

539.313 : 539.4.013

マイクロポーラ理論による流体圧をうける有孔板の応力集中問題*

竹内 洋一郎**, 野田 直剛***

1. 緒 言

流体圧をうける円孔をもつ正方形領域の応力集中問題に関しては古くから興味ある問題として、理論解析ならびに実験解析とも多くの報告がなされている。代表例として Durelli⁽¹⁾らは光弾性法、関谷⁽²⁾、川口⁽³⁾らは理論解析を行い、さらに Slot⁽⁴⁾は近年これらの結果を辺点法でさらに総合比較を行っている。これらの理論と実験の報告の間には、無限板の有孔板の応力集中問題の場合と同様に応力集中係数について少しの差異が認められている。これについて無限板の場合に対し Mindlin⁽⁵⁾は偶応力理論を適用して、その差異の説明を試みている。前回の報告で著者らは偶応力理論により流体圧をうける有孔板の応力集中問題の研究を発表したが⁽⁶⁾、Mindlin らの研究で分かっているように、古典理論による解析と、偶応力理論による解析との応力集中係数に関するギャップは実験値とすこし差がありすぎていることがいわれている。前報において渥美より討論として指摘されたように、応力集中問題に対しては、Mindlin の偶応力理論よりも、Eringen らの線形マイクロポーラ理論⁽⁷⁾の適用のほうがより適切であることがいわれている。しかし、偶応力理論においても、まだ測定が困難な一つの新材料定数(多くの文献で l を採用)が追加されるに対し、マイクロポーラ理論では、さらに新材料定数の採用が増加し、平面ひずみ問題においても、一般に採用されている記号で A , B の 2 種の測定の困難な新材料定数が現れてくる。この理由により実用問題に対する応用の見地から著者らはマイクロポーラ理論の採用をちゅうちょしてきた。それにもかかわらず近年マイクロポーラ理論による研究は、海外においてその数はおびただしい数に増加し、著者らの集録した論文数でも、その数、百を突破した。この原因の一つとして、割れ、切欠きなどの応力集中問題における変形の局所性の影響が、解析の厳密度への要求に対し、考慮されねばならなくなったことも考えられる。日本ではまだわずか

に松岡⁽⁸⁾、渥美⁽⁹⁾らの研究、皆川の解説⁽¹⁰⁾が見られるのみである。これらの海外のすう勢にかんがみ、著者らは、前回の偶応力論による解析を改良するため、線形マイクロポーラ理論を採用して、同一問題の解析を行い、上記の応力集中に関する実験値と理論値の差、および古典理論値と偶応力の影響の差はさらにきん少にうずめられることを示すとともに、古典理論の結果および Mindlin の偶応力理論の結果はいずれも特別な場合として誘導されることを示して、それらの対照をめぐりにした。解析の大要は、線形マイクロポーラ理論におけるいわゆるミッチェルの条件式を誘導し、応力関数の境界値問題に対し辺点法を適用して解析した。

2. 解 析

マイクロポーラ理論の特長は、通常の変位と、微小回転を独立して考慮することである。これらの理論の適用対象物体としては無限小の物質点まで連続体としての考察することが不適当なせんい状体、粒状体、多結晶体などがあげられている。いわゆるコッセラ理論による偶応力理論とマイクロポーラ理論の大きな差異は次の 2 点である。(i) 偶応力理論は微小要素の回転を変位によって定義するのに対し、マイクロポーラ理論では回転と変位を独立して定義する。(ii) Eringen のマイクロポーラ線形理論における線形法則は応力テンソル全体に対し適用されているのに対し、偶応力理論においては応力テンソルを対称テンソルと反対称テンソルとに分離し、反対称テンソルに対して線形法則は考慮されていない。Eringen による線形マイクロポーラ理論によれば基礎構成式はつぎのようになる。変位成分を u_i 、微小回転成分 ω_i とするとき、ひずみテンソル γ_{ij} 、曲率テンソル κ_{ij} は次式で表される。

$$\gamma_{ji} = u_{i,j} - \epsilon_{kji} \omega_k, \quad \kappa_{ij} = \omega_{i,j} \dots \dots \dots (1)$$

ただし、 i, j, k は 1, 2, 3 のいずれかをとり、このとき応力テンソル σ_{ij} 、偶応力テンソル μ_{ij} についての線形法則は次式で表される。

$$\sigma_{ji} = (\mu + \alpha) \gamma_{ji} + (\mu - \alpha) \gamma_{ij} + \lambda \gamma_{kk} \delta_{ji} \dots \dots (2)$$

$$\mu_{ji} = (\gamma + \epsilon) \kappa_{ji} + (\gamma - \epsilon) \kappa_{ij} + \beta \kappa_{kk} \delta_{ji} \dots \dots (3)$$

* 昭和 48 年 10 月 31 日 第 23 回応用力学連合講演会において講演、原稿受付 昭和 48 年 12 月 13 日。

** 正員、大阪府立大学工学部(堺市百舌鳥梅町 4-304)。

*** 正員、静岡大学工学部。

ただし, $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \lambda, \mu$ は材料定数である. また δ_{ij} はクロネッカーのデルタ, ε_{ijk} は Eddington の記号である.

さて, x_3 軸方向についての平面ひずみ問題を考えると上の各式はつぎのようになる.

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{11} &= u_{1,1}, & \gamma_{22} &= u_{2,2} \\ \gamma_{12} &= u_{2,1} - \omega_3, & \gamma_{21} &= u_{1,2} + \omega_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

$$\kappa_{13} = \omega_{3,1}, \quad \kappa_{23} = \omega_{3,2} \dots\dots\dots (5)$$

応力テンソル-ひずみテンソル, 偶応力テンソル-曲率テンソルの線形関係は次式のようになる.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= 2\mu\gamma_{11} + \lambda(\gamma_{11} + \gamma_{22}) \\ \sigma_{22} &= 2\mu\gamma_{22} + \lambda(\gamma_{11} + \gamma_{22}) \\ \sigma_{33} &= \lambda(\gamma_{11} + \gamma_{22}) \\ \sigma_{12} &= (\mu + \alpha)\gamma_{12} + (\mu - \alpha)\gamma_{21} \\ \sigma_{21} &= (\mu + \alpha)\gamma_{21} + (\mu - \alpha)\gamma_{12} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \mu_{13} &= (\gamma + \varepsilon)\kappa_{13}, & \mu_{23} &= (\gamma + \varepsilon)\kappa_{23} \\ \mu_{31} &= (\gamma - \varepsilon)\kappa_{13}, & \mu_{32} &= (\gamma - \varepsilon)\kappa_{23} \end{aligned} \right\} \dots\dots (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{13} &= \gamma_{23} = \gamma_{31} = \gamma_{32} = \gamma_{33} = 0 \\ \kappa_{11} &= \kappa_{22} = \kappa_{33} = \kappa_{12} = \kappa_{21} = \kappa_{31} = \kappa_{32} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (8)$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = \sigma_{32} = \mu_{11} = \mu_{22} = \mu_{33} = \mu_{12} = \mu_{21} = 0 \dots\dots\dots (9)$$

つりあい式を満足する応力関数として, ϕ, ψ を選ぶとき応力成分は次式で表される.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= \phi,_{22} - \psi,_{12}, & \sigma_{21} &= -\phi,_{21} + \psi,_{11} \\ \sigma_{12} &= -(\phi,_{12} + \psi,_{22}), & \sigma_{22} &= \phi,_{11} + \psi,_{21} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

$$\mu_{13} = \psi,_{,1}, \quad \mu_{23} = \psi,_{,2} \dots\dots\dots (11)$$

ϕ, ψ の満足すべき基礎微分方程式, および 共役関係式はつぎのようになる.

$$\Delta\Delta\phi = 0 \dots\dots\dots (12)$$

$$\Delta(\phi - A^2\Delta\phi) = 0 \dots\dots\dots (13)$$

$$\left. \begin{aligned} (\phi - A^2\Delta\phi),_{,1} &= -2B^2\{(1-\nu)\Delta\phi\},_{,2} \\ (\phi - A^2\Delta\phi),_{,2} &= 2B^2\{(1-\nu)\Delta\phi\},_{,1} \end{aligned} \right\} \dots\dots (14)$$

ただし, A, B は次式で定義される新材料定数である.

$$A^2 = (\gamma + \varepsilon)(\mu + \alpha)/4\mu\alpha, \quad B^2 = (\gamma + \varepsilon)/4\mu \dots\dots\dots (15)$$

ミッチェルの条件 (変位および回転が一面の物理的条件) は, 回転が変位と無関係なことより, Mindlin の偶応力論のときとちがって, つぎのように導出される. まず式 (4) を考慮することによって

$$\begin{aligned} d\omega_3 &= \omega_{3,1} dx_1 + \omega_{3,2} dx_2 \\ &= (\gamma_{21,1} - u_{1,21}) dx_1 + (u_{2,2} - \gamma_{12,2}) dx_2 \\ &= (\gamma_{21,1} - \gamma_{11,2}) dx_1 + (\gamma_{22} - \gamma_{12,2}) dx_2 \end{aligned} \dots\dots\dots (16)$$

式 (6) よりマイクロポーラ理論の平面ひずみ問題の場合, ひずみについて線形法則を書くと

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{11} &= \frac{1}{2\mu} \left\{ \sigma_{11} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \right\} \\ \gamma_{22} &= \frac{1}{2\mu} \left\{ \sigma_{22} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \right\} \\ \gamma_{12} &= \frac{1}{4\mu} (\sigma_{12} + \sigma_{21}) + \frac{1}{4\alpha} (\sigma_{12} - \sigma_{21}) \\ \gamma_{21} &= \frac{1}{4\mu} (\sigma_{21} + \sigma_{12}) + \frac{1}{4\alpha} (\sigma_{21} - \sigma_{12}) \end{aligned} \right\} \dots\dots (17)$$

式 (17), (10) を式 (16) に代入し, つぎの積分を考える.

$$\oint d\omega_3 = \frac{\mu + \alpha}{4\mu\alpha} \oint \{ (\Delta\phi),_{,1} dx_1 + (\Delta\phi),_{,2} dx_2 \} + \frac{\lambda + 2\mu}{4\mu(\lambda + \mu)} \oint \{ -(\Delta\phi),_{,2} dx_1 + (\Delta\phi),_{,1} dx_2 \}$$

次式の関係

$$\frac{\partial x_1}{\partial s} = -\frac{\partial x_2}{\partial n}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial s} = \frac{\partial x_1}{\partial n} \dots\dots\dots (18)$$

を考慮すれば上の積分はつぎのようになる.

$$\oint d\omega_3 = \frac{\mu + \alpha}{4\mu\alpha} \oint \frac{\partial}{\partial s} (\Delta\phi) ds + \frac{\lambda + 2\mu}{4\mu(\lambda + \mu)} \oint \frac{\partial}{\partial n} (\Delta\phi) ds$$

式 (15) を考慮すれば, 回転一面の条件式として次式が成立する.

$$\oint \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\Delta\phi}{2} \right) + \left(\frac{B}{A} \right)^2 \frac{\partial}{\partial n} \{ (1-\nu)\Delta\phi \} \right] ds = 0 \dots\dots\dots (19)$$

つぎに変位一面の条件を誘導すると

$$\begin{aligned} \oint du_1 &= \oint (u_{1,1} dx_1 + u_{1,2} dx_2) \\ &= \oint \{ d(x_1\gamma_{11}) + d(x_2\gamma_{21}) - d(x_2\omega_3) \\ &\quad - x_1 d\gamma_{11} - x_2 d\gamma_{21} + x_2 d\omega_3 \} \end{aligned}$$

ひずみが一面とすると最初の2項は0となり, また回転一面とすると第3項は0となるから,

$$\begin{aligned} \oint du_1 &= -\oint [(x_1\gamma_{11,1} + x_2\gamma_{11,2}) dx_1 \\ &\quad + (x_1\gamma_{11,2} + x_2(\gamma_{21,2} + \gamma_{12,2}) - x_2\gamma_{22,1}) dx_2] \end{aligned}$$

上式に式 (17) の関係を代入し, さらに式 (10), (18) を用いると,

$$\begin{aligned} \oint du_1 &= -\frac{\lambda + 2\mu}{4\mu(\lambda + \mu)} \oint \left(x_1 \frac{\partial}{\partial s} - x_2 \frac{\partial}{\partial n} \right) \Delta\phi ds \\ &\quad + \frac{1}{2\mu} [x_1(\phi,_{11} + \psi,_{12})] A^4 \\ &\quad + \frac{1}{2\mu} [x_2(\phi,_{12} + \psi,_{22})] A^4 \\ &\quad - \frac{1}{2\mu} \left[\oint \phi,_{11} dx_1 + \oint \phi,_{12} dx_2 \right] \\ &\quad - \frac{1}{2\mu} \left[\oint \phi,_{12} dx_1 + \oint \phi,_{22} dx_2 \right] \end{aligned}$$

ただし、Aは考える新しい穴を含む一周積分路上の1点である。上式右辺の第2項、第3項は応力を一価とすれば消失する。また第4項、第5項は

$$\oint d(\phi_{,1} + \phi_{,2}) = [\phi_{,1} + \phi_{,2}]_A = F_2$$

Fは x₂ 軸上の合力であり、穴周辺ごとに外力およびモーメントがそれぞれつりあっているとすれば F₂=0 となる、ゆえに u₁ の変位が一価であるためには

$$\oint (x_1 \frac{\partial}{\partial s} - x_2 \frac{\partial}{\partial n}) \Delta \phi ds = 0 \dots\dots\dots(20)$$

同様にして $\oint du_2 = 0$ の条件より

$$\oint (x_2 \frac{\partial}{\partial s} + x_1 \frac{\partial}{\partial n}) \Delta \phi ds = 0 \dots\dots\dots(21)$$

式 (20), (21) の形は古典弾性論のミッチェルの条件式と同一である。

さて、図1のように正方形領域に円孔のある場合を考える。円孔周辺には一様な流体圧をうけるものとする。いま、次記のように無次元化量をとって解析する。

$$\rho = \frac{r}{a}, \quad \rho_0 = \frac{b}{a}, \quad \bar{A} = \frac{A}{a}, \quad \bar{B} = \frac{B}{a} \dots\dots(22)$$

このとき、境界条件は、

$$\rho = 1 \text{ で } \sigma_{\rho\rho} = -p, \quad \sigma_{\theta\theta} = \mu_{\theta\theta} = 0 \dots\dots\dots(23)$$

$$\rho = \rho_0 \text{ で } \sigma_{11} = \sigma_{12} = \mu_{13} = 0 \dots\dots\dots(24)$$

応力関数 ϕ, ψ に関する極座標系の一般解より、式 (19)~(21) および $\theta=0, \pi/4$ における対称性を考慮し、本問題に適合する解の形を考慮すれば次記のようになる。

$$\phi = B_0 \rho^2 + C_0 \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} (A_{4n} \rho^{4n} + B_{4n} \rho^{-4n} + C_{4n} \rho^{4n+2} + D_{4n} \rho^{-4n+2}) \cos 4n\theta \dots\dots\dots(25)$$

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \{ E_{4n} \rho^{4n} + F_{4n} \rho^{-4n} + G_{4n} I_{4n}(\rho/\bar{A}) + H_{4n} K_{4n}(\rho/\bar{A}) \} \sin 4n\theta \dots\dots\dots(26)$$

ただし、I_n, K_n は変形ベッセル関数である。式(25), (26) を式 (14) の共役関係式に代入すれば、係数間

$$\begin{aligned} a^2 \sigma_{\rho\rho} = & 2B_0 + C_0 \rho^{-2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 4n(1-4n)(A_{4n} + E_{4n}) \rho^{4n-2} + 4n(1+4n)(F_{4n} - B_{4n}) \rho^{-4n-2} \right. \\ & + (-16n^2 + 4n + 2) C_{4n} \rho^{4n} + (-16n^2 - 4n + 2) D_{4n} \rho^{-4n} - 4n G_{4n} \rho^{-1} \frac{\partial}{\partial \rho} I_{4n} \left(\frac{\rho}{\bar{A}} \right) \\ & \left. - 4n H_{4n} \rho^{-1} \frac{\partial}{\partial \rho} K_{4n} \left(\frac{\rho}{\bar{A}} \right) + 4n G_{4n} \rho^{-2} I_{4n} \left(\frac{\rho}{\bar{A}} \right) + 4n H_{4n} \rho^{-2} K_{4n} \left(\frac{\rho}{\bar{A}} \right) \right\} \cos 4n\theta \dots\dots\dots(31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2 \sigma_{\theta\theta} = & 2B_0 - C_0 \rho^{-2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 4n(4n-1)(A_{4n} + E_{4n}) \rho^{4n-2} + 4n(4n+1)(B_{4n} - F_{4n}) \rho^{-4n-2} \right. \\ & + (4n+2)(4n+1) C_{4n} \rho^{4n} + (-4n+2)(-4n+1) D_{4n} \rho^{-4n} + 4n G_{4n} \rho^{-1} \frac{\partial}{\partial \rho} I_{4n} \left(\frac{\rho}{\bar{A}} \right) \\ & \left. + 4n H_{4n} \rho^{-1} \frac{\partial}{\partial \rho} K_{4n} \left(\frac{\rho}{\bar{A}} \right) - 4n G_{4n} \rho^{-2} I_{4n} \left(\frac{\rho}{\bar{A}} \right) - 4n H_{4n} \rho^{-2} K_{4n} \left(\frac{\rho}{\bar{A}} \right) \right\} \cos 4n\theta \dots\dots\dots(32) \end{aligned}$$

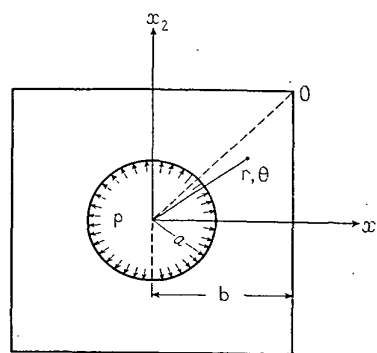


図 1 流体圧をうける円孔をもつ正四角柱

の次の関係式を得る。

$$\left. \begin{aligned} E_{4n} &= 8(1-\nu) \bar{B}^2 (4n+1) C_{4n} \\ F_{4n} &= -8(1-\nu) \bar{B}^2 (-4n+1) D_{4n} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(27)$$

つぎに、式 (19)~(21) のマイクロポーラ理論による修正されたミッチェルの条件式を、極座標系に変形すれば

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\Delta \phi}{2} \right) + \left(\frac{\bar{B}}{\bar{A}} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \{ (1-\nu) \Delta \phi \} \right] \rho d\theta &= 0 \\ \int_0^{2\pi} \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \rho \sin \theta \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \Delta \phi \rho d\theta &= 0 \\ \int_0^{2\pi} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \rho \cos \theta \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \Delta \phi \rho d\theta &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(28)$$

応力関数 ϕ, ψ による応力、および偶応力成分の極座標表示は

$$\left. \begin{aligned} a^2 \sigma_{\rho\rho} &= \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho \partial \theta} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \\ a^2 \sigma_{\theta\theta} &= \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho \partial \theta} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \\ a^2 \sigma_{\rho\theta} &= \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho \partial \theta} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) \\ a \sigma_{\theta\rho} &= \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho \partial \theta} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(29)$$

$$a \mu_{\rho z} = \frac{\partial \psi}{\partial \rho}, \quad a \mu_{\theta z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \dots\dots\dots(30)$$

式 (25), (26) を式 (29), (30) に代入し、整とんすれば次記となる。

$$a^2 \sigma_{\theta\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 4n(4n-1)(A_{4n} + E_{4n})\rho^{4n-2} + 4n(4n+1)(-B_{4n} + F_{4n})\rho^{-4n-2} + 4n(4n+1)C_{4n}\rho^{4n} \right. \\ \left. + 4n(-4n+1)D_{4n}\rho^{-4n} - G_{4n}\rho^{-1} \frac{\partial}{\partial \rho} I_{4n}\left(\frac{\rho}{A}\right) - H_{4n}\rho^{-1} \frac{\partial}{\partial \rho} K_{4n}\left(\frac{\rho}{A}\right) + 16n^2 G_{4n}\rho^{-2} I_{4n}\left(\frac{\rho}{A}\right) \right. \\ \left. + 16n^2 H_{4n}\rho^{-2} K_{4n}\left(\frac{\rho}{A}\right) \right\} \sin 4n\theta \dots\dots\dots(33)$$

$$a^2 \sigma_{\phi\phi} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 4n(4n-1)(A_{4n} + E_{4n})\rho^{4n-2} + 4n(4n+1)(-B_{4n} + F_{4n})\rho^{-4n-2} + 4n(4n+1)C_{4n}\rho^{4n} \right. \\ \left. + 4n(-4n+1)D_{4n}\rho^{-4n} + G_{4n} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} I_{4n}\left(\frac{\rho}{A}\right) + H_{4n} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} K_{4n}\left(\frac{\rho}{A}\right) \right\} \sin 4n\theta \dots\dots\dots(34)$$

$$a \mu_{\rho z} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 4nE_{4n}\rho^{4n-1} - 4nF_{4n}\rho^{-4n-1} + G_{4n} \frac{\partial}{\partial \rho} I_{4n}\left(\frac{\rho}{A}\right) + H_{4n} \frac{\partial}{\partial \rho} K_{4n}\left(\frac{\rho}{A}\right) \right\} \sin 4n\theta \dots\dots\dots(35)$$

$$a \mu_{\theta z} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 4nE_{4n}\rho^{4n-1} + 4nF_{4n}\rho^{-4n-1} + 4nG_{4n}\rho^{-1} I_{4n}\left(\frac{\rho}{A}\right) + 4nH_{4n}\rho^{-1} K_{4n}\left(\frac{\rho}{A}\right) \right\} \cos 4n\theta \dots\dots\dots(36)$$

まず, 上の各式を式 (23) の条件に代入することにより, 係数間にはつぎの関係式が成立する.

$$2B_0 + C_0 = -pa^2 \dots\dots\dots(37)$$

$$4n(1-4n)(A_{4n} + E_{4n}) + 4n(1+4n)(-B_{4n} + F_{4n}) + (-16n^2 + 4n + 2)C_{4n} + (-16n^2 - 4n + 2)D_{4n} \\ - 4nG_{4n}\{I_{4n-1}(1/\bar{A})/2\bar{A} + I_{4n+1}(1/\bar{A})/2\bar{A} - I_{4n}(1/\bar{A})\} \\ + 4nH_{4n}\{K_{4n-1}(1/\bar{A})/2\bar{A} + K_{4n+1}(1/\bar{A})/2\bar{A} + K_{4n}(1/\bar{A})\} = 0 \dots\dots\dots(38)$$

$$4n(4n-1)(A_{4n} + E_{4n}) + 4n(4n+1)(-B_{4n} + F_{4n}) + 4n(4n+1)C_{4n} + 4n(-4n+1)D_{4n} \\ - G_{4n}\{I_{4n-1}(1/\bar{A})/2\bar{A} + I_{4n+1}(1/\bar{A})/2\bar{A} + 16n^2 K_{4n}(1/\bar{A})\} = 0 \dots\dots\dots(39)$$

$$4nE_{4n} - 4nF_{4n} + (G_{4n}/2\bar{A})\{I_{4n-1}(1/\bar{A}) + I_{4n+1}(1/\bar{A})\} - (H_{4n}/2\bar{A})\{K_{4n-1}(1/\bar{A}) + K_{4n+1}(1/\bar{A})\} = 0 \\ \dots\dots\dots(40)$$

つぎに, 上の関係式を考慮して式 (31)~(36) を直交座標系 $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \mu_{13}$ に変換し, 外側境界条件式 (24) を適用して, すべての未知係数を辺点法により確定する. すなわち外側境界を m 等分し $3m+1$ の方程式を得るから, 各係数を決定できる. 実際の計算にさいしては, 外側境界上に多くの点を取り, 最小二乗法により未知係数を決定した.

3. 数値計算および考察

数値計算例は下記のデータの場合について行った.

$$\rho_0 : 2.0, 3.0$$

$$\nu : 0, 0.5$$

$$\bar{A}, \bar{B} : \bar{A}=0, \quad \bar{B}=0$$

$$\bar{A}=1.0, \quad \bar{B}=0.2$$

$$\bar{A}=1.0, \quad \bar{B}=0.6$$

$$\bar{A}=1.0, \quad \bar{B}=1.0$$

ゆえに得られた結果において, $\bar{A}=\bar{B}=0$ のときが, 古典理論の場合になり, $\bar{B}/\bar{A}=1.0$ のときが Mindlin の偶応力理論の場合になり, マイクロポーラ理論は $0 < \bar{B}/\bar{A} < 1.0$ の間の場合になる. 図2および3は $\rho_0=2.0$ に対し, $\nu=0.0$ と $\nu=0.5$ について, 図4および5は $\rho_0=3.0$ に対し, $\nu=0.0$ と $\nu=0.5$ について円穴周辺上のフープ応力の無次元表示である. いずれの場合にも古典理論では最大の応力集中は常に $\theta=45^\circ$ の四角形の対角線上に生じるが, 偶応力論では

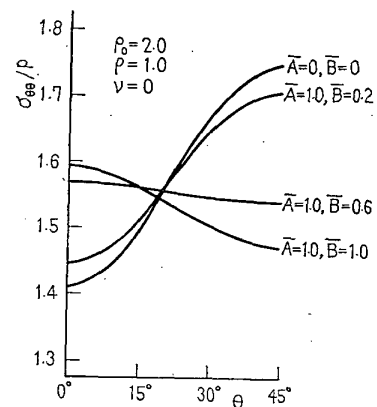


図2 穴周辺上のフープ応力 ($\rho_0=2, \nu=0.0$ の場合)

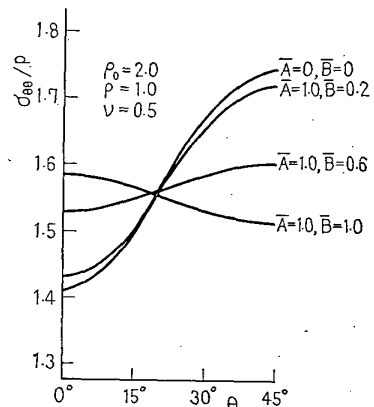


図3 穴周辺上のフープ応力 ($\rho_0=2, \nu=0.5$ の場合)

$\theta=0^\circ$ の x 軸上に最大値が移る. すなわち偶応力の考慮は最大応力の生じる位置を移動させている. マイクロボーラ理論では両者の中間になり, 新材料定数 \bar{B}/\bar{A} の比により $\theta=45^\circ$ あるいは $\theta=0^\circ$ に生じている. どの場合でも, 偶応力の作用により応力集中の最大値を古典理論の値よりも緩和させていることは確かである. 図 6 および 7 は $\rho_0=2.0$ について, それぞれ x_1 軸上と対角線上のフープ応力の変化を示したものである. 結論としていえることは, 従来いわれていた Mindlin の偶応力論の採用は, 応力集中において古典理論とギャップができすぎる結果が出るのに対し, マイクロボーラ理論の採用はそれを修正していることになり, 実験値とさほど大きな差がでないことになる.

最後にマイクロボーラ理論の現時点における最大の問題点であり, それがマイクロボーラ理論の進展をとどめている新材料定数 A, B の実際の数値の問題にふれると, Eringen のマイクロボーラ理論の特長は緒言で述べたように, 応力テンソル全体についての線形性の仮定である. このために古くからいわれたマイクロボーラ理論の理論解析の困難性が打ち破られ, 多くの問題の解析解を得ることが成功できたわけであるが, 新材料定数 A, B はこの線形性の導入の結果に付随して現れたものであるから, 新しい理論の展開のためには止むを得ない考え方といえる. 現在のところ著者の集め得た文献全部, およびこの方面の研究の権威 Nowacki 教授, また日本での権威渥美 光教授らの情報でも入手されていないので推定例もあげられないことは残念である. ただ図 2 を例にとると, $\bar{A}=\bar{B}=0$

が偶応力を全然考えない古典弾性論, $\bar{A}=\bar{B}=1$ が Mindlin の偶応力理論で, 換言すればマイクロボーラ理論で $\bar{A}/\bar{B}=1$ が偶応力理論に相当するから, マイクロボーラ理論の \bar{A}/\bar{B} はその中間値であり, しかも偶応力理論の新材料定数 l の値については二, 三の結果が報告されている. しかし l と A, B の関係式を示し得ないから, まず l の正確な測定が先決で, その結果をもとにして A, B の推測値も得られることが可能になると考えられる. そのための資料として偶応力の影響を考慮した応力測定の実験報告の文献 (11)(12) をあげておく. いずれにせよ連続体の力学の仮定による従来の解析が不都合な割れ先端部, 粉体などの材料において, 非対称応力テンソルを考慮の対象から除外したまま捨てておく Mindlin の偶応力論より, Eringen のマイクロボーラ理論のほうが, 解析理論として無理が少ないともいえる. そのかわり l から, さらに二つの定数の導入も避けられない結果となっている.

おわりに内容に関し有益なご教示および記号の混同をご指摘いただいた東北大学渥美 光教授, 図の記号に対して誤記をご指摘いただいた防衛大学校 塩谷駿

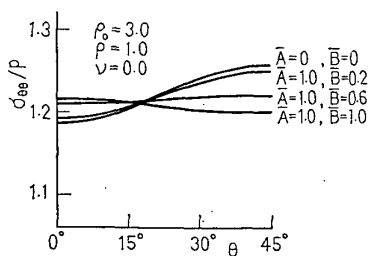


図 4 穴周辺上のフープ応力 ($\rho_0=3, \nu=0.0$ の場合)

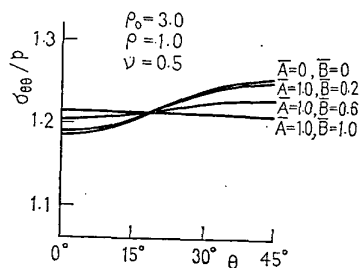


図 5 穴周辺上のフープ応力 ($\rho_0=3, \nu=0.5$ の場合)

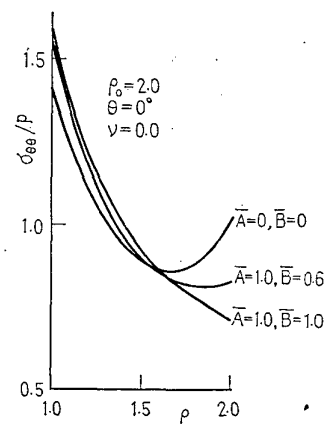


図 6 $\theta=0^\circ$ 軸上のフープ応力 ($\rho_0=2.0, \nu=0.0$ の場合)

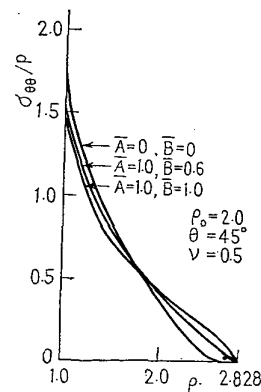


図 7 $\theta=45^\circ$ 軸上のフープ応力 ($\rho_0=2.0, \nu=0.5$ の場合)

介教授に感謝し, また数値計算および式の吟味にご助力を得た高橋清史君に感謝する。

文 献

- (1) Durelli, A.J. and Barriage, J., *J. Appl. Mech.*, **22-4** (1955), 539.
- (2) Sekiya, T., *Proc. 5th Japan Nat. Congr. Appl. Mech.*, (1955), 95.
- (3) 川口, 機論, **18-65** (昭 27), 36.

- (4) Slot, T., *Nucl. Engng. & Des.*, **5** (1967), 142.
- (5) Mindlin, R.D., *Exp. Mech.*, **3-1** (1963), 1.
- (6) 竹内・ほか2名, 機論, **39-328** (昭 48-12), 3577.
- (7) Eringen, A.C., *J. Math. Mech.*, **15** (1966), 909.
- (8) 松岡・ほか2名, 建築学会論文集, **184** (昭 46), 63.
- (9) 渥美・田村, 機論, **36-281** (昭 45-1), 1.
- (10) 皆川, 材料科学, **9-5** (昭 47), 289.
- (11) Ellis, R.W. and Smith, C.W., *Exp. Mech.*, **7** (1967), 372.
- (12) Schijve, J., *J. Mech. & Phys. Solids*, **14** (1966), 113.

討 論

〔質問〕 塩谷 駿介 (防衛大学校)

(1) 式 (15) で与えられる新材料定数 A 及び B が $A=B$ (計算例で $\bar{A}=\bar{B}=1.0$ の場合) となるためには $\mu=0$ となる。従って一般に $A=B$ は成立しないように思われる。

(2) 未知係数を辺点法で決定されているが, 実際問題として外側境界をどの程度分割すれば所要の精度が得られるか。

(3) 実際の材料の応力集中問題にマイクロポーラ理論を適用する場合, 材料定数 A, B を推定するための具体的方策があればお教え願いたい。

〔回答〕 (1) ご指摘のように $A=B$ の場合, $(\gamma+\epsilon)/4\alpha=0$ を得る。 $A=B$ と置けば形式的に偶応力理論と一致する。だから偶応力理論の値を図示するために, 形式的に $A=B$ と置いたわけである。

(2) 本数値計算例では応力の級数 $\sum_{n=1}^{\infty}$ を $\sum_{n=1}^7$ で打ち切り, 角度を9等分した10点で境界条件を満足さ

せた。その結果最も精度が悪かった $\bar{A}=1.0, \bar{B}=0.2$ の場合, 境界上の応力として $\theta=35^\circ$ で $\sigma_{xx}/p=0.27 \times 10^{-3}$ の値がいちばん精度が悪かった。よって, 境界条件 $\sigma_{xx}/p=0$ を十分満足していると考えられる。

(3) 現存のところ具体的な方策はない。このことが将来重要問題になると考える。

〔質問〕 渥美 光 (東北大学工学部)

$\bar{A}=\bar{B}=0, \bar{B}/\bar{A}=1$ がそれぞれ古典理論および偶応力理論の場合に一致するのは, 式の見掛け上のことで, $\bar{A}=\bar{B}=0, \bar{B}/\bar{A}=1$ から得られる, 新材料定数 γ と ϵ および α とラーメの定数 μ との関係には力学的意味が無いように思う。したがって, 各場合の応力値の計算は本報の式を用いたものでないと思うが, これらに関連しご教示願いたい。

〔回答〕 ご指摘のとおりであり, 古典理論の結果は本報の式とは別に, 弾性論, 偶応力理論の結果から計算したものである。