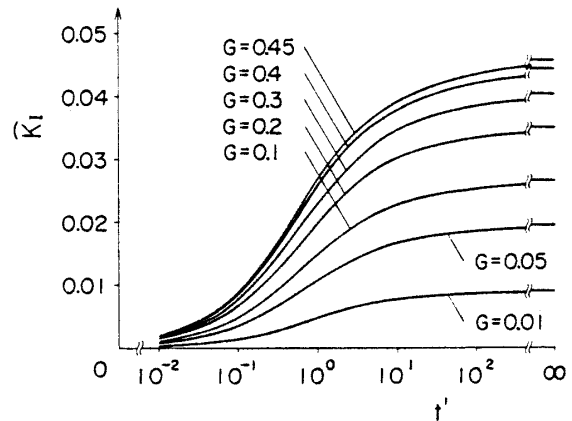


図 7 横弾性係数の異方性が応力拡大係数に与える影響

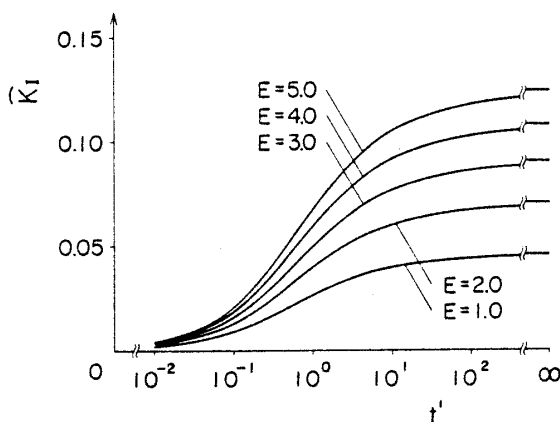


図 6 縦弾性係数の異方性が応力拡大係数に与える影響

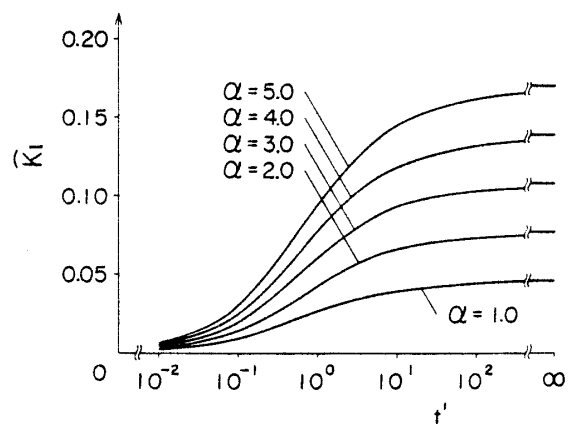


図 8 線膨張率の異方性が応力拡大係数に与える影響

件のもとに数値計算を実行したところ、以下のことが判明した。

(1) 時間依存の冷却を受ける円形き裂を有する横等方性無限体の非定常熱応力問題は、時間に対して階差法を用いることによって、空間変数に対して解析解を得ることができる。

(2) 黒鉛の温度、開口変位および応力拡大係数は等方性体のそれより大きい。

(3) 個々の材料定数の異方性が応力拡大係数に与える影響は、熱伝導率、縦弾性係数、横弾性係数および線膨張率の場合には大きく、 $r-\theta$ 面のポアソン比の場合には小さい。

最後に、この研究の遂行に当たり多大なる援助をいただいた津山工業高等専門学校教授 小橋義郎先生に深謝する次第である。また、数値計算には名古屋大学大型計算機センターと岡山大学総合情報処理センターを利用した。

文 献

(1) Maiti, S. N. and Misra, J. C., *Rev. Roum. Sci. Tech.*

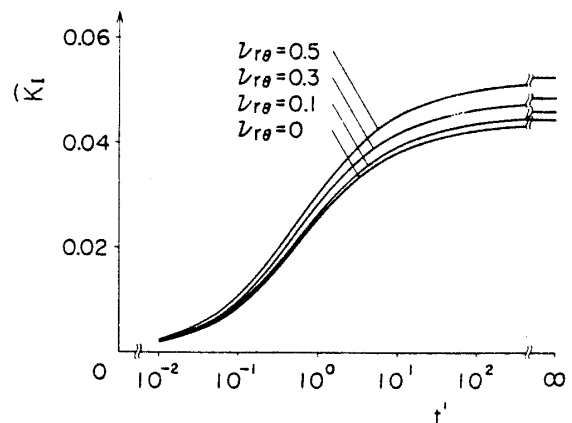


図 9  $r-\theta$ 面のポアソン比の異方性が応力拡大係数に与える影響

-*Mec. Appl.*, 21-3 (1976), 339.  
 (2) Murata, K. and Atsumi, A., *Lett. Appl. Eng. Sci.*, 5-3 (1977), 173.  
 (3) Ram, D. K., Parhi, H. K. and Paul, A. K., *Indian J. Tech.*, 18-11 (1980), 437.  
 (4) Tsai, Y. M., *J. Thermal Stresses*, 6-4 (1983), 379.  
 (5) Tsai, Y. M., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 50-1 (1983), 24.  
 (6) Takeuti, Y. and Noda, N., *J. Thermal Stresses*, 1-1 (1978), 25.

## 討 論

〔質問〕 五嶋孝仁〔富山大学工学部〕

(1)  $\sigma_{zz}$  の応力拡大係数  $K_I$  が示されているが、横等方性体の円形き裂の場合はモード I 以外の特異性は考えなくてもよいのか。また  $\sigma_{\theta\theta}$  および  $\sigma_{rz}$  に特異性は存在するか。

(2) 例えば Parton (付1) のように、ラプラス変換を用いた円形き裂の温度解析と比べ、本法の階差法による温度解析の利点はどのような点にあるのか。

〔回答〕 (1) 応力は軸および  $z=0$  面に対称であるため、モード I の特異性のみが生じる。 $\sigma_{rr}$  と  $\sigma_{\theta\theta}$  も  $\sigma_{zz}$  と同様に、 $z=0$ ,  $r \rightarrow a$  で  $1/\sqrt{r^2-a^2}$  の特異性

を示す。また  $\sigma_{rz}$  は  $z=0$  で零であるために特異性は示さない。

(2) Parton (付1) は、ラプラス逆変換が可能なように、積分方程式の解を近似することによって解析を行い、解を得ているようである。それに対して、本報の解析法は、時間変数のみに対して一般的な階差表示をするため、空間座標に対しては厳密解であり、かつ Parton の解析法に比べて解析が簡単であるものと思われる。

---

(付1) Parton, V. Z., *PMM.*, 36-1 (1972), 117.