

弾性体の接着層で接合された棒のねじり*

辻 知章^{*1}, 野田 直剛^{*1}
渋谷 寿一^{*2}, 小泉 堯^{*2}

Torsion Problems for Bonded Bars by an Elastic Adhesive layer

Tomoaki TSUJI, Naotake NODA,
Toshikazu SHIBUYA and Takashi KOIZUMI

Torsion problems for a stepped-bar composed of two semi-infinite bars bonded to each other by an elastic adhesive layer are investigated. When the behavior of the adhesive layer is handled in elasticity, a stress singularity occurs at the corner of the bars. Therefore, the stress analysis proceeds considering this stress singularity by making use of the series expansion technique, and the problems are reduced to an infinite set of systems of linear equations. Moreover, the stress fields in the neighborhood of the corner are shown by singular terms with only one parameter which is similar to the stress intensity factor. The stress distribution and the values of this parameter are shown for various values of the mechanical properties of the bars and the adhesive layer. In addition, the results are compared with the ones for problems in which the behavior of the adhesive layer is approximated by that of the shear springs.

Key Words : Elasticity, Torsion, Adhesive Layer, Stress Singularity,
Semi-infinite Bar, Cylindrical Coordinate, Stress Function

1. 緒 言

弾性体どうしが接着層を介して接合されている構造物の応力解析に関する研究はさかに行われて来ている。例えばErdogan⁽¹⁾は、2枚の板の端面の一部が接着されている場合に、接着層の挙動をばねでモデル化し、接着面の応力を平面弾性理論に基づいて解析している。また著者ら⁽²⁾は、材質の異なる2つの半無限弾性棒の両端が接着接合されて構成されている棒がねじり変形を受ける場合の解析を、接着層の挙動をErdoganらと同様にばねでモデル化して行っている。接着層をばねでモデル化した場合は、接着層の応力値が接着層両端の変位差に比例するという仮定をしているため、応力の特異性は現れないが、接着層を弾性体と考えた場合は、接合部における形状や材質の不連続性のために応力が無限大となり、応力の特異性を生じる。そこで、本研究ではこの応力特異性の影響を調べる

ために、接着層を弾性体として、3次元弾性論に基づいた級数解法による応力解析を行う。すなわち、半径および材質の異なる棒が接着接合されて構成されている接合棒のねじり問題を、接着層を弾性体として考えて解析を行い、応力分布を明らかにするとともに、接着層をばねでモデル化した場合との比較を行う。さらに、角部近傍の応力特異性の挙動と棒および接着層の材質との関係を明らかにする。

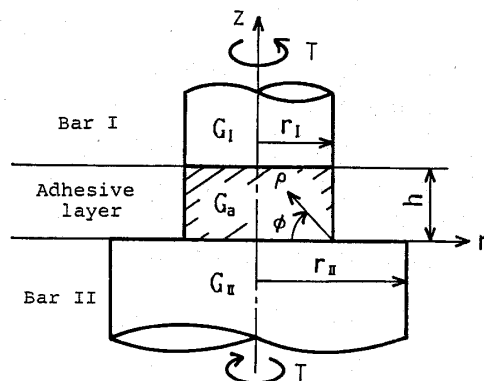


図1 ねじりを受ける段付棒

* 昭和63年7月15日 東海支部浜松地方講演会において講演、原稿受付 昭和62年12月25日。

^{*1} 正員、静岡大学工学部 (〒432 浜松市城北3-5-1)。

^{*2} 正員、東京工業大学 (〒152 東京都目黒区大岡山2-12-1)。

2. 応力関数

円柱座標系 (r, θ, z) における変位, 応力成分をそれぞれ $(u_r, u_\theta, w_z), (\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}, \tau_{zr})$ とすれば, 軸対称ねじり問題における変位および応力は, Boussinesqの応力関数 $\lambda_3(r, z)$ を用いて次のように表せる.

$$\begin{aligned} u_\theta &= -\frac{\partial \lambda_3}{\partial r}, \quad \frac{\tau_{\theta z}}{G} = -\frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial r \partial z} \\ \frac{\tau_{r\theta}}{G} &= -\frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda_3}{\partial r} \end{aligned} \quad (1)$$

$$u_r = w_z = 0, \quad \sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_z = \tau_{zr} = 0$$

ここで, G は横弾性係数, λ_3 は $\nabla^2 \lambda_3 = 0$ を満足する円柱調和関数である.

3. 応力解析

図1に示すように, 半径 r_1 , 横弾性係数 G_1 の半無限棒Iと半径 r_2 ($r_2 > r_1$), 横弾性係数 G_2 の半無限棒IIが, 半径 r_1 , 厚さ h , 横弾性係数 G_0 の円柱状の接着層で接合してできる段付棒を, 無限遠でトルク T でねじる問題の応力解析を行なう.

棒I, IIと接着層の3つの領域に分け, それぞれの領域における諸量を指標I, II, aを付けて表すことにすれば, 本問題の境界条件は次のように表せる.

$$(\tau_{r\theta})_{r=r_1} = 0, \quad T = 2\pi \int_0^{r_1} r^2 \tau_{\theta z} dr \quad (h \leq z < \infty) \quad (2)$$

$$(\tau_{r\theta})_{r=r_2} = 0, \quad T = 2\pi \int_0^{r_2} r^2 \tau_{\theta z} dr \quad (0 \geq z > -\infty) \quad (3)$$

$$(\tau_{r\theta})_{r=r_1} = 0, \quad T = 2\pi \int_0^{r_1} r^2 \tau_{\theta z} dr \quad (0 \leq z \leq h) \quad (4)$$

$$(\tau_{\theta z})_{z=h} = (\tau_{\theta z})_{z=h} \quad (0 \leq r \leq r_1) \quad (5)$$

$$(\tau_{\theta z})_{z=0} = \begin{cases} (\tau_{\theta z})_{z=0} & (0 \leq r \leq r_1) \\ 0 & (r_1 < r \leq r_2) \end{cases} \quad (6)$$

$$(v_\theta)_{z=h} = (v_\theta)_{z=h} \quad (0 \leq r \leq r_1) \quad (7)$$

$$(v_\theta)_{z=0} = (v_\theta)_{z=0} \quad (0 \leq r \leq r_1) \quad (8)$$

各領域に対する応力関数は, 棒の単純ねじりの応力関数との重ね合わせにより, 次のように無元級数で表すことができる.

$$\begin{aligned} \lambda_3(r, z) &= A_0(r^2 - 2z^2) + A_0(2z^3 - 3r^2z) \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_0(\alpha_m r) e^{-\alpha_m z} \quad (z \geq h) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\lambda_3(r, z) = B_0(r^2 - 2z^2) + B_0(2z^3 - 3r^2z)$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} B_m J_0(\beta_m r) e^{\beta_m z} \quad (z \leq 0) \quad (10)$$

$$\lambda_3(r, z) = C_0(r^2 - 2z^2) + C_0(2z^3 - 3r^2z)$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} C_m J_0(\alpha_m r) \cosh(z \gamma_m)$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} C_m J_0(\alpha_m r) \cosh\{(z-h) \gamma_m\}$$

$$(0 \leq z \leq h) \quad (11)$$

ここで, $J_n(x)$ は n 次の第一種のベッセル関数である. 式(1)に, 式(9)-(11)を代入すれば, 変位, 応力は各領域において次のように表せる.

[棒I ($z \geq h$)]

$$\begin{aligned} v_\theta &= -2A_0' r + 6r z A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \alpha_m J_1(\alpha_m r) e^{-\alpha_m(z-h)} \\ \frac{\tau_{r\theta}}{G_1} &= -\sum_{m=1}^{\infty} A_m \alpha_m^2 J_2(\alpha_m r) e^{-\alpha_m(z-h)} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\frac{\tau_{\theta z}}{G_1} = 6r A_0 - \sum_{m=1}^{\infty} A_m \alpha_m^2 J_1(\alpha_m r) e^{-\alpha_m(z-h)}$$

[棒II ($z \leq 0$)]

$$\begin{aligned} v_\theta &= -2B_0' r + 6r z B_0 + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \beta_m J_1(\beta_m r) e^{\beta_m z} \\ \frac{\tau_{r\theta}}{G_2} &= -\sum_{m=1}^{\infty} B_m \beta_m^2 J_2(\beta_m r) e^{\beta_m z} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{\tau_{\theta z}}{G_2} = 6r B_0 + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \beta_m^2 J_1(\beta_m r) e^{\beta_m z}$$

[接着層 ($0 \leq z \leq h$)]

$$\begin{aligned} v_\theta &= -2C_0' r + 6r z C_0 + \sum_{m=1}^{\infty} [C_m^1 \cosh(\gamma_m z) \\ &+ C_m^2 \cosh\{\gamma_m(z-h)\}] \gamma_m J_1(\gamma_m r) \\ \frac{\tau_{r\theta}}{G_0} &= -\sum_{m=1}^{\infty} [C_m^1 \cosh(\gamma_m z) \\ &+ C_m^2 \cosh\{\gamma_m(z-h)\}] \gamma_m^2 J_2(\gamma_m r) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\frac{\tau_{\theta z}}{G_0} = 6r C_0 + \sum_{m=1}^{\infty} [C_m^1 \sinh(\gamma_m z) \\ + C_m^2 \sinh\{\gamma_m(z-h)\}] \gamma_m^2 J_1(\gamma_m r)$$

境界条件式(2), (3), (4)の第1式より, $\alpha_m, \beta_m, \gamma_m$ は次の超越方程式の根として求められる.

$$\begin{aligned} J_2(\alpha_m r_1) &= 0 \quad (\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 \dots) \\ \beta_m &= a \alpha_m, \quad \gamma_m = \alpha_m \quad (m=1, 2, 3 \dots) \end{aligned} \quad (15)$$

ここで,

$$a = r_1 / r_2$$

境界条件式(2), (3), (4)の第2式より, A_0, B_0, C_0 は,

$$A_0 = \frac{\tau^*}{6r_1 G_1}, \quad B_0 = \frac{\tau^*}{6r_1 G_2} \frac{r_1^4}{r_2^4}, \quad C_0 = \frac{\tau^*}{6r_1 G_0} \quad (16)$$

ここで,

$$\tau^* = 2T / (\pi r_1^3)$$

境界条件式(5), (7)に式(12), (14)の第1, 第3式を代入し整理すると,

$$\sum_{n=1}^{\infty} [G_1 A_n + G_a C_n^I \sinh(\alpha_n h)] \alpha_n^2 J_1(\alpha_n r) = 0$$

$$2(C_0' - A_0') r + \frac{\tau^* r h}{r_1} \left(\frac{1}{G_1} - \frac{1}{G_a} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} [C_n^I \cosh(\alpha_n h) + C_n^I A_n] \alpha_n J_1(\alpha_n r)$$

$$(0 \leq r \leq r_1) \quad (17)$$

式(15)の関係から得られるベッセル関数の直交性を上に用い整理すると, 未知係数 A_n と C_n^I は, 次のように C_n^I を用いて表せる.

$$A_n = \frac{G_a}{G_1} \frac{\sinh(\alpha_n h)}{D_n} C_n^I, \quad C_n^I = -\frac{C_n^I}{D_n}$$

$$2(C_0' - A_0') = \frac{\tau^* r h}{r_1} \left(\frac{1}{G_a} - \frac{1}{G_1} \right)$$

ここで,

$$D_n = (G_a/G_1) \sinh(\alpha_n h) + \cosh(\alpha_n h)$$

棒IIと接着層との接合面におけるせん断応力($\tau_{\theta z}$) $z=0$ を $\tau_0(r)$ と置くと, 境界条件式(6)は, 式(13)と(14)を用いて次のように表される.

$$\frac{r_1^3 r}{r_1^4 G_1} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n (a \alpha_n)^2 J_1(a \alpha_n r)$$

$$= \begin{cases} \tau_0(r)/G_1 & (0 \leq r \leq r_1) \\ 0 & (r_1 < r \leq r_2) \end{cases}$$

$$\frac{r}{G_a} - \sum_{n=1}^{\infty} C_n^I \sinh(\alpha_n h) \alpha_n^2 J_1(\alpha_n r)$$

$$= \tau_0(r)/G_a \quad (0 \leq r \leq r_1) \quad (19)$$

上式の第1式に $r J_1(a \alpha_n r)$, 第2式に $r J_1(\alpha_n r)$ を乗じ, $r=0 \sim r_1$, $r=0 \sim r_1$ の領域でそれぞれ積分し, 式(15)の関係を用いれば, B_n , C_n^I は $\tau_0(r)$ を用いて次のように表せる.

$$B_n \alpha_n^2 J_1^2(\alpha_n r_1) = \frac{2}{r_1^2} \int_0^{r_1} \frac{\tau_0(r)}{G_1} r J_1(a \alpha_n r) dr$$

$$- C_n^I \sinh(\alpha_n h) \alpha_n^2 J_1^2(\alpha_n r_1)$$

$$= \frac{2}{r_1^2} \int_0^{r_1} \frac{\tau_0(r)}{G_a} r J_1(\alpha_n r) dr$$

$$(20)$$

また, 式(19)の第2式の両辺に r^2 を乗じて $r=0 \sim r_1$ まで積分し式(15)を用いれば, 次式が得られる.

$$\int_0^{r_1} r^2 \tau_0(r) dr = \frac{1}{4} r_1^4 \quad (21)$$

式(20)より, B_n , C_n^I は $\tau_0(r)$ を用いて表されているから, 本問題は残る境界条件式(8)より未知関数 $\tau_0(r)$ を求める問題に帰着された. $\tau_0(r)$ は角部($z=0, r=r_1$)における応力の特異性を考慮して, 一般性を失うこと

なく, 未定係数 x_k を用いて以下のように表示することができる.

$$\frac{\tau_0(r)}{\tau^*} = \frac{r}{r_1} \left\{ 1 - \left(\frac{r}{r_1} \right)^2 \right\}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} x_k \frac{(-1)^k (1+k)! \Gamma(1-\lambda)}{\Gamma(1-\lambda+k)}$$

$$\times G_k(2-\lambda, 2; r^2/r_1^2) \quad (0 \leq r \leq r_1) \quad (22)$$

ここで, λ は応力特異性のオーダー, $G_k(\alpha, \beta; x)$ はヤコビの多項式である, また式(21)より,

$$x_0 = (1-\lambda)(2-\lambda)/2 \quad (23)$$

式(22)を式(20)に代入し積分を実行すると, B_n, C_n^I は, x_k を用いて次のように表せる.

$$B_n \alpha_n^2 = \frac{\tau^*}{G_1} \sum_{k=0}^{\infty} J_{k,n}(a) x_k$$

$$C_n^I \sinh(\alpha_n h) = -\frac{\tau^*}{G_a} \sum_{k=0}^{\infty} J_{k,n}(1) x_k \quad (24)$$

ここで,

$$J_{k,n}(t) = (-1)^k \Gamma(1-\lambda)$$

$$\times \left(\frac{t \alpha_n r_1}{2} \right)^{\lambda-1} \frac{J_{2-\lambda+2k}(t \alpha_n r_1)}{J_1^2(\alpha_n r_1)}$$

以上より, A_0', B_0', C_0' 以外の未定係数は, x_k を用いて表された. 残る境界条件式(8)より, x_k に関する方程式が次のように得られる.

$$2(C_0' - B_0') \frac{G_a}{\tau^*} + \frac{G_a}{G_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(a \alpha_n r)}{\alpha_n} \sum_{k=0}^{\infty} J_{k,n}(a) x_k$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{D_n} - \cosh(\alpha_n h) \right] \frac{J_1(\alpha_n r)}{\alpha_n \sinh(\alpha_n h)}$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} J_{k,n}(1) x_k = 0 \quad (0 \leq r \leq r_1) \quad (25)$$

さらに, ヤコビの多項式 $G_n(3-\lambda, 2; r^2/r_1^2)$ による展開公式

$$r = r G_0(3-\lambda, 2; r^2/r_1^2)$$

$$J_1(\alpha r) = \frac{r}{r_1} \left(\frac{\alpha r_1}{2} \right)^{\lambda-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(3-\lambda+2n) \Gamma(3-\lambda+n)}{n!} \right]$$

$$\times J_{3-\lambda+2n}(\alpha r_1) G_n(3-\lambda, 2; r^2/r_1^2) \quad (0 \leq r \leq r_1) \quad (26)$$

を用いて式(25)の各項を展開し, $G_n(3-\lambda, 2; r^2/r_1^2)$ ($n=0, 1, 2, \dots$)の各項を等置すれば, x_k に関する無限連立一次方程式が次のように求まる.

$$2^{\lambda-1} \frac{G_a}{\tau^*} \frac{(C_0' - B_0')}{\Gamma(4-\lambda)} - \delta_{n,0} + \sum_{k=0}^{\infty} x_k L_k = 0$$

$$(n=0, 1, 2, \dots) \quad (27)$$

ここで,

$$L_k = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n r_1 \right)^{\lambda-3} \left[\frac{G_1}{G_a} a^{\lambda-1} J_{k,n}(a) J_{3-\lambda+2n}(a \alpha_n r_1) \right]$$

$$- \left\{ \frac{1}{D_n} - \cosh(\alpha_n h) \right\} \frac{J_{k,n}(1) J_{3-\lambda+2n}(\alpha_n r_1)}{\sinh(\alpha_n h)} \quad (28)$$

x_0 は式(23)のように表されているから、式(27)は $(C_0' - B_0')$ と x_k ($k=1, 2, 3, \dots$) の未知係数からなる無限連立一次方程式となっている。これを解いて x_k , $(C_0' - B_0')$ を求めれば、式(18), (24)より $A_m, B_m, C_m^I, C_m^{II}$ が得られ、式(12)-(14)より、変位、応力が求められる。ここで、 A_0', B_0', C_0' は剛体回転に関係する係数であるため、 $(C_0' - A_0')$ と $(C_0' - B_0')$ の値しか決定できない。そこで、 $z=0, r=r_1$ において、変位 u_0 が零となるように C_0' を決めることにより A_0', B_0' を決定する。

4. 応力特異性

式(25)より λ の値を求めるため、この式の両辺を r で除し、さらに r で微分して応力のオーダに直すと、

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k \left[a^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{G_m}{G_r} J_2(a \alpha_m r) J_{k,m}(a) - \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{D_m} - \cosh(\alpha_m h) \right\} \frac{J_2(\alpha_m r) J_{k,m}(1)}{\sinh(\alpha_m h)} \right] = 0 \quad (0 \leq r \leq r_1) \quad (28)$$

ここで、 $m \rightarrow \infty$ において、以下の漸近展開式が成立する。

$$\begin{aligned} \alpha_m r_1 &\sim (m+3/4)\pi \\ J_2(t \alpha_m r) J_{k,m}(t) &\sim -(2t)^{\lambda-2} \Gamma(1-\lambda) \\ \sqrt{r_1/r} (\alpha_m r_1)^{\lambda-1} [\cos\{t \alpha_m (r_1-r) + \pi + \lambda \pi/2\} &+ \cos\{t \alpha_m (r_1+r) - 3\pi/2 + \lambda \pi/2\}] \end{aligned} \quad (29)$$

上式の第1式より、 $r \rightarrow r_1 - 0$ において以下の関係が成立する。

$$\begin{aligned} &\left[\sum_{m=1}^{\infty} (t \alpha_m r_1)^{\lambda-1} \cos\{t \alpha_m (r_1-r) + \phi\} \right] \left(1 - \frac{r}{r_1}\right)^{\lambda} \\ &= \frac{\Gamma(\lambda)}{\pi t} \cos\left(\frac{\lambda \pi}{2} + \phi\right) \\ &\left[\sum_{m=1}^{\infty} (t \alpha_m r_1)^{\lambda-1} \cos\{t \alpha_m (r_1+r) + \phi\} \right] \left(1 - \frac{r}{r_1}\right)^{\lambda} \\ &= \begin{cases} 0 & , (0 < t < 1) \\ -\frac{\Gamma(\lambda)}{\pi t} \sin\left(\frac{\lambda \pi}{2} - \phi\right) & , (t=1) \end{cases} \end{aligned} \quad (30)$$

式(29), (30)の関係をを用いれば、式(28)は次のように特異項を分離して表せる。

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} x_k \right) \left[1 - \left(1 + \frac{G_a}{G_r}\right) \cos(\lambda \pi) \right] \left(1 - \frac{r}{r_1}\right)^{-\lambda} + \text{正則項} = 0 \quad (31)$$

従って、 λ は次の方程式の根として得られる。

$$\cos(\pi \lambda) = \frac{1}{1 + G_a/G_r} \quad (32)$$

この結果は、Keer⁽³⁾ と一致する。

同様な方法を式(13), (14)の各項に用いれば、応力

$\tau_{\theta z}$, $\tau_{r\theta}$ は、図1に示す角部を中心とした極座標 (ρ, ϕ) を用い、角部近傍における特異項のみを抜きだして次のように表せる⁽⁴⁾。

[接着層 $(0 \leq \phi \leq \pi/2)$]

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{\theta z}}{\tau^*} &\approx K \frac{\cos\{\lambda(\pi/2 + \phi)\}}{\cos(\lambda \pi/2)} \left(\frac{\rho}{r_1}\right)^{-\lambda} \\ \frac{\tau_{r\theta}}{\tau^*} &\approx -K \frac{\sin\{\lambda(\pi/2 - \phi)\}}{\cos(\lambda \pi/2)} \left(\frac{\rho}{r_1}\right)^{-\lambda} \end{aligned} \quad (33)$$

[棒 I] $(-\pi \leq \phi \leq 0)$

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{\theta z}}{\tau^*} &\approx K \frac{\sin\{\lambda(\pi + \phi)\}}{\sin(\lambda \pi)} \left(\frac{\rho}{r_1}\right)^{-\lambda} \\ \frac{\tau_{r\theta}}{\tau^*} &\approx -K \frac{\cos\{\lambda(\pi + \phi)\}}{\sin(\lambda \pi)} \left(\frac{\rho}{r_1}\right)^{-\lambda} \end{aligned} \quad (34)$$

ここで

$$K = 2^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} x_k \quad (35)$$

である。

5. 数値結果

5.1 解の収束性 無限連立一次方程式(27)の打ち切り元数を N 、係数行列 L を計算するときの無限級数の打ち切り項数を M とする。 M, N の値をどの程度にすれば実用上十分な精度で解が得られるのかを考える。表1, 2に $r_1/r_r = 0.5, G_r/G_l = 1.0, G_a/G_l = 0.2, h/r_1 = 0.01$ の場合の根 $\{x_k\}$ の値と $\tau_0(r)$ の値を示す。表1には、種々の M の値に対する x_k の値を示してある。 $M=500$ と $M=800$ の値は小数点以下第4位まで完全に一致している。従って、 $M=500$ とすれば x_k は十分な精度で得られることがわかる。表2は、 $M=500, N=5, 10, 20, 30$ に対して、 $r/r_1 = 0.5, 0.8, 0.95$ における $\tau_0(r)/\tau^*$ の値である。この表より、 N は20程度にすれば小数点以下第3位程度の精度で応力値が得られることがわかる。図2は、式(35)で表される K の値と $(N+1)$ の逆数の関係を示している。 $1/(N+1)$ が0.05以下においては、 K と $1/(N+1)$ はほぼ線形関係となっている。そこで、 $1/(N+1)=0$ すなわち、 $N \rightarrow \infty$ における K の値を外挿により求めることにより、 x_k の打ち切り誤差の補正を行い、 K の値を求めることにする。以上より、以下の計算は $M=500, N=20$ 程度として行うことにする。

5.2 数値結果 図3と4は $G_r/G_l = 1.0, r_1/r_r = 0.5$ の場合に、接着層の厚さ h および横弾性係数 G_a が、応力が最も大きくなる角部を含む接着層下面のせん断応力 $\tau_{\theta z}$ の分布におよぼす影響を表したものである。合わせて、各種の記号で接着層をせん断ばねでモデル化した場合の結果を示してある。図3は $G_a/G_l = 0.2$ と固定し、 h を変化させたときの $\tau_{\theta z}$ の分布である。せん

断応力は、 r の増加とともに単調に増加し、角部で無限大になる。 h/r_1 が小さくなるに従って角部近傍の応力値は大きくなり、また全体の分布はばねでモデル化した結果に近づく。図4は、 $h/r_1=0.02$ と固定し、 G_a/G_l を変化させた場合である。 $G_a/G_l=0.01, 0.05$ と小さい場合は、応力特異性のオーダー $\lambda=0.0045, 0.0099$ と小さいため、分布は直線状であり、単純ねじり応力状態に近く、ばねでモデル化した結果にほぼ一致する。逆に、接着層の横弾性係数が大きくなるに従って、応力特異性のオーダーが大きくなり、角部近傍の応力値は増加し、ばねでモデル化した結果からの食い違いは大きくなる。

応力が非常に大きくなる角部近傍の応力値と、接着層と棒の材質や接着層厚さ h の関係を調べるために、図5と6に、式(33)-(35)で定義したパラメータ K と h/r_1 および G_a/G_l との関係を示す。図5は $G_l/G_a=1.0$, $r_l/r_a=0.5$ の場合に、接着層の厚さと K の関係を種々の接着層の横弾性係数比 G_a/G_l に対して示したものである。 K の値は、 $G_a/G_l < 1$ では h が小さくなるに従い単調に増加し、 $h \rightarrow 0$ で無限大になる、逆に $G_a/G_l > 1$ で

は h の減少とともに単調に減少し、 $h \rightarrow 0$ で零になる。これは、以下のような理由によるものである。接着層のない場合($h=0$)の特異性のオーダーおよび、 K の値をそれぞれ λ_0 , K_0 と表すと、応力状態は $h \rightarrow 0$ に従い、 $h=0$ の場合の応力状態に漸近することから、式(33)より、

$$K \rightarrow K_0 (\rho/r_1)^{-(\lambda_0-\lambda)} \quad (h \rightarrow 0, \rho \rightarrow 0) \quad (36)$$

ここで、式(32)より、 $G_a < G_l$ のときは、 $\lambda < \lambda_0$ であ

表1 M の x_k に及ぼす影響

$k \backslash M$	x_k			
	100	200	500	800
0	0.7377	0.7377	0.7377	0.7377
1	0.0108	0.0107	0.0107	0.0107
2	0.0032	0.0030	0.0029	0.0029
3	-0.0080	-0.0085	-0.0086	-0.0086
4	-0.0130	-0.0137	-0.0138	-0.0138
5	-0.0139	-0.0149	-0.0150	-0.0150
6	-0.0127	-0.0140	-0.0141	-0.0141
7	-0.0106	-0.0122	-0.0123	-0.0123
8	-0.0082	-0.0101	-0.0103	-0.0103
9	-0.0058	-0.0081	-0.0084	-0.0084
10	-0.0038	-0.0064	-0.0066	-0.0066
11	-0.0020	-0.0049	-0.0052	-0.0052
12	-0.0006	-0.0037	-0.0040	-0.0040
13	0.0005	-0.0027	-0.0031	-0.0031
14	0.0013	-0.0019	-0.0023	-0.0023
15	0.0017	-0.0013	-0.0017	-0.0017
16	0.0019	-0.0008	-0.0013	-0.0013
17	0.0018	-0.0005	-0.0009	-0.0009
18	0.0015	-0.0003	-0.0006	-0.0006
19	0.0010	-0.0001	-0.0003	-0.0003
20	0.0005	-0.0000	-0.0002	-0.0002

($G_l/G_a=1.0, G_a/G_l=0.2, h/r_1=0.01, N=20$)

表2 N の $\tau_0(r)$ に及ぼす影響

r/r_1	$\tau_0(r)/\tau^*$		
	0.5	0.8	0.95
5	0.394	0.713	1.080
10	0.384	0.705	1.068
20	0.386	0.708	1.073
30	0.386	0.708	1.073

($G_l/G_a=1.0, G_a/G_l=0.2, h/r_1=0.01, M=500$)

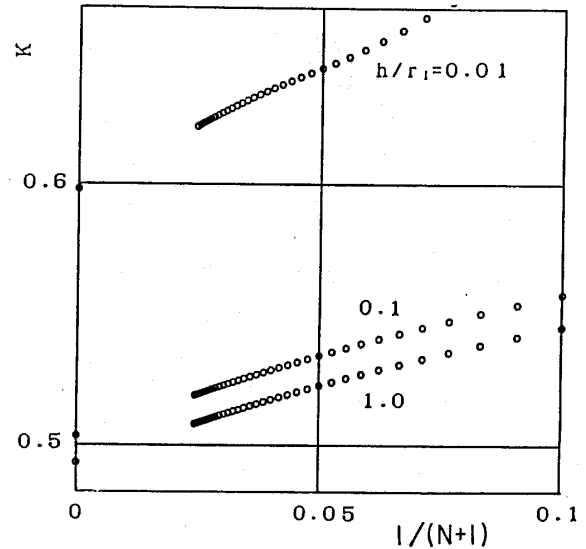


図2 K と $1/(N+1)$ の関係

($G_l/G_a=1.0, G_a/G_l=0.2, \lambda=0.1864, r_l/r_a=0.5$)

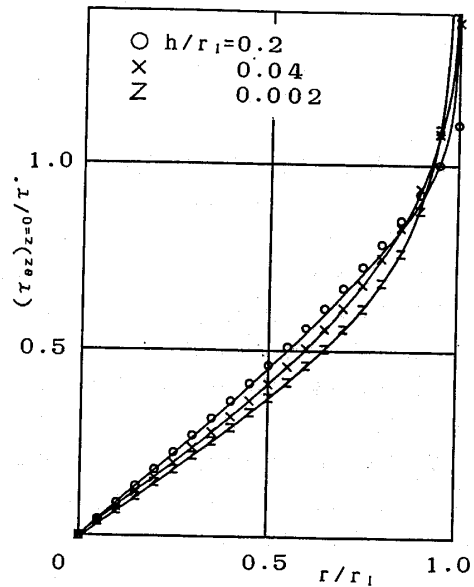


図3 h と $(\tau_{0z})_{z=0}$ の半径方向分布との関係

($G_l/G_a=1.0, G_a/G_l=0.2, \lambda=0.1864, r_l/r_a=0.5$)

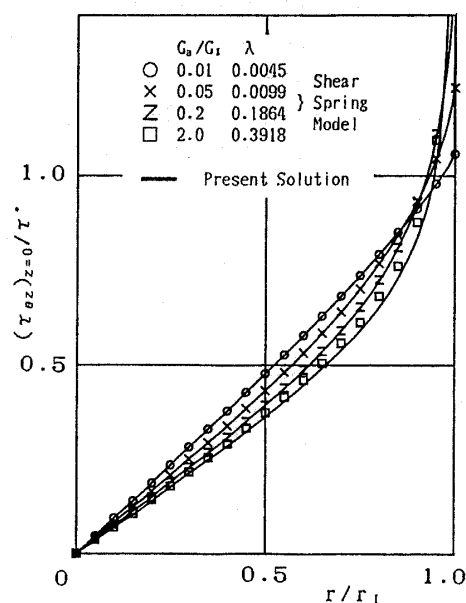


図4 G_a/G_1 と $(\tau_{\theta z})_{z=0}/\tau_0$ の半径方向分布との関係
($h/r_1=0.02, G_1/G_2=1.0, r_1/r_2=0.5$)

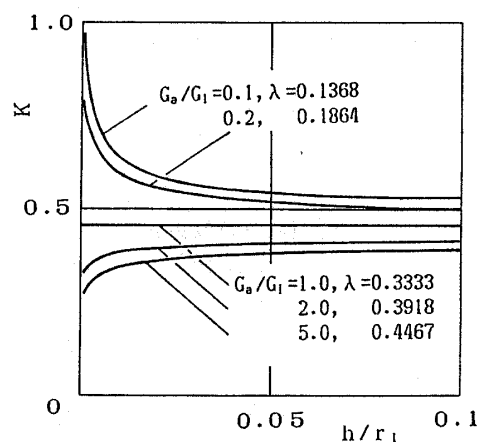


図5 接着層厚さ h と K との関係
($G_1/G_2=1.0, r_1/r_2=0.5$)

るから、 $h \rightarrow 0$ で、 $K \rightarrow \infty$ となり、逆に、 $G_a > G_1$ のときは、 $\lambda > \lambda_0$ であるから、 $h \rightarrow 0$ で、 $K \rightarrow 0$ となる。従って、 $G_a < G_1$ の場合は接着層を厚く、逆に $G_a > G_1$ の場合は薄くした方が角部近傍の応力値は小さくなる。また、図5より $G_a/G_1 < 1$ の場合には、 $h/r_1 > 0.05$ では K の値はほぼ一定値を取っており、これ以上接着層が厚い場合には、角部近傍の応力値におよぼす接着層厚さの影響はほとんどなくなることがわかる。

図6は G_a/G_1 と K の関係を種々の G_a/G_2 と h/r_1 に対して示してある。 G_a/G_2 が一定であるから、 G_a/G_1 を大きくすることは、接着層と棒IIの材質は変えずに、

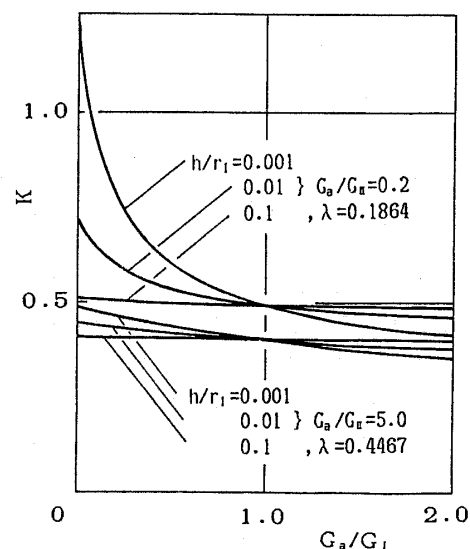


図6 棒Iの材質と K との関係 ($r_1/r_2=0.5$)

棒Iの材質を柔らかくすることに相当する。各グラフとも、 G_a/G_1 が増加するに従い K の値は小さくなっていることから、棒IIと接着層の材質が決まっている場合は、棒Iが柔らかい方が角部近傍の応力値は小さくなることがわかる。

6. 結 言

接着接合棒のねじり問題を、接着層を弾性体として級数解法による解析を行い、角部を中心とする極座標系を用いて、角部近傍のせん断応力値を応力の特異項のみを抜き出して表した。そして、応力分布を明らかにするとともに、この特異項の係数におよぼす接着層と両棒の材質および接着層厚さの影響を明らかにした。また、接着層をばねでモデル化した結果との比較も行った。得られた結果をまとめると次のようになる。

- (1) 応力分布は接着層の横弾性係数が小さく厚さが薄いほど、接着層をばねでモデル化した結果に近づく。
- (2) 棒Iより接着層が柔らかい場合は接着層を厚く、逆に、棒Iより接着層が硬い場合は接着層を薄くした方が角部近傍の応力値は小さくなる。

参考文献

- (1) Erdogan, F. and Ratwani, M., J. Compos. Mater., 5(1971), 378.
- (2) 辻ほか3名, 機論(A編), 51-463(1985), 919.
- (3) Keer, L.M. and Freeman, N.J., Trans. ASME, Ser. E, 92-4(1970), 959.
- (4) 辻, 東京工業大学学位論文, (昭61), 48.

討 論

〔質問〕 長谷川 久夫〔明治大学工学部〕

(1) 前報を発展させ、より厳密な接着層モデルの理論を導入したご研究、興味深く拝読した。貴論文で採用された係数 K の意味がいまひとつはっきりしないが、 K は何を表しているのか。

(2) $r_1/r_2=0.5$ の場合に $z=0$ の断面を考察されておられるが、このときのほうが $r_1/r_2=1.0$ (太さが変わらない) のときに比べて常に応力は高くなるのか ($z=h$ の接着面より $z=0$ の接着面の考察が重要だという理論的根拠)。

〔回答〕 (1) 明確な K の定義を示さなかったことをお詫びする。以下に、係数 K の定義を示す。

$$\lim_{r \rightarrow r_1=0} \frac{(\tau_{\theta z})_{z=0}}{r^{\lambda}} \left(1 - \frac{r}{r_1}\right)^{\lambda} = K$$

ここで、 $\lambda=1/2$ の場合は、応力拡大係数の定義と同様なものとなる。

(2) 軸対称棒のねじり問題の場合、棒の材質が軸方向に不連続に変化しても、棒の断面形状が連続に変化している場合は応力の特異性は生じない。このことから、 $z=h$, $r=r_1$ 近傍の応力値に比べ、応力特異性を生じる $z=h$, $r=r_1$ 近傍の応力値は常に大きくなる。ただし、横断面の合トルクは常に一定であるため、棒の中心部の応力値は、 $z=h$ 断面上のせん断応力のほうが、 $z=0$ 断面上のせん断応力値より大きくなる。