中学との接続を重視した高等学校の幾何教育に関する研究（第2次）
－図形と方程式の指導に焦点を当てて－

A Study on Geometry Teaching at Senior High School which attach importance to connection of Junior High School (the second)
－ focus on Teaching of Geometry with Coordinates －

熊 倉 啓 之
Hiroyuki KUMAKURA

（平成 17 年 9 月 30 日受理）

1．はじめに

数学Ⅰの単元「図形と計量」では，三角比の応用として，三角形の 3 つの辺の長さ a，b，c と 1 つの内角 θ の間に成り立つ次の関係式，すなわち「余弦定理」について学習する。

$a^2=b^2+c^2-2ab\cos\theta$

この式で，$\theta=90^\circ$ とおくと，$\cos\theta=0$ から

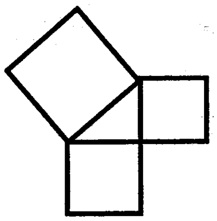
$a^2=b^2+c^2$

が得られる。この関係式は，中学 3 年で学習する「三平方の定理」である。このことから，余弦定理は，三平方の定理を拡張したものとみることができる。

この両者の内容について，中学と高校でそれぞれどのように指導してかを調べるために，現在使用している同じ出版社（東京書籍）の教科書を比較してみた。

まず，中学 3 年での「三平方の定理」については，次のような課題で導入している。

> 下の図※は，直角三角形の外側に各辺を 1 辺とする正方形をかいたものです。これらの 3 つの正方形の面積の間にはどんな関係があるか調べてみましょう。また，直角三角形の形を変えて同じことを調べてみましょう。
> ※図は，右に移動した。



このあと，3 つの正方形の面積の関係を予想した結果が記述され，次に三平方の定理とその証明が記述されている。その後に，余弦定理への橋渡しになるような記述はない。他の出版社の教科書も，指導の流れは概ね同じである。

一方，高等学校数学Ⅰの「余弦定理」については，いきなり次の記述から導入される。

> △ABC の 1 つの角と 3 辺の長さの間に次の余弦定理が成り立つ。

続いて，余弦定理とその証明が記述されている。その後に，三平方の定理との関係に触れた記述はない。他の出版社の教科書も，指導の流れは概ね同じであり，三平方の定理との関係について明確に記述してあったのは，1 社（実教出版）だけであった。

中学と高校の指導の接続という観点からみたとき，上記の教科書の比較から，次の点を指摘することができる。

ア．中学で学ぶ「三平方の定理」と，高校で学ぶ「余弦定理」の関係について，必ずしも十

分に指導されていないのではないか。

イ．中学では，定理の予想・発見→定理→証明→定理の利用という流れであるのに対して，高校では，定理→証明→定理の利用という流れになっていて，生徒は定理に関して確かな理解がなされているか疑わしい。

上の例のように，高校の指導，特に幾何の指導について，中学と高校の間で指導がうまく接続されていない部分が多いのではないか，このような疑問が，本研究を始める発端である。

2．研究のねらい

現行の高等学校における幾何教育について，その指導上の問題点を分析し，中学との接続部分を重視するという視点から，高等学校における望ましい幾何教育のあり方を追究することが，本研究のねらいである。

現行の学習指導要領に基づく高校の幾何に関する主な内容として，次のものがあげられる。

(1)　数学Ⅰ・図形と計量
(2)　数学A・平面幾何
(3)　数学Ⅱ・図形と方程式
(4)　数学B・ベクトル
(5)　数学C・いろいろな曲線

これまでに筆者は，(1)，(4)について研究を進めた。本稿では，(3)図形と方程式に焦点をあてるものとする。

3．図形と方程式の指導の変遷

高校での図形と方程式の指導の変遷は表1の通りである。

表1　図形と方程式の指導の変遷

指導年度	科目	必・選	タイトル	主な特徴
Ⅰ 1956(S31)～	数学Ⅱ	選択	図形とその方程式	2次曲線とその方程式も扱う一方で，不等式の表す領域は扱わない。
Ⅱ 1963(S38)～	数学Ⅰ	必修	平面図形と式	図形の問題が多い。
Ⅲ 1973(S48)～	数学Ⅰ	必修	平面図形と式	簡単な2次曲線も扱う。 図形の移動の扱いが丁寧。
Ⅳ 1982(S57)～	数学Ⅰ	必修	図形 イ．平面図形と式	ア．三角比とあわせて，図形として扱う。
Ⅴ 1994(H1)～	数学Ⅱ	選択	図形と方程式	Ⅳと比べて大きな変化はない。
Ⅵ 2003(H15)～	数学Ⅱ	選択	図形と方程式	Ⅳ，Ⅴと比べて大きな変化はない。

各段階における指導内容の主な特徴は，次の通りである。

Ｉの段階では，現行の数学Ｃで扱っている２次曲線について，あわせて扱っている。一方で，不等式の表す領域については扱っていないのが特徴である。

図形とその方程式に関連して，学習指導要領の中心概念の１つに，「解析的方法と図形的方法との関連」をあげている。

IIの段階では，必修科目として位置づけられた。２次曲線に関する内容は，数学IIBに移行し，新たに不等式の領域が加わったのが特徴である。

平面図形と式に関連して，学習指導要領の「指導計画作成および指導上の留意事項」に，「平面図形については，初等幾何学的な扱いを加えて指導してもよい」と記述されている。

関連する内容としては，同じ数Ｉで「空間図形　イ空間座標」があり，球の方程式を扱っている。

IIIの段階では，新たに，簡単な２次曲線として，楕円と xy＝k で表される直角双曲線に関する内容が加わった。また，図形の移動について，現行に比べて丁寧に扱っているのが特徴である。

関連する内容として，同じ数Ｉで「ベクトル」があり，その中でも図形の性質について扱っている。

IVの段階では，図形という項目の中に，三角比と並べて位置づけられた。２次曲線の内容は，代数・幾何に移行した。また，図形の移動に関する扱いも軽減された。

Ｖの段階では，選択科目の中に位置づけられることとなった。内容的には，IVの段階と比べて大きな変化はない。

VIの段階では，内容的にIV，Ｖの段階と比べて大きな変化はない。

なお，高校で扱う図形と方程式の学習の準備として，現行では，中学２年の１次関数の学習の中で，２元１次方程式と１次関数との関連に触れ，２元１次方程式のグラフが直線になることを学習している。この内容は，Ｉの段階では扱わなかったが，IIの段階では中３で，III以降の段階では，中２で扱っている。

４．図形と方程式を学ぶ意義

高校生が図形と方程式を学ぶ意義は何であろうか。これについて，筆者は次のように考える（熊倉，2005b）。

> いくつかある図形探究の方法の中で，これまで学んだ初等幾何とは異なり，座標平面上で代数的に処理する方法として，図形と方程式を学ぶ。

現行の学習指導要領には，図形と方程式に関して次の記述がある（文部科学省，1999）。

「座標や式を用いて直線や円などの基本的な平面図形の性質や関係を数学的に考察し処理するとともに，その有用性を認識し，いろいろな図形の考察に活用できるようにする。」

過去の学習指導要領の記述もほぼ同様である。上述の「いろいろな図形の考察に活用」することを生徒に多く経験させることを通して，学ぶ意義を実感させることが重要といえるであろう。

図形と方程式の学習内容は，解析幾何の一部である。この解析幾何は，17 世紀にデカルトとフェルマが発見したといわれている（グレイゼル，1997 他）。遠山（1965）は，このデカルトの言葉として，「(解析幾何という方法により）分析的解法および代数学のあらゆる長所を借りて，一方の欠点はすべて他方によって補正しようと考えた」を紹介し，このような着想によって創り出されたすばらしい方法が解析幾何であるとしている。また，栗田（1981）は，解析幾何の特徴を，「(解析幾何による方法は）旅行するのに航空機を利用するのと似ている。飛行の間は，ひたすら計器に頼ればよいわけで，雲上飛行でもよく，今どの辺を飛んでいるかということを下界を見て確かめる必要はないのである」としている。

このように，解析幾何は，幾何の問題を座標平面上で考えて代数的に処理することができることに，そのよさがあるといえる。このことを図に表すと，図 1 の通りである。

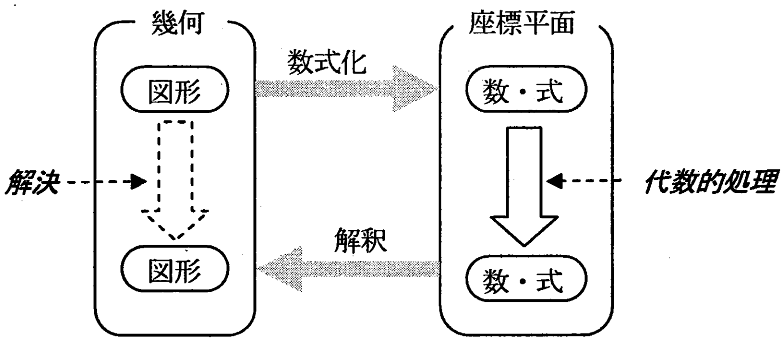
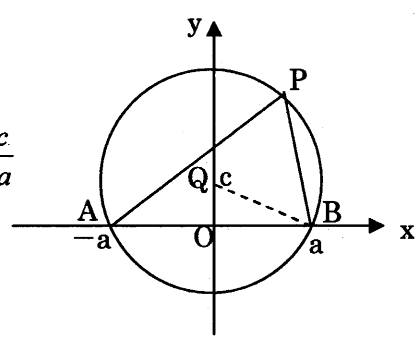


図 1　解析幾何のよさ

しかし，解析幾何が初等幾何よりも一方的に優れている，というわけではない。実際，解析幾何による方法よりも初等幾何による方法の方が優れていると考えられる問題は，少なくない。

たとえば，「円周角の定理」の証明は，座標を用いて解析幾何で解決しようとすると，次のようにかなり面倒である。

＜円周角の定理の証明＞



円の中心 Q(0, c)，半径 r とし，A(−a, 0)，B(0, a)，P(rcos θ，rsin θ +c)とおくと，$c^2+a^2=r^2$　…　①

AP の傾き $m_1=\dfrac{r\sin\theta+c}{r\cos\theta+a}$，BP の傾き $m_2=\dfrac{r\sin\theta+c}{r\cos\theta-a}$

よって，$\tan\angle APB=\dfrac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}$

$$=\frac{\dfrac{r\sin\theta+c}{r\cos\theta-a}-\dfrac{r\sin\theta+c}{r\cos\theta+a}}{1+\dfrac{(r\sin\theta+c)^2}{(r\cos\theta+a)(r\cos\theta-a)}}=\frac{2a(r\sin\theta+c)}{r^2\cos^2\theta-a^2+(r\sin\theta+c)^2}$$

$$=\frac{2a(r\sin\theta+c)}{r^2-a^2+c^2+2cr\sin\theta}=\frac{2a(r\sin\theta+c)}{2c^2+2cr\sin\theta}=\frac{a}{c}=\frac{OB}{OQ}=\tan\angle BQO\ (\because ①)$$

ゆえに，$\angle APB=\dfrac{1}{2}\angle AQB$(＝一定) ◢

一般に，直交座標を用いる場合，角に関連する性質を数式化するのは面倒になることが多い。一方で，初等幾何は，適切な補助線が引ければ簡単に結論を導くことができるが，補助線が引けないと先へ進まなくなってしまう。このような，それぞれの解法の特徴をよく理解することによって，図形と方程式を学ぶ意義はより実感できるはずである。

5．図形と方程式に関する指導内容の分析

図形と方程式の指導については，これまでに先行研究がほとんどない。日本数学教育学会の発行する学会誌（数学教育，数学教育学論究）には，図形と方程式に焦点を当てた先行研究は見当たらなかった。

そこで，現在使用されている教科書も含めて，過去の日本の教科書や海外の教科書等について，それらの指導内容を調査・分析した。

(1)　現在の教科書から

教科書は，数Ⅱの教科書を出しているすべての会社のうち，内容の程度の一番高いと考えられる1冊ずつを選択した。調査・分析した教科書は，次の9冊である。

啓林館(H15検定)，第一学習社(H15検定)，学校図書(H15検定)，旺文社(H15検定)，実教出版(H15検定)，東京書籍(H15検定)，数研出版(H15検定)，桐原出版(H15検定)，知研出版(H15検定)

これらの教科書について，教科書の本文，例(題)，問，章末問題等に掲載されている次のような図形に関する問題や記述をリストアップした。

A　図形の性質を導く問題（証明問題）

B　軌跡に関する問題

Aについてはさらに，指導内容との関連から，方程式を利用しないもの，直線の方程式を利用するもの，円の方程式を利用するものに分類した。また，中学で半数以上の教科書が扱うものには〔中学〕を，高校の数学A・平面図形で複数の教科書が扱うものには，〔数A〕をマークした。結果は表2の通りである。なお，図形についている記号は，教科書の記号と必ずしも一致しない。また，軌跡の問題では，A，B，Cは定点である。

表2　図形に関する問題・記述

A 図形の性質を 導く問題 (証明問題)	＜方程式を利用しないもの＞ ・三角形の3本の中線が1点で交わる（重心の存在）〔数A〕 ・三角形の各辺の中点を結んでできる三角形の重心は，元の三角形の重心と一致する（中点→m:nの内分点） ・長方形ABCDと1点Pに対して，$PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$が成り立つ ・中線定理 ・四角形の対辺の中点を結ぶ2本の線分は，互いに他を2等分する ＜直線の方程式を利用するもの＞ ・三角形の各頂点から対辺への3本の垂線は1点で交わる（垂心の存在）〔数A〕 ・三角形の各辺の垂直2等分線は1点で交わる（外心の存在）〔数A〕 ＜円の方程式を利用するもの＞ ・直径ABの円周上の点CからABへの垂線CDに対して，$CD^2=AD\cdot DB$が成り立つ

B 軌跡に関する 問題	・AP＝BP である P の軌跡〔中学〕 ・AP：BP＝一定である P の軌跡（アポロニウスの円） ・AP^2-BP^2＝一定である P の軌跡 ・AP^2+BP^2＝一定である P の軌跡 ・Q が円周上にあるときの AQ の中点（内分点）P の軌跡 ・Q が放物線上にあるときの AQ の中点（内分点）P の軌跡 ・Q が直線上にあるときの AQ の中点（内分点）P の軌跡 ・Q が円周上にあるときの△ABQ の重心 P の軌跡 ・$OP^2=AP^2+BP^2$ を満たす P の軌跡 ・$AP^2+BP^2=2CP^2$ を満たす P の軌跡 ・直線外の 1 点 A を通り，直線に接する円の中心 P の軌跡 ・A から直線への垂線を AH とするときの AP＝AH となる P の軌跡

教科書によって，扱っている問題にばらつきはあるが，ほとんどの教科書が扱っていた問題としては，次のものをあげることができる。

・中線定理の証明
・三角形の各頂点から対辺への 3 本の垂線は，1 点で交わることの証明
・Q が円周上にあるときの AQ の中点（内分点）P の軌跡
・AP：BP＝一定である点 P の軌跡

一方で，円の方程式を利用する次の問題を扱っているのは，1 社だけであった。

・直径 AB の円周上の点 C から AB への垂線 CD に対して，$CD^2=AD\cdot DB$ である証明

(2)　過去の教科書から

3．で述べた指導の変遷におけるⅠ～Ⅴの各段階において，使用された教科書を可能な範囲で調査し，それぞれの段階での指導の特徴を分析した。分析した教科書は，表 3 の通りである。

表 3　分析した教科書

段階	分析した教科書
Ⅰ 1956(S31)～	昇龍堂出版(S31 発行)，好学社(S31 発行)，数研出版(S32 発行)
Ⅱ 1963(S38)～	啓林館(S37 検定)，清水書院(S37 検定)，実教出版(S37 検定)，三省堂出版(S37 検定)，学研(S37 検定)，日本文教出版(S37 検定)，昇龍堂出版(S37 検定)，修文館出版(S38 検定)，東京書籍(S41 検定)，旺文社(S41 検定)，数研出版(S41 検定)，帝国書院(S41 検定)，好学社(S41 検定)，大日本図書(S37 検定)，中央図書(S42 検定)
Ⅲ 1973(S48)～	学校図書(S47 検定)，帝国書院(S47 検定)，東京書籍(S47 検定)，大阪教育図書(S47 検定)，旺文社(S47 検定)，池田書店(S50 検定)，三省堂(S51 検定)，清水書院(S53 検定)，学研(S53 検定)，数研出版(S53 検定)，実教出版(S53 検定)，教育出版(S53 検定)，秀文出版(S53 検定)，啓林館(S53 検定)，大日本図書(S53 検定)

Ⅳ 1982(S57)～	学研(H2 検定)，啓林館(H2 検定)，大日本図書(H2 検定)， 第一学習社(H2 検定)，帝国書院(H2 検定)，学校図書(H2 検定)， 旺文社(H2 検定)，教育出版(H2 検定)，東京書籍(H2 検定)， 数研出版(H2 検定)
Ⅴ 1994(H1)～	啓林館(H6 検定)，第一学習社(H6 検定)，学校図書(H6 検定)， 旺文社(H6 検定)，実教出版(H6 検定)，東京書籍(H6 検定)， 数研出版(H6 検定)

教科書の分析の観点としては，現行の教科書の場合と同様に，扱っている図形に関する問題の種類やその扱い方等に着目した。調査・分析した結果は次の通りである。

Ⅰの段階について

現行と同じように，中線定理の証明などを扱っている一方で，次のように，中学で学習する内容の証明問題を扱っていたことは，注目に値する。

Ⅰア．長方形の対角線は等しいことを証明せよ。(好学社)

Ⅰイ．平行四辺形の対角線は，互いに他を2等分することを証明せよ。(好学社)

Ⅰウ．△ABCの2辺AB，ACの中点をM，Nとすると，$MN=\frac{1}{2}BC$であることを証明せよ。<中点連結定理>（好学社)

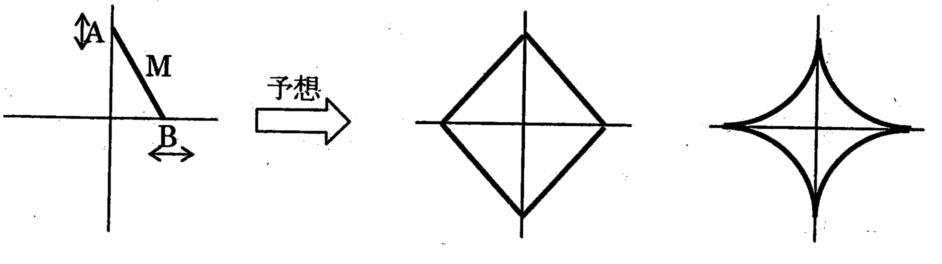
Ⅰエ．台形ABCDにおいて，平行でない2辺AB，CDの中点をそれぞれM，Nとするとき，次の等式が成立することを証明せよ。$MN=\frac{1}{2}(AD+BC)$（好学社)

Ⅰオ．▱ABCDにおいて，$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2$であることを証明せよ。（日本文教出版)

また，軌跡に関する問題では，次のような面白い問題も扱っていた。

Ⅰカ．定長の線分ABが，直交する二定直線上に両端を置きながら動くとき，線分ABの中点Mの軌跡を求めよ。(数研出版)

この問題を，生徒に予想させると，図のように，直線図形，あるいは凹みのある曲線図形と判断する場合は少なくない。



他にも，数学Aで学習する次のような問題を扱っている。

Ⅰキ．2定点A，Bに対して，AP⊥BPである点Pの軌跡を求めよ。

（修文館出版，学研ほか)

Ⅱの段階について

全般的に，この段階で扱っている図形の問題は，他の段階に比べて多い。すでに紹介した問題以外で，たとえば，中学校で学習する内容について，次のような問題が扱われている。

Ⅱア．▱ABCD において，AC＝BD ならば長方形であることを証明せよ。（東京書籍）

Ⅱイ．四角形 ABCD の辺 AB，BC，CD，DA の中点をそれぞれ E，F，G，H とするとき，四角形 EFGH が平行四辺形であることを証明せよ。＜誘導あり＞（東京書籍）

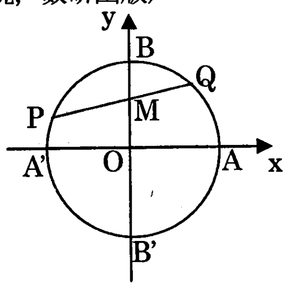
Ⅱウ．4 点(0，0)，(a_1, a_2)，(a_1+b_1, a_2+b_2)，(b_1, b_2)を頂点とする四角形は平行四辺形であることを証明せよ。（清水書院）

また，数学 A で学習する内容として，次のような問題も扱っている。

Ⅱエ．直角二等辺三角形の斜辺の中点から，3 頂点への距離は等しいことを証明せよ。
（帝国書院，日本文教出版）

Ⅱオ．三角形の 2 辺の和はほかの 1 辺より大きいことを，座標を用いて証明せよ。
（中央図書）

Ⅱカ．定点 M を通る任意の直線が定円 O と交わる点を P，Q とすれば，MP･MQ はつねに一定であることを証明せよ。＜方べキの定理＞（帝国書院，数研出版）



Ⅱカについては，さらに研究として，次のような初等幾何による別解を扱っていたのは，注目すべき点である。

Ⅱカ'．円周角の定理を用いて，△MBP∽△MB'Q であることを証明し，これから MP･MQ＝MB･MB'（一定）であることを導いてみよ。（帝国書院）

軌跡に関する問題では，次のようなものを扱っている。

Ⅱキ．x 軸，y 軸への垂線の長さの和が一定である点 P の軌跡を求めよ。
（修文館出版，旺文社ほか）

さらには，解析幾何による方法を行う上で重要な指摘の 1 つである「座標軸の設定の仕方」について，次のような扱いがあったことも，特筆すべき点である。

Ⅱク．例で，△ABC についての中線定理の証明を，A(b，c)，B(−a，0)，C(a，0)として証明した後に，問で，$A(x_1, x_2)$，$B(x_2, y_2)$，$C(x_3, y_3)$として証明させる。さらに，その後「注意」として，次のように記述している。

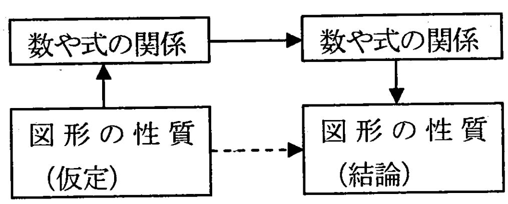
「例と問からわかるように，座標軸をどのようにとっても図形の性質を調べることができる。なるべく計算が簡単になるように座標軸をとるとよい。」（日本文教出版）

Ⅲの段階について

Ⅱの段階に比べると，2 次曲線や移動に関する内容が多くなった分，図形に関する問題は少ない。したがって，特に取り上げる問題はないが，解析幾何の特徴について，本文の中で，次のような記述があったことは注目すべき点である。Ⅲイについては，Ⅳの段階でも扱っていた。

Ⅲア．「デカルトは，フランスの哲学者，数学者，自然科学者で，近世哲学の祖といわれる。（中略）彼はその著「方法序説」の中で，自然科学の研究の方法を述べ，その応用としての「幾何学」の中で，座標の考えをもとに幾何の問題を代数的に解き，また，式の関係を図形的に解釈するいわゆる「解析幾何学」の方法を示した。」（池田書店）

Ⅲイ．「座標を用いて図形を研究するのを解析幾何といい，これに対して図の点線のように，直接的な方法で図形を研究するのを，初等幾何という。中学で学んだのは初等幾何である」（啓林館）



現在のいくつかの教科書にも同様の記述があるが，それらはすべて，章扉（あるいはそれと同等）のページに記載してある。

Ⅳ～Ⅴの段階について

Ⅲの段階に比べて，2次曲線の内容が別の科目に移行し，移動に関する内容が軽減されたこともあり，図形に関する問題は若干増加している。Ⅳ，Ⅴの2つの段階では，扱っている図形の問題はほぼ同じである。その中でも，初等幾何，ベクトルと関連の深い次のような問題が扱われている。

Ⅳア．△ABCの重心，外心，垂心をO，G，Hとするとき，O，G，Hは一直線上にあり，OG : GH＝1 : 2であることを証明せよ。（学校図書）

(3)　**海外の教科書から**

次の4冊の教科書について調査・分析した。

A. GEOMETRY WITH COORDINATE PART II　SMSG STUDENT'S TEXT48

B. Mathematics For Elementry Teachers SIXTH EDITION

C. SMP INTERACT for GCSE MATHEMATICS Higher

D. MATEMATICS A TEXTBOOK FOR CLASS X

Aは，アメリカの現代化の頃(1962年)に，SMSGによって作られた教科書である。

Bは，アメリカの小学校教師を目指す大学生向けの数学教科書である。

Cは，イギリスの一般教育証明書（GCE）のための試験細目に即した教科書である。

Dは，インドの第10学年（15歳）用の教科書である。

A　GEOMETRY　WITH　COORDINATE　PART II　から

図形に関する問題として，たとえば次のようなものを扱っている。

Aア．△ABCで，辺AC，BCの中点をD，Eとするとき，DE∥AB，DE＝$\frac{1}{2}$ABを証明せよ。（中点連結定理）

ここでは，△ABCにおいて，

Aイ．▱ABCDで，A(0，0)，B(a，0)，D(b，c)のとき，C(a+b，c)であることを証明せよ。

Aウ．▱ABCDで，2本の対角線は互いに中点で交わることを証明せよ。

Aエ．▱ABCDで，対角線が直交するならば，ひし形になることを証明せよ。

Aオ．台形ABCDで，対角線の長さが等しいならば，等脚台形であることを証明せよ。

Aカ．正方形ABCDの辺BC，CDの中点をR，Sとし，ARとBSの交点をTとするとき，次のことを証明せよ。

(a)　BS＝AR　　(b)　BS⊥AR　　(c)　TD＝AB

上記の問題のいずれも，日本の教育課程においては，中学で学習する内容である。

Aアについては，2通りの座標軸の設定の仕方で証明している。

1)　A(0，0)，B(b，0)，C(c，d)

2)　A(x_A，y_A)，B(x_B，y_B)，C(x_C，y_C)

そして，1)の座標軸の設定の仕方は一般性があることについて補足説明している。

他にも，図形に関する問題として，次のようなものを扱っている。

Aキ．△ABCにおいて，辺ABの中点をMとするとき，$AC^2+BC^2=\frac{AB^2}{2}+2MC^2$を証明

せよ。(中線定理)

Aク．△ABCの3辺の垂直2等分線の交点は1点で交わることを証明せよ。

Aケ．△ABCの各頂点からの3本の垂線は1点で交わることを証明せよ。

Aコ．△ABCにおいて，CからABへの垂線をCRとするとき，次の等式を証明せよ。

$$BC^2=AC^2+AB^2-2AB\cdot AR$$

Aクについては，初等幾何による証明を示した上で，問で解析幾何による方法で証明させている。また，Aケについては，初等幾何による証明と解析幾何による証明の2つを示している。Aコは，余弦定理と本質的に同じである。

さらに，解析幾何による証明のまとめとして，次のような記述がある。

「この章で，私達は平面上に座標を定義し，それを幾何の道具として活用した。私達は，座標を用いたいくつかの巧みな証明を見てきた。一方では，座標を用いないで証明したものもあった。座標による証明を構成する上では，普通，座標による表現ができるだけ簡単になるように，座標軸を設定するのがよい。(以下略)」

円の方程式については，単元を別にして扱っているが，座標を用いて図形の性質を導くような問題は扱っていない。

B　Mathematics For Elementry Teachers SIXTH EDITION　から

Geometry Using Coordinatesという章の中で，多くの図形に関する問題を扱っている。たとえば，次のような問題である。

Bア．三角形の2本の中線の長さが等しいとき，この三角形は二等辺三角形であることを証明せよ。

Bイ．三角形の3本の中線は1点で交わることを証明せよ。(重心の存在)

Bウ．三角形の各頂点からの3本の垂線は1点で交わることを証明せよ。(垂心の存在)

Bエ．三角形の各辺の垂直2等分線は1点で交わることを証明せよ。(外心の存在)

Bオ．長方形の対角線の長さが等しいことを証明せよ。

Bカ．平行四辺形の対角線は，互いに中点で交わることを証明せよ。

Bキ．直角三角形の斜辺の中点は，3頂点から等距離にあることを証明せよ。

Bク．ひし形の対角線は，直交することを証明せよ。

Bケ．四角形ABCDの対角線AC，BDの中点をM，Nとするとき，

$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=BD^2+AC^2+4(MN)^2$ を証明せよ。

高校生に対する指導内容については，手元に教科書がないので詳細は不明であるが，2001年に全米数学教師協議会(NCTM)が公表したPrinciplse and Standards for School Mathematicsによると，第9学年から12学年のためのスタンダードの幾何に関する中に，次のような記述がある。(筑波大学数学教育学研究室，2001)

「座標幾何や他の表現システムを使って，位置を特定し，空間的関係を記述する。」

そして，具体的な問題として，三角形の中線が1点で交わることの証明を例示した上で，「この種の証明は高校生には困難であり得るけれども，それと取り組むことは，生徒の幾何，代数の変数と一般性の理解の成長を刺激するかもしれない。」と述べている。

C　SMP　INTERACT　for　GCSE　MATHEMATICS　Higher　から

直線や円の方程式に関する記述はあるが，座標を用いた図形に関する問題は見つからなかった。長崎(2002)によると，一般教育証明書の試験の上級段階の内容のうち，解析幾何に関す

るものとして，次のものがあげられている。

＜x－y 座標での解析幾何＞

a. $y-y_1=m(x-x_1)$，$ax+by+c=0$ の形の直線の方程式。2直線が平行，垂直の条件。

b. 円の座標幾何。$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ の形の円の方程式。

c. 円のデカルト方程式と媒介変数方程式，これらの2つの形式の変換。

これらの項目を見ただけでは確かなことは不明であるが，座標を用いて図形の性質を導くような問題はあまり重視していないように考えられる。

一方，「Combining transformations」という単元で，図形の変換を座標平面上で行っていたのは，座標の図形への利用の1つといえる。

D MATEMATICS A TEXTBOOK FOR CLASS X から

教科書には，「Coordinate Geometry」という単元を設けてあるが，その中には，図形に関する問題は見つからなかった。最後に，内分点の式を利用すると，「三角形の各頂点が与えられたときに，三角形の重心の座標を求めることができる。」という記述があったに過ぎない。

6．図形と方程式の指導上の問題点

5．での調査・分析した結果から，現行の図形と方程式の指導上の問題点として，次の4点を挙げることができる。

(1) 図形と方程式を用いて図形の性質を導くような問題が少ない。

いずれの教科書も，図形に関する問題を比較的多く扱っているが，図形の性質を導くような問題（証明問題）は必ずしも多くはない。中でも，方程式を利用する問題は少なく，特に円の方程式を利用する問題は次の1問で，扱っていたのは1社だけであった。

「線分 AB を直径とする円上の点 C から AB へ下ろした垂線を CD とするとき，

$$CD^2=AD\cdot DB$$

であることを，座標を用いて証明せよ。」（啓林館）

全体を通して，ベクトルにおける図形の問題数よりも少ないといえる。

一方で，図形の問題でも，たとえば次のように，点の座標を求めたり，方程式を求めたりする問題は多い。

「（A，B，C の座標が与えられているとき）△ABC の重心の座標を求めよ。」

「（A，B の座標が与えられているとき）線分 AB の垂直2等分線の方程式を求めよ。」

しかし，これらの問題は，図形の性質を用いた代数的処理の問題といえる。座標を用いて，図形の問題を解決したことにはならない。すなわち，このような問題は，図形と方程式を学ぶ意義を実感できるとはいえないであろう。

(2) 初等幾何による方法との比較が明確に記述されてない。

初等幾何による方法と比較することを通して，図形と方程式による方法の特徴をより深く理解し，図形と方程式を学ぶ意義がより強く実感できるといえる。しかし，どの教科書にもそれに関する記述は見当たらなかった。

たとえば，垂心の存在証明について，ほとんどの教科書が扱っていたが，数学Aで扱っている初等幾何による方法との関連については，具体的に記述されていなかった。また，ここで始めて学習する中線定理についても，ほとんどの教科書で扱っていたが，座標を用いない証明には触れていなかった。さらに，中学で学んでいる図形の問題を扱っている教科書はなかった。

また，過去の教科書に見られたような，初等幾何と異なる解析幾何の特徴を示す説明文や記述もなかった。

これらの結果から，初等幾何による方法との関連については，教師の指導に任されていることになるが，実際に指導が十分になされているかどうか疑わしいといえる。

(3) 「関数のグラフ」と「方程式が表す図形」の違いを明確に記述していない。

いくつかの教科書では，1 次関数のグラフとの関連から，方程式が表す図形について説明してある。しかし，その説明はあっさりとしたもので，1 次関数のグラフと，1 次方程式が表す図形との違いは，明確に記述されていない。この場合生徒は，両者の違いを正しく理解しないまま，図形と方程式を，関数のグラフの延長線でとらえてしまう可能性がある。実際，中学での指導にも問題があり，両者を混同してしまうことが指摘されている（熊倉,2003)。両者を混同することは，図形と方程式を学ぶ意義を実感することにつながらないであろう。

(4) 軌跡の問題は，始めから座標が設定されている。

軌跡の問題については，解析幾何で扱う方が容易に考えやすい問題が多い。したがって，図形と方程式を学ぶ意義を実感させる指導が容易であるはずである。しかし，たとえば次のように，教科書の問題は，始めから座標が与えられている。

「2 定点 A(−6,0)，B(2,0)に対して，AP:BP＝3:1 であるような点 P の軌跡を求めよ。」（東京書籍）

これでは，自ら座標を設定することにより図形の問題が容易に解決できる，という解析幾何のよさが実感できないであろう。

7．図形と方程式の指導の改善点

これまで述べてきたことから，図形と方程式の指導の改善点について，次の 4 点を挙げることができる。

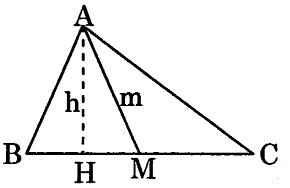
(1) 初等幾何による方法と比較することを通して，図形と方程式による方法の理解を深める。

同じ図形の問題を，初等幾何による方法でも扱い，図形と方程式による方法と比較することが重要であると考える。初等幾何による方法は思いつけば比較的容易に証明できるのに対して，図形と方程式による方法は，代数的に処理する点に特徴がある。計算は大変になることが多いが，ある程度形式的に処理できるといえる。

それぞれの特徴について触れることは，図形と方程式の理解を深めるだけではなく，初等幾何も含めて，幾何全般について理解を深めることになる。さらには，図形と方程式を学ぶ意義を実感させることができるであろう。

たとえば，現行のほとんどの教科書で扱っている中線定理について，次のように座標を用いない方法についても触れてよいであろう。

＜中線定理の座標を用いない証明＞



AH⊥BC とすると，

$AC^2=h^2+CH^2$ …1)

$AB^2=h^2+BH^2$ …2)

$m^2=h^2+HM^2$ …3)

1)〜3)と BM=CM より，$AB^2+AC^2=2h^2+BH^2+CH^2$

$=2h^2+(BM-HM)^2+(CM+HM)^2$

$$=2h^2+BM^2+CM^2+2HM^2$$
$$=2(h^2+HM^2)+2BM^2$$
$$=2(AM^2+BM^2)$$ ◢

他にも，現行のほとんどの教科書で扱っている「垂心の存在定理の証明」やその他の問題について，可能な範囲で，座標を用いない方法に触れるとよいであろう。

また，軌跡に関する問題は，一般的に座標を用いる方法が初等幾何よりも容易に解決できる問題が多い。そのことを理解させる意味でも，たとえば，アポロニウスの円の問題について，次のように初等幾何による方法に触れてもよいであろう。

＜初等幾何による解決＞

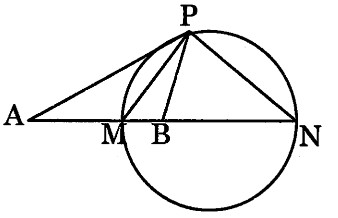
2 定点を A，B，動点を P とし，AB を PA : PB に内分，外分する点を M，N とすると，

PA : PB＝AM : MB＝AN : NB

よって，PM，PN は∠APB の内角，外角をそれぞれ 2 等分する。

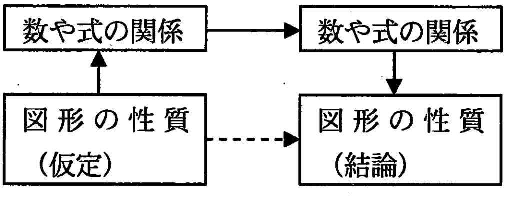
ゆえに，∠MPN＝90°

よって，P は MN を直径とする円周上を動く。◢



さらには，解析幾何の特徴について，過去の教科書にある次のような記述に基づく説明を行うことも重要である。

Ⅲウ．「座標を用いて図形を研究するのを解析幾何といい，これに対して図の点線のように，直接的な方法で図形を研究するのを，初等幾何という。中学で学んだのは初等幾何である」（啓林館）



(2) 初等幾何ですでに解決したことのある，あるいは解決できる図形の性質について，座標を用いて解決することを通して，図形と方程式を学ぶよさを実感させる。

1 つは，中学ですでに学習した内容をもう一度取り上げて，解析幾何による方法で解決することが重要である。例えば次のような問題がよいであろう。（「現行」は，現在の教科書で扱っている問題である。）

Ⅰイ．平行四辺形の対角線は，互いに他を 2 等分することを証明せよ。

A カ．正方形 ABCD の辺 BC，CD の中点を R，S とし，AR と BS の交点を T とするとき，次のことを証明せよ。(a)　BS＝AR　(b)　BS⊥AR　(c)　TD＝AB

B ア．三角形の 2 本の中線の長さが等しいとき，この三角形は二等辺三角形であることを証明せよ。

現行．線分 AB を直径とする円上の点 C から AB へ下ろした垂線を CD とするとき，$CD^2=AD\cdot DB$ であることを，座標を用いて証明せよ。

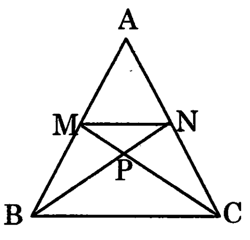
B アは，初等幾何で証明しようとすると，次のように結構面倒である。

＜初等幾何による証明＞

△ABC の辺 AB，AC の中点を M，N，BN と CM の交点を P とすると，仮定から BN＝CM　…　①

中点連結定理から，MN // BC，MN : BC＝1 : 2

よって，△PMN∽△PCB となり，PM : PC＝PN : PB



これと①より，PB＝PC，PM＝PN

よって，∠PBC＝∠PCB … ②，∠PMN=∠PNM … ③

△BMNと△CNMにおいて，MN＝NM（共通）と①，③から，

△BMN≡△CNM よって，∠MBN＝∠NCM … ④

③，④から，∠ABC＝∠ACB より，AB＝AC ◢

また，数学Aで学習する次のような問題も扱うとよいであろう。

Ⅱエ．直角二等辺三角形の斜辺の中点から，3頂点への距離は等しいことを証明せよ。

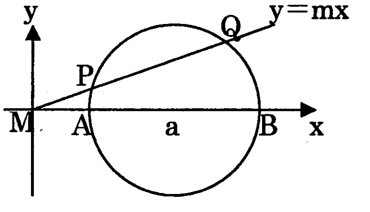
Ⅱカ．定点Mを通る任意の直線が定円Oと交わる点をP，Qとすれば，MP･MQはつねに一定であることを証明せよ。

Ⅱカの問題の座標を用いた証明は，たとえば次のようにする。

<解析幾何による証明>

円の方程式を，$(x-a)^2+y^2=r^2$ とし，Mを原点とする。

さらに$A(a-r,\ 0)$，$B(a+r,\ 0)$，$P(x_1,\ mx_1)$，$Q(x_2,\ mx_2)$とすると，



$(x-a)^2+(mx)^2=r^2$ ，

すなわち，$(m^2+1)x^2-2ax+a^2-r^2=0$

の解がx_1，x_2である。

$$MP^2\times MQ^2=\{x_1{}^2+(mx_1)^2\}\{x_2{}^2+(mx_2)^2\}$$

$$=(1+m^2)^2x_1{}^2x_2{}^2=(1+m^2)^2\times\left(\frac{a^2-r^2}{1+m^2}\right)^2$$

$$=(a-r)^2(a+r)^2=MA^2\cdot MB^2\ (一定)$$

よって，MP･MQは一定 ◢

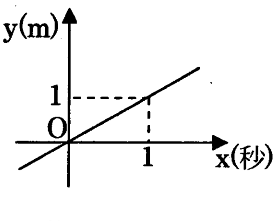
(3) 「関数のグラフ」と「方程式が表す図形」の違いを丁寧に説明する。

「関数のグラフ」と「方程式が表す図形」の違いについて，たとえば，次のような対応表を作成して，理解を深めることが重要であろう。

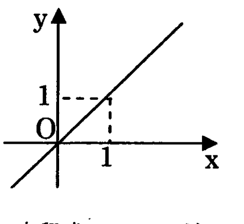
表4 関数のグラフと方程式の表す図形

	関数	方程式
式	$y=f(x)$	$f(x,\ y)=0$
座標	関数の対応するx，y	方程式の解x，y
グラフ	関数のグラフ	方程式が表す図形

このとき，関数の場合は，グラフをかく場合にx軸とy軸の1目盛りの大きさを必ずしも同じにする必要はないが，方程式が表す図形をかく場合は，1目盛りを同じにする必要があることなどにも触れるとよい。関数の場合は，x軸，y軸に異なる種類の量(例えば，時間と距離)をとるので，1目盛りを同じにする意味はないからである。



<関数y=xのグラフ>



<方程式x−y=0が表す直線>

(4)　軌跡に関する問題は，最初から座標を与えない形で提示する。

６．で指摘したように，現行の教科書の軌跡に関する問題は，すべて最初から座標が設定されている。たとえば，次のように座標を与えない形で問題を提示するのがよいであろう。

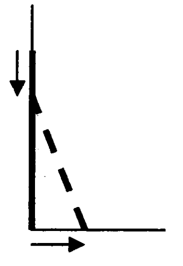
「2定点A，Bからの距離の比が3：1であるような点Pの軌跡を求めよ。」

他にも，現行の教科書にはないが，たとえば過去の教科書にあった次のような問題は，扱ってもよいであろう。

Ⅰカ．定長の線分ABが，直交する二定直線上に両端を置きながら動くとき，線分ABの中点Mの軌跡を求めよ。

Ⅰキ．2定点A，Bに対して，AP⊥BPである点Pの軌跡を求めよ。

Ⅰカは，前述したように予想と結果が異なりやすい興味深い問題である。たとえば，次のように現実場面の問題に変形することも可能である。



Ⅰカ’壁に立てかけた棒を，すべるように動かすとき，棒の中点の軌跡を求めよ。

Ⅰキは，円周角の定理の逆の特別な場合である。数学Aでの学習と関連させながら扱うとよいであろう。

８．今後の課題

今後の課題として，次の点が挙げられる。

(1)　本稿で述べた図形と方程式の指導の改善点に基づいた授業実践を，筆者は前任校で実践し，一定の評価を得ている。今後も，できればさらに他の学校で授業を実践し，その妥当性や指導の効果を評価したい。

(2)　本稿では，図形と方程式の指導に焦点を当てたが，他にも，数学Ⅰ・三角比（図形と計量）や数学A・平面図形，数学C・2次曲線などがある。これらについても，指導上の問題点と改善点を明らかにし，高校における幾何教育の改善を図りたい。

参考・引用文献

Frank B.Allen 他.1962.GEOMETRY WITH COORDINATES PART Ⅱ.SMSG STUDENT'S TEXT48.YALE UNIVERSITY PRESS

G.P.Dikshit 他.2005.MATHEMATICS Textbook for Class X.Saraswati Printing Press

Gary L.Musser 他.2003.Mathematics For Elementry Teachers.John Wiley & Sons,Inc

The School Mathematics Project.Interact for GCSE Mathematic Higher.2003. CAMBRIDGE. UNIVERSITY PRESS

グレイゼル．1997 数．学史Ⅲ．大竹出版

狭間節子．2000．算数・数学の目標と内容－図形・幾何．日本数学教育会誌数学教育 82 巻 7・8 号．

岩田至康編．1971．幾何学大辞典 1．槇書店．

熊倉啓之. 2004. 学ぶ意義を実感させるベクトルの指導に関する研究. 第37回数学教育論文発表会論文集.
熊倉啓之. 2005a. 中学との接続を重視した高等学校の幾何教育に関する研究－ベクトルの指導に焦点を当てて－. 静岡大学教育学部研究報告第36号.
熊倉啓之. 2005b. 学ぶ意義を実感させる図形と方程式の指導に関する研究. 第38回数学教育論文発表会論文集.
栗田稔. 1981. 教職数学シリーズ基礎編2－幾何－. 共立出版.
公庄庸三他. 2002. Geometry II. 東京書籍.
文部科学省. 1999. 高等学校学習指導要領解説－数学編－. 実教出版.
長崎栄三. 2002. 一般教育証明書(GCE)の数学の教科規準について.「算数･数学のカリキュラムの改善に関する研究－アメリカ，イギリス，ドイツ，フランスの全国的･全州的な教育課程－」研究成果報告書.
志賀浩二. 2002. 中高一貫数学コース－数学2をたのしむ. 岩波書店.
遠山啓. 1965. 教師のための数学入門－関数・図形編－. 国土社.
筑波大学数学教育学研究室. 2001. 新世紀をひらく学校数学－学校数学のための原則とスタンダード. 前田印刷.
矢野健太郎. 1966. 数学をきずいた人々. 講談社現代新書.
全米数学教師協議会. 1980. 幾何教育への新しいアプローチ. 教育出版.
平成16年度用高等学校教科書「数学II」. 東京書籍001，実教出版004，啓林館007，数研出版010，数研出版011，文英堂013，旺文社016. 第一学習社017，知研出版019，桐原書店020
昭和31年度用高等学校教科書「数学II」.昇龍堂出版
昭和32年度用高等学校教科書「数学II」.好学社，数研出版.
昭和37年検定済教科書「数学I」.啓林館，清水書院，実教出版，三省堂，学研，日本文教出版，昇龍堂出版
昭和38年検定済教科書「数学I」.修文館出版
昭和41年検定済教科書「数学I」.東京書籍，旺文社，数研出版，帝国書院，好学社
昭和41年検定済教科書「数学I」.大日本図書，中央図書
昭和47年検定済教科書「数学I」.旺文社，大阪教育図書，東京書籍，帝国書院，学校図書
昭和50年検定済教科書「数学I」.池田書店
昭和51年検定済教科書「数学I」.三省堂
昭和53年検定済教科書「数学I」.大日本図書，啓林館，秀文出版，実教出版，数研出版，学研，教育出版，清水書院
平成27年検定済教科書「数学II」.学研，啓林館，大日本図書，第一学習社，帝国書院，学校図書，旺文社，教育出版，東京書籍，数研出版
平成6年検定済教科書「数学II」.東京書籍，実教出版，啓林館，数研出版，旺文社，学校図書，第一学習社