

539.377.01

帯状熱源による複合無限円柱の非定常熱応力\*

野田直剛\*\*, 竹内洋一郎\*\*\*, 高岸正春\*\*\*\*

1. 緒言

近年, 機械, 構造物の大規模化, 高性能化に伴い, それらに生じる熱応力は重要な問題となってきた. そのため, 熱間圧延用ロールなどの設計において, 熱応力を考慮しなければならなくなってきた. 従来, ロールなどは単層体として熱応力解析がなされてきたが<sup>(1)(2)</sup>, 実際の圧延用ロールなどは中心部と表面近傍の組成が異なり, 複合材として解析しなければならない. 小泉・谷脇<sup>(3)</sup>は表面温度が規定された同心二層円柱の熱応力を二次元問題として解析し, 武井<sup>(4)</sup>はクラッド円筒の熱応力を二次元問題として解析している. しかし, ロールなどは三次元問題であるので, 本研究では異種材料よりなる内半径  $a$ , 外半径  $b$  の同心二層の複合無限円柱に幅  $2c$  の帯状熱源が, 表面上でステップ状に作用する場合の非定常熱応力問題を三次元問題として解析した. 解析にはフーリエ余弦変換とラプラス変換を用い, 各熱応力成分を無限積分と無限級数の形で表した. なお, 材料の物性値は温度, 時間に無関係とした.

2. 温度解析

図1に示すような内半径  $a$ , 外半径  $b$  の複合無限円柱の外表面に幅  $2c$  の帯状熱源が作用する温度分布について考える. 内材 I と外材 II に対する物理量に, それぞれ添字 1, 2 を付けて区別する. 熱伝導方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial t} &= \kappa_1 \nabla^2 T & (0 \leq r \leq a) \\ \frac{\partial T_2}{\partial t} &= \kappa_2 \nabla^2 T_2 & (a \leq r \leq b) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1)$$

ただし,  $T_1, T_2$  は温度,  $\kappa_1, \kappa_2$  は温度伝導率であり,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

\* 昭和50年7月22日 東海支部岐阜地方講演会において講演, 原稿受付 昭和50年10月31日.  
\*\* 正員, 静岡大学工学部(浜松市城北3-5-1).  
\*\*\* 正員, 大阪府立大学工学部.  
\*\*\*\* 学生員, 静岡大学大学院.

初期条件は

$$t=0 \text{ で } T_1=T_2=T_0 \dots\dots\dots(2)$$

ただし,  $T_0$  は一定温度である.

境界条件として, 外表面の  $|z| < c$  に単位面積, 単位時間当たり  $Q_0$  の熱源が作用し, また外表面から熱放散があるとする.

$$\left. \begin{aligned} r=a \text{ で} \\ T_1=T_2, \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} \\ r=b \text{ で} \\ \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} + \alpha_0(T_2-T_0) = Q_0 H(t) H(c-|z|) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

ただし,  $\lambda_1, \lambda_2$  は熱伝導率,  $\alpha_0$  は熱伝達率,  $H(t)$  はヘビサイドのステップ関数である.

ここで, 無次元量

$$\left. \begin{aligned} \rho = \frac{r}{a}, \quad \rho_0 = \frac{b}{a}, \quad \zeta = \frac{z}{a}, \quad \zeta_0 = \frac{c}{a} \\ h_1 = \frac{\alpha_0 a}{\lambda_1}, \quad h_2 = \frac{\alpha_0 a}{\lambda_2}, \quad \tau = \frac{\kappa_2 t}{a^2} \\ \bar{T}_1 = \frac{\lambda_2(T_1-T_0)}{Q_0 a}, \quad \bar{T}_2 = \frac{\lambda_2(T_2-T_0)}{Q_0 a} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4)$$

を導入すると, 式(1)から(3)は, 基礎式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial \tau} &= \kappa \left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) \bar{T}_1 \\ \left( \kappa = \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \right) \\ \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial \tau} &= \left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) \bar{T}_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5)$$

初期条件

$$\tau=0 \text{ で } \bar{T}_1=\bar{T}_2=0 \dots\dots\dots(6)$$

境界条件

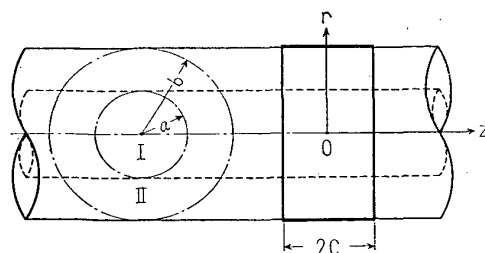


図1 帯状熱源を有する複合無限円柱

$$\left. \begin{aligned} \rho=1 \text{ で} \\ \bar{T}_1 = \bar{T}_2, \quad \lambda \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial \rho} = \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial \rho}, \quad \left( \lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{h_2}{h_1} \right) \\ \rho = \rho_0 \text{ で} \\ \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial \rho} + h_2 \bar{T}_2 = H(\tau) H(\zeta_0 - |\zeta|) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

となる。

次に、

$$\bar{T}(\rho, p, \tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \bar{T}(\rho, \zeta, \tau) \cos p\zeta d\zeta \dots\dots\dots (8)$$

で表されるフーリエ余弦変換と

$$\bar{T}^*(\rho, p, s) = \int_0^\infty \bar{T}(\rho, p, \tau) e^{-s\tau} d\tau \dots\dots\dots (9)$$

で表されるラプラス変換を導入する。式 (6) を考慮し

て、式 (5) と (7) をフーリエ余弦変換とラプラス変換を行えば、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{T}_1^*}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{T}_1^*}{\partial \rho} - \left( p^2 + \frac{s}{\kappa} \right) \bar{T}_1^* = 0 \\ \frac{\partial^2 \bar{T}_2^*}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{T}_2^*}{\partial \rho} - (p^2 + s) \bar{T}_2^* = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \rho=1 \text{ で} \\ \bar{T}_1^* = \bar{T}_2^*, \quad \lambda \frac{\partial \bar{T}_1^*}{\partial \rho} = \frac{\partial \bar{T}_2^*}{\partial \rho} \\ \rho = \rho_0 \text{ で} \\ \frac{\partial \bar{T}_2^*}{\partial \rho} + h_2 \bar{T}_2^* = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (ps)^{-1} \sin p\zeta_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

式 (11) を満足するように、式 (10) を解くと

$$\bar{T}_1^* = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{h_1 \sin p\zeta_0}{psD} I_0(\beta_1 \rho) \dots\dots\dots (12)$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_2^* = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin p\zeta_0}{psD} [h_2 \beta_1 I_1(\beta_1) \{I_0(\beta_2 \rho) K_0(\beta_2) - I_0(\beta_2) K_0(\beta_2 \rho)\} \\ + h_1 \beta_2 I_0(\beta_1) \{I_0(\beta_2 \rho) K_1(\beta_2) + I_1(\beta_2) K_0(\beta_2 \rho)\}] \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

ただし、  $\beta_1 = \sqrt{p^2 + \frac{s}{\kappa}}$ ,  $\beta_2 = \sqrt{p^2 + s}$

$$\begin{aligned} D = h_1 \beta_1 \beta_2 I_0(\beta_1) \{I_1(\beta_2 \rho_0) K_1(\beta_2) - I_1(\beta_2) K_1(\beta_2 \rho_0)\} \\ + h_2 \beta_1 \beta_2 I_1(\beta_1) \{I_1(\beta_2 \rho_0) K_0(\beta_2) + I_0(\beta_2) K_1(\beta_2 \rho_0)\} + h_1 h_2 \beta_2 I_0(\beta_1) \{I_0(\beta_2 \rho_0) K_1(\beta_2) \\ + I_1(\beta_2) K_0(\beta_2 \rho_0)\} + h_2 h_2 \beta_1 I_1(\beta_1) \{I_0(\beta_2 \rho_0) K_0(\beta_2) - I_0(\beta_2) K_0(\beta_2 \rho_0)\} \end{aligned}$$

$I_n(\rho)$ ,  $K_n(\rho)$  は  $n$  次の変形ベッセル関数である。

式 (12) と式 (13) をラプラス逆変換すれば†

$$\bar{T}_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin p\zeta_0}{p} \left[ \frac{h_1 I_0(p\rho)}{pU} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^\infty \frac{h_1}{(\mu_n^2 + p^2)} \frac{J_0(\mu_n \rho)}{V_n} e^{-(\mu_n^2 + p^2)\tau} \right] \dots\dots\dots (14)$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin p\zeta_0}{p} \left[ \frac{1}{U} [h_1 I_0(p) \{I_0(p\rho) K_1(p) + I_1(p) K_0(p\rho)\} \right. \\ + h_2 I_1(p) \{I_0(p\rho) K_0(p) - I_0(p) K_0(p\rho)\}] - \sum_{n=1}^\infty \frac{2\mu_n}{(\mu_n^2 + p^2) V_n} [h_1 J_0(\mu_n) \{J_1(\mu_n) Y_0(\mu_n \rho) \\ - J_0(\mu_n \rho) Y_1(\mu_n)\} + h_2 J_1(\mu_n) \{J_0(\mu_n \rho) Y_0(\mu_n) - J_0(\mu_n) Y_0(\mu_n \rho)\}] e^{-(\mu_n^2 + p^2)\tau} \left. \right] \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

ただし、 $J_n(\rho)$ ,  $Y_n(\rho)$  は  $n$  次のベッセル関数で、

$$\begin{aligned} U = h_1 p I_0(p) \{I_1(p\rho_0) K_1(p) - I_1(p) K_1(p\rho_0)\} + h_2 p I_1(p) \{I_1(p\rho_0) K_0(p) + I_0(p) K_1(p\rho_0)\} \\ + h_1 h_2 I_0(p) \{I_0(p\rho_0) K_1(p) + I_1(p) K_0(p\rho_0)\} + h_2^2 I_1(p) \{I_0(p\rho_0) K_0(p) - I_0(p) K_0(p\rho_0)\} \\ V_n = h_1 [\rho_0 \mu_n J_0(\mu_n) \{J_1(\mu_n) Y_0(\mu_n \rho_0) - J_0(\mu_n \rho_0) Y_1(\mu_n)\} + \mu_n J_0(\mu_n) \{J_0(\mu_n) Y_1(\mu_n \rho_0) \\ - J_1(\mu_n \rho_0) Y_0(\mu_n)\} - \mu_n J_1(\mu_n) \{J_1(\mu_n) Y_1(\mu_n \rho_0) - J_1(\mu_n \rho_0) Y_1(\mu_n)\}] \\ - h_2 [\rho_0 \mu_n J_1(\mu_n) \{J_0(\mu_n) Y_0(\mu_n \rho_0) - J_0(\mu_n \rho_0) Y_0(\mu_n)\} + \mu_n J_0(\mu_n) \{J_0(\mu_n) Y_1(\mu_n \rho_0) \\ - J_1(\mu_n \rho_0) Y_0(\mu_n)\} - \mu_n J_1(\mu_n) \{J_1(\mu_n) Y_1(\mu_n \rho_0) - J_1(\mu_n \rho_0) Y_1(\mu_n)\}] + h_1 h_2 [\rho_0 J_0(\mu_n) \{J_1(\mu_n) Y_1(\mu_n \rho_0) \\ - J_1(\mu_n \rho_0) Y_1(\mu_n)\} + J_1(\mu_n) \{J_1(\mu_n) Y_0(\mu_n \rho_0) - J_0(\mu_n \rho_0) Y_1(\mu_n)\} - J_0(\mu_n) \{J_0(\mu_n) Y_0(\mu_n \rho_0) \\ - J_0(\mu_n \rho_0) Y_0(\mu_n)\}] - h_2 h_2 [\rho_0 J_1(\mu_n) \{J_0(\mu_n) Y_1(\mu_n \rho_0) - J_1(\mu_n \rho_0) Y_0(\mu_n)\} \\ + J_1(\mu_n) \{J_1(\mu_n) Y_0(\mu_n \rho_0) - J_0(\mu_n \rho_0) Y_1(\mu_n)\} - J_0(\mu_n) \{J_0(\mu_n) Y_0(\mu_n \rho_0) - J_0(\mu_n \rho_0) Y_0(\mu_n)\}] \end{aligned}$$

$\mu_n$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) は次式を満足する  $\mu$  の第  $n$  番めの正根である。

$$\begin{aligned} h_1 \mu J_0(\mu) \{J_1(\mu \rho_0) Y_1(\mu) - J_1(\mu) Y_1(\mu \rho_0)\} + h_2 \mu J_1(\mu) \{J_0(\mu) Y_1(\mu \rho_0) - J_1(\mu \rho_0) Y_0(\mu)\} \\ + h_1 h_2 J_0(\mu) \{J_1(\mu) Y_0(\mu \rho_0) - J_0(\mu \rho_0) Y_1(\mu)\} + h_2^2 J_1(\mu) \{J_0(\mu \rho_0) Y_0(\mu) - J_0(\mu) Y_0(\mu \rho_0)\} = 0 \end{aligned}$$

よって、式 (14) と (15) をフーリエ余弦逆変換すると、求める温度分布は

† 数値計算の簡素化のため、 $\kappa=1$  すなわち  $\kappa_1=\kappa_2$  の場合について取扱う。温度伝導率が等しい材料については、文献 (5) を参照してください。

$$\bar{T}_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin p\zeta_0}{p} \cos p\zeta \left[ \frac{h_1 I_0(p\rho)}{pU} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^\infty \frac{h_1 J_0(\mu_n \rho)}{(\mu_n^2 + p^2) V_n} e^{-(\mu_n^2 + p^2)\tau} \right] dp \quad \dots\dots\dots(16)$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_2 = & \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin p\zeta_0}{p} \cos p\zeta \left\{ \frac{1}{U} [h_1 I_0(p) \{I_0(p\rho) K_1(p) + I_1(p) K_0(p\rho)\} + h_2 I_1(p) \{I_0(p\rho) K_0(p) \right. \\ & - I_0(p) K_0(p\rho)\}] - \sum_{n=1}^\infty \frac{2\mu_n}{(\mu_n^2 + p^2) V_n} [h_1 J_0(\mu_n) \{J_1(\mu_n) Y_0(\mu_n \rho) \\ & \left. - J_0(\mu_n \rho) Y_1(\mu_n)\} + h_2 J_1(\mu_n) \{J_0(\mu_n \rho) Y_0(\mu_n) - J_0(\mu_n) Y_0(\mu_n \rho)\}] e^{-(\mu_n^2 + p^2)\tau} \right\} dp \quad \dots\dots\dots(17) \end{aligned}$$

3. 応力解析

慣性項を省略した熱弾性運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 u_i + \frac{1}{1-2\nu_i} \frac{\partial e_i}{\partial r} - \frac{u_i}{r^2} &= 2 \frac{1+\nu_i}{1-2\nu_i} \alpha_i \frac{\partial T_i}{\partial r} \quad (i=1, 2) \\ \nabla^2 w_i + \frac{1}{1-2\nu_i} \frac{\partial e_i}{\partial z} &= 2 \frac{1+\nu_i}{1-2\nu_i} \alpha_i \frac{\partial T_i}{\partial z} \quad (i=1, 2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(18)$$

ここで,  $u_i$  は半径方向変位,  $w_i$  は軸方向変位,  $\nu_i$  はポアソン比,  $\alpha_i$  は線膨張係数,  $e_i = \partial u_i / \partial r + u_i / r + \partial w_i / \partial z$ . 変位成分  $u_i$  と  $w_i$  が

$$\left. \begin{aligned} u_i &= \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} - \frac{1}{1-2\nu_i} \frac{\partial^2 L_i}{\partial r \partial z} \quad (i=1, 2) \\ w_i &= \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} + \frac{1}{1-2\nu_i} \left\{ 2(1-\nu_i) \nabla^2 L_i - \frac{\partial^2 L_i}{\partial z^2} \right\} \quad (i=1, 2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(19)$$

で表される熱弾性変位ポテンシャル  $\Phi_i$  とラブの変位関数  $L_i$  を導入する.  $\Phi_i$  と  $L_i$  の基礎式は次式で表される.

$$\nabla^2 \Phi_i = \frac{1+\nu_i}{1-\nu_i} \alpha_i T_i \quad (i=1, 2) \quad \dots\dots\dots(20)$$

$$\nabla^4 L_i = 0 \quad (i=1, 2) \quad \dots\dots\dots(21)$$

各熱応力成分は  $\Phi_i$  と  $L_i$  を用いて

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr_i} &= 2G_i \left( \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial r^2} - \nabla^2 \Phi_i \right) + \frac{2G_i}{1-2\nu_i} \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu_i \nabla^2 L_i - \frac{\partial^2 L_i}{\partial r^2} \right) \quad (i=1, 2) \\ \sigma_{\theta\theta_i} &= 2G_i \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} - \nabla^2 \Phi_i \right) + \frac{2G_i}{1-2\nu_i} \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu_i \nabla^2 L_i - \frac{1}{r} \frac{\partial L_i}{\partial r} \right) \quad (i=1, 2) \\ \sigma_{zz_i} &= 2G_i \left( \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial z^2} - \nabla^2 \Phi_i \right) + \frac{2G_i}{1-2\nu_i} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (2-\nu_i) \nabla^2 L_i - \frac{\partial^2 L_i}{\partial z^2} \right\} \quad (i=1, 2) \\ \sigma_{rz_i} &= 2G_i \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial r \partial z} + \frac{2G_i}{1-2\nu_i} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ (1-\nu_i) \nabla^2 L_i - \frac{\partial^2 L_i}{\partial z^2} \right\} \quad (i=1, 2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(22)$$

と表される. ただし,  $G_i$  は横弾性係数である.

境界条件は次式で与えられる.

$$\rho = \rho_0 \quad \text{で} \quad \sigma_{rr_2} = 0 \quad \dots\dots\dots(23)$$

$$\rho = \rho_0 \quad \text{で} \quad \sigma_{rz_2} = 0 \quad \dots\dots\dots(24)$$

$$\rho = 1 \quad \text{で} \quad \sigma_{rr_1} = \sigma_{rr_2} \quad \dots\dots\dots(25)$$

$$\rho = 1 \quad \text{で} \quad \sigma_{rz_1} = \sigma_{rz_2} \quad \dots\dots\dots(26)$$

$$\rho = 1 \quad \text{で} \quad u_1 = u_2 \quad \dots\dots\dots(27)$$

$$\rho = 1 \quad \text{で} \quad w_1 = w_2 \quad \dots\dots\dots(28)$$

式 (16) と (17) を考慮し, 式 (20) の特解を求めると

$$\frac{\Phi_1}{a^2} = \frac{K_1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin p\zeta_0}{p} \cos p\zeta \left[ \frac{h_1 \rho I_1(p\rho)}{p^2 U} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^\infty \frac{2h_1 J_0(\mu_n \rho)}{(\mu_n^2 + p^2)^2 V_n} e^{-(\mu_n^2 + p^2)\tau} \right] dp \quad \dots\dots\dots(29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_2}{a^2} = & \frac{K_2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin p\zeta_0}{p} \cos p\zeta \left\{ \frac{\rho}{pU} [h_1 I_0(p) \{I_1(p\rho) K_1(p) - I_1(p) K_1(p\rho)\} \right. \\ & \left. + h_2 I_1(p) \{I_1(p\rho) K_0(p) + I_0(p) K_1(p\rho)\}] + 2 \sum_{n=1}^\infty \frac{2\mu_n}{(\mu_n^2 + p^2)^2 V_n} [h_1 J_0(\mu_n) \{J_1(\mu_n) Y_0(\mu_n \rho) \right. \\ & \left. - J_0(\mu_n \rho) Y_1(\mu_n)\} + h_2 J_1(\mu_n) \{J_0(\mu_n \rho) Y_0(\mu_n) - J_0(\mu_n) Y_0(\mu_n \rho)\}] e^{-(\mu_n^2 + p^2)\tau} \right\} dp \quad \dots\dots\dots(30) \end{aligned}$$

本問題に適する式 (21) の一般解は

$$\frac{L_1}{a^3} = \frac{K_1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin p\zeta_0}{p} \sin p\zeta \{C_1(p)I_0(p\rho) + C_2(p)\rho I_1(p\rho)\} dp \quad \dots\dots\dots(31)$$

$$\frac{L_2}{a^3} = \frac{K_2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin p\zeta_0}{p} \sin p\zeta \{C_3(p)I_0(p\rho) + C_4(p)\rho I_1(p\rho) + C_5(p)K_0(p\rho) + C_6(p)\rho K_1(p\rho)\} dp \quad \dots\dots\dots(32)$$

ただし,

$$K_i = \frac{1+\nu_i}{1-\nu_i} \alpha_i \frac{Q_0 a}{\lambda_2} \quad (i=1, 2)$$

で,  $C_1(p)$  から  $C_6(p)$  は未知係数である.

式 (29) から式 (32) を (22) に代入すると, 各応力成分と変位成分は次式となる.

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{rr_1}}{2G_1K_1} = & \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin p\zeta_0}{p} \cos p\zeta \left[ \frac{h_1 p \rho I_1(p\rho) - h_1 I_0(p\rho)}{pU} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^\infty \frac{2h_1}{(\mu_n^2 + p^2)^2 V_n} \right. \\ & \times \left\{ \frac{\mu_n}{\rho} J_1(\mu_n \rho) + p^2 J_0(\mu_n \rho) \right\} e^{-(\mu_n^2 + p^2)\tau} - \frac{p^2}{1-2\nu_1} \left\{ p I_0(p\rho) \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{\rho} I_1(p\rho) \right\} C_1(p) - p^2 \left\{ I_0(p\rho) + \frac{p\rho}{1-2\nu_1} I_1(p\rho) \right\} C_2(p) \right] dp \quad \dots\dots\dots(33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\theta\theta_1}}{2G_1K_1} = & \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin p\zeta_0}{p} \cos p\zeta \left[ -\frac{h_1 I_0(p\rho)}{pU} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^\infty \frac{2h_1}{(\mu_n^2 + p^2)^2 V_n} \left\{ (\mu_n^2 + p^2) J_0(\mu_n \rho) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\mu_n}{\rho} J_1(\mu_n \rho) \right\} e^{-(\mu_n^2 + p^2)\tau} - \frac{p^2}{1-2\nu_1} \frac{1}{\rho} I_1(p\rho) C_1(p) - p^2 I_0(p\rho) C_2(p) \right] dp \quad \dots\dots\dots(34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{zz_1}}{2G_1K_1} = & \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin p\zeta_0}{p} \cos p\zeta \left[ -\frac{2h_1 I_0(p\rho) + h_1 p \rho I_1(p\rho)}{\rho U} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^\infty \frac{2h_1 \mu_n^2 J_0(\mu_n \rho)}{(\mu_n^2 + p^2)^2 V_n} e^{-(\mu_n^2 + p^2)\tau} \right. \\ & \left. - \frac{p^3 I_0(p\rho)}{1-2\nu_1} C_1(p) + \frac{p^2}{1-2\nu_1} \{2(2-\nu_1)I_0(p\rho) + p\rho I_1(p\rho)\} C_2(p) \right] dp \quad \dots\dots\dots(35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{rz_1}}{2G_1K_1} = & \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin p\zeta_0}{p} \sin p\zeta \left[ -\frac{h_1 \rho I_0(p\rho)}{U} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^\infty \frac{2h_1 p \mu_n J_1(\mu_n \rho)}{(\mu_n^2 + p^2)^2 V_n} e^{-(\mu_n^2 + p^2)\tau} \right. \\ & \left. + \frac{p^3}{1-2\nu_1} I_1(p\rho) C_1(p) + \frac{p^2}{1-2\nu_1} \{2(1-\nu_1)I_1(p\rho) + p\rho I_0(p\rho)\} C_2(p) \right] dp \quad \dots\dots\dots(36) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{u_1}{aK_1} = & \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin p\zeta_0}{p} \cos p\zeta \left[ \frac{h_1 \rho I_0(p\rho)}{pU} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^\infty \frac{2\mu_n J_1(\mu_n \rho) h_1}{(\mu_n^2 + p^2)^2 V_n} e^{-(\mu_n^2 + p^2)\tau} \right. \\ & \left. - \frac{p^2}{1-2\nu_1} I_1(p\rho) C_1(p) - \frac{p^2}{1-2\nu_1} \rho I_0(p\rho) C_2(p) \right] dp \quad \dots\dots\dots(37) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{w_1}{aK_1} = & \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin p\zeta_0}{p} \sin p\zeta \left[ -\frac{h_1 \rho I_1(p\rho)}{pU} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^\infty \frac{2p J_0(\mu_n \rho) h_1}{(\mu_n^2 + p^2)^2 V_n} e^{-(\mu_n^2 + p^2)\tau} \right. \\ & \left. + \frac{p^2 I_0(p\rho)}{1-2\nu_1} C_1(p) + \frac{p}{1-2\nu_1} \{4(1-\nu_1)I_0(p\rho) + p\rho I_1(p\rho)\} C_2(p) \right] dp \quad \dots\dots\dots(38) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{rr_2}}{2G_2K_2} = & \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin p\zeta_0}{p} \cos p\zeta \left[ \frac{1}{U} \{h_1 I_0(p) [p\rho \{I_1(p\rho)K_1(p) - I_1(p)K_1(p\rho)\} \right. \right. \\ & \left. \left. - \{I_0(p\rho)K_1(p) + I_1(p)K_0(p\rho)\}] + h_2 I_1(p) [p\rho \{I_1(p\rho)K_0(p) + I_0(p)K_1(p\rho)\} \right. \right. \\ & \left. \left. - \{I_0(p\rho)K_0(p) - I_0(p)K_0(p\rho)\}] \right] + 2 \sum_{n=1}^\infty \frac{2\mu_n}{(\mu_n^2 + p^2)^2 V_n} \left[ h_1 J_0(\mu_n) \{p^2 \{J_1(\mu_n)Y_0(\mu_n \rho) \right. \right. \\ & \left. \left. - J_0(\mu_n \rho)Y_1(\mu_n)\} + \frac{\mu_n}{\rho} \{J_1(\mu_n)Y_1(\mu_n \rho) - J_1(\mu_n \rho)Y_1(\mu_n)\} \right] + h_2 J_1(\mu_n) [p^2 \{J_0(\mu_n \rho)Y_0(\mu_n) \right. \\ & \left. - J_0(\mu_n)Y_0(\mu_n \rho)\} + \frac{\mu_n}{\rho} \{J_1(\mu_n \rho)Y_0(\mu_n) - J_0(\mu_n)Y_1(\mu_n \rho)\}] \right] e^{-(\mu_n^2 + p^2)\tau} \\ & + \frac{p^2}{1-2\nu_2} \left[ \left\{ -p I_0(p\rho) + \frac{1}{\rho} I_1(p\rho) \right\} C_3(p) - \{(1-2\nu_2)I_0(p\rho) + p\rho I_1(p\rho)\} C_4(p) \right. \\ & \left. - \left\{ p K_0(p\rho) + \frac{1}{\rho} K_1(p\rho) \right\} C_5(p) + \{(1-2\nu_2)K_0(p\rho) - p\rho K_1(p\rho)\} C_6(p) \right] dp \quad \dots\dots\dots(39) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\theta\theta_2}}{2G_2K_2} = & \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin p\zeta_0}{p} \cos p\zeta \left[ -\frac{1}{U} [h_1 I_0(p) \{I_0(p\rho)K_1(p) + I_1(p)K_0(p\rho)\} + h_2 I_1(p) \{I_0(p\rho)K_0(p) \right. \\ & \left. - I_0(p)K_0(p\rho)\}] + 2 \sum_{n=1}^\infty \frac{2\mu_n}{(\mu_n^2 + p^2)^2 V_n} [h_1 J_0(\mu_n) \{(\mu_n^2 + p^2) \{J_1(\mu_n)Y_0(\mu_n\rho) - J_0(\mu_n\rho)Y_1(\mu_n)\} \right. \\ & \left. + \frac{\mu_n}{\rho} \{J_1(\mu_n\rho)Y_1(\mu_n) - J_1(\mu_n)Y_1(\mu_n\rho)\}] + h_2 J_1(\mu_n) \{(\mu_n^2 + p^2) \{J_0(\mu_n\rho)Y_0(\mu_n) \right. \\ & \left. - J_0(\mu_n)Y_0(\mu_n\rho)\} + \frac{\mu_n}{\rho} \{J_0(\mu_n)Y_1(\mu_n\rho) - J_1(\mu_n\rho)Y_0(\mu_n)\}] \right] e^{-(\mu_n^2 + p^2)\tau} \\ & \left. + \frac{p^2}{1-2\nu_2} \left\{ -\frac{I_1(p\rho)}{\rho} C_3(p) - (1-2\nu_2)I_0(p\rho)C_4(p) + \frac{K_1(p\rho)}{\rho} C_5(p) + (1-2\nu_2)K_0(p\rho)C_6(p) \right\} \right] dp \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(40)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{z z_2}}{2G_2K_2} = & \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin p\zeta_0}{p} \cos p\zeta \left[ -\frac{1}{U} [h_1 I_0(p) \{p\rho \{I_1(p\rho)K_1(p) - I_1(p)K_1(p\rho)\} + 2 \{I_0(p\rho)K_1(p) \right. \\ & \left. + I_1(p)K_0(p\rho)\}] + h_2 I_1(p) \{p\rho \{I_1(p\rho)K_0(p) + I_0(p)K_1(p\rho)\} + 2 \{I_0(p\rho)K_0(p) - I_0(p)K_0(p\rho)\}] \right] \\ & \left. + 2 \sum_{n=1}^\infty \frac{2\mu_n^3}{(\mu_n^2 + p^2)^2 V_n} [h_1 J_0(\mu_n) \{J_1(\mu_n)Y_0(\mu_n\rho) - J_0(\mu_n\rho)Y_1(\mu_n)\} \right. \\ & \left. + h_2 J_1(\mu_n) \{J_0(\mu_n\rho)Y_0(\mu_n) - J_0(\mu_n)Y_0(\mu_n\rho)\}] \right] e^{-(\mu_n^2 + p^2)\tau} + \frac{p^2}{1-2\nu_2} [pI_0(p\rho)C_3(p) \\ & \left. + \{2(2-\nu_2)I_0(p\rho) + p\rho I_1(p\rho)\}C_4(p) + pK_0(p\rho)C_5(p) - \{2(2-\nu_2)K_0(p\rho) - p\rho K_1(p\rho)\}C_6(p)] \right] dp \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(41)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{r z_2}}{2G_2K_2} = & \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin p\zeta_0}{p} \sin p\zeta \left[ -\frac{p\rho}{U} [h_1 I_0(p) \{I_0(p\rho)K_1(p) + I_1(p)K_0(p\rho)\} + h_2 I_1(p) \{I_0(p\rho)K_0(p) \right. \\ & \left. - I_0(p)K_0(p\rho)\}] + 2 \sum_{n=1}^\infty \frac{2\mu_n^2 p}{(\mu_n^2 + p^2)^2 V_n} [h_1 J_0(\mu_n) \{J_1(\mu_n)Y_1(\mu_n\rho) - J_1(\mu_n\rho)Y_1(\mu_n)\} \right. \\ & \left. + h_2 J_1(\mu_n) \{J_1(\mu_n\rho)Y_0(\mu_n) - J_0(\mu_n)Y_1(\mu_n\rho)\}] \right] e^{-(\mu_n^2 + p^2)\tau} + \frac{p^2}{1-2\nu_2} [pI_1(p\rho)C_3(p) \\ & \left. + \{2(1-\nu_2)I_1(p\rho) + p\rho I_0(p\rho)\}C_4(p) - pK_1(p\rho)C_5(p) + \{2(1-\nu_2)K_1(p\rho) - p\rho K_0(p\rho)\}C_6(p)] \right] dp \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(42)$$

$$\begin{aligned} \frac{u_2}{aK_2} = & \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin p\zeta_0}{p} \cos p\zeta \left[ \frac{\rho}{U} [h_1 I_0(p) \{I_0(p\rho)K_1(p) + I_1(p)K_0(p\rho)\} + h_2 I_1(p) \{I_0(p\rho)K_0(p) \right. \\ & \left. - I_0(p)K_0(p\rho)\}] - 2 \sum_{n=1}^\infty \frac{2\mu_n^2}{(\mu_n^2 + p^2)^2 V_n} [h_1 J_0(\mu_n) \{J_1(\mu_n)Y_1(\mu_n\rho) - J_1(\mu_n\rho)Y_1(\mu_n)\} \right. \\ & \left. + h_2 J_1(\mu_n) \{J_1(\mu_n\rho)Y_0(\mu_n) - J_0(\mu_n)Y_1(\mu_n\rho)\}] \right] e^{-(\mu_n^2 + p^2)\tau} - \frac{p}{1-2\nu_2} [pI_1(p\rho)C_3(p) \\ & \left. + p\rho I_0(p\rho)C_4(p) - pK_1(p\rho)C_5(p) - p\rho K_0(p\rho)C_6(p)] \right] dp \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(43)$$

$$\begin{aligned} \frac{w_2}{aK_2} = & \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin p\zeta_0}{p} \sin p\zeta \left[ -\frac{\rho}{U} [h_1 I_0(p) \{I_1(p\rho)K_1(p) - I_1(p)K_1(p\rho)\} + h_2 I_1(p) \{I_1(p\rho)K_0(p) \right. \\ & \left. + I_0(p)K_1(p\rho)\}] - 2 \sum_{n=1}^\infty \frac{2\mu_n p}{(\mu_n^2 + p^2)^2 V_n} [h_1 J_0(\mu_n) \{J_1(\mu_n)Y_0(\mu_n\rho) - J_0(\mu_n\rho)Y_1(\mu_n)\} \right. \\ & \left. + h_2 J_1(\mu_n) \{J_0(\mu_n\rho)Y_0(\mu_n) - J_0(\mu_n)Y_0(\mu_n\rho)\}] \right] e^{-(\mu_n^2 + p^2)\tau} + \frac{p}{1-2\nu_2} [pI_0(p\rho)C_3(p) \\ & \left. + \{4(1-\nu_2)I_0(p\rho) + p\rho I_1(p\rho)\}C_4(p) + pK_0(p\rho)C_5(p) - \{4(1-\nu_2)K_0(p\rho) - p\rho K_1(p\rho)\}C_6(p)] \right] dp \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(44)$$

式 (39) を式 (23) に, 式 (42) を式 (24) に, 式 (33) と (39) を式 (25) に, 式 (36) と (42) を式 (26) に, 式 (37) と (43) を式 (27) に, 式 (38) と (44) を式 (28) に代入すると, 未知係数  $C_1(p) \sim C_6(p)$  を決定する次式を得る.

$$\begin{aligned} & \left\{ -pI_0(p\rho_0) + \frac{I_1(p\rho_0)}{\rho_0} \right\} C_3(p) - \{(1-2\nu_2)I_0(p\rho_0) + p\rho_0 I_1(p\rho_0)\} C_4(p) - \left\{ pK_0(p\rho_0) + \frac{K_1(p\rho_0)}{\rho_0} \right\} C_5(p) \\ & + \{(1-2\nu_2)K_0(p\rho_0) - \rho_0 p K_1(p\rho_0)\} C_6(p) = -\frac{1-2\nu_2}{p^2 U} [h_1 I_0(p) \{p\rho_0 \{I_1(p\rho_0)K_1(p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -I_1(p)K_1(p\rho_0) - \{I_0(p\rho_0)K_1(p) + I_1(p)K_0(p\rho_0)\} + h_2I_1(p)[p\rho_0\{I_1(p\rho_0)K_0(p) + I_0(p)K_1(p\rho_0)\} \\
 & - \{I_0(p\rho_0)K_0(p) - I_0(p)K_0(p\rho_0)\}] - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\mu_n(1-2\nu_2)}{(\mu_n^2 + p^2)^2 V_n} \left[ h_1J_0(\mu_n) \{p^2\{J_1(\mu_n)Y_0(\mu_n\rho_0) \right. \\
 & - J_0(\mu_n\rho_0)Y_1(\mu_n)\} + \frac{\mu_n}{\rho_0} \{J_1(\mu_n)Y_1(\mu_n\rho_0) - J_1(\mu_n\rho_0)Y_1(\mu_n)\} + h_2J_1(\mu_n) \{p^2\{J_0(\mu_n\rho_0)Y_0(\mu_n) \\
 & - J_0(\mu_n)Y_0(\mu_n\rho_0)\} + \frac{\mu_n}{\rho_0} \{J_1(\mu_n\rho_0)Y_0(\mu_n) - J_0(\mu_n)Y_1(\mu_n\rho_0)\} \left. \right] e^{-(\mu_n^2 + p^2)\tau} \dots\dots\dots (45)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & pI_1(p\rho_0)C_3(p) + \{2(1-\nu_2)I_1(p\rho_0) + p\rho_0I_0(p\rho_0)\}C_4(p) - pK_1(p\rho_0)C_5(p) + \{2(1-\nu_2)K_1(p\rho_0) \\
 & - p\rho_0K_0(p\rho_0)\}C_6(p) = -\frac{\rho_0(1-2\nu_2)}{pU} [h_1I_0(p)\{I_0(p\rho_0)K_1(p) + I_1(p)K_0(p\rho_0)\} \\
 & + h_2I_1(p)\{I_0(p\rho_0)K_0(p) - I_0(p)K_0(p\rho_0)\}] - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^2(1-2\nu_2)}{p(\mu_n^2 + p^2)^2 V_n} [h_1J_0(\mu_n)\{J_1(\mu_n)Y_1(\mu_n\rho_0) \\
 & - J_1(\mu_n\rho_0)Y_1(\mu_n)\} + h_2J_1(\mu_n)\{J_1(\mu_n\rho_0)Y_0(\mu_n) - J_0(\mu_n)Y_1(\mu_n\rho_0)\}] e^{-(\mu_n^2 + p^2)\tau} \dots\dots\dots (46)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{G_1K_1}{1-2\nu_2} p^2\{pI_0(p) - I_1(p)\}C_1(p) - \frac{G_1K_1}{1-2\nu_2} p^2\{(1-2\nu_1)I_0(p) + pI_1(p)\}C_2(p) \\
 & + \frac{G_2K_2}{1-2\nu_2} p^2\{pI_0(p) - I_1(p)\}C_3(p) + \frac{G_2K_2}{1-2\nu_2} p^2\{(1-2\nu_2)I_0(p) + pI_1(p)\}C_4(p) \\
 & + \frac{G_2K_2}{1-2\nu_2} p^2\{pK_0(p) + K_1(p)\}C_5(p) - \frac{G_2K_2}{1-2\nu_2} p^2\{(1-2\nu_2)K_0(p) - pK_1(p)\}C_6(p) \\
 & = \frac{1}{U} \left[ -(G_2K_2 - G_1K_1) \frac{h_1}{p} I_0(p) + (G_2K_2h_2 - G_1K_1h_1) I_1(p) \right] + \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\mu_n^2 + p^2)^2 V_n} \{ (G_2K_2 \\
 & - G_1K_1) h_1 p^2 J_0(\mu_n) + (G_2K_2h_2 - G_1K_1h_1) \mu_n J_1(\mu_n) \} e^{-(\mu_n^2 + p^2)\tau} \dots\dots\dots (47)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{G_1K_1}{1-2\nu_1} p^3 I_1(p) C_1(p) - \frac{G_1K_1}{1-2\nu_1} p^2 \{2(1-\nu_1)I_1(p) + pI_0(p)\} C_2(p) \\
 & + \frac{G_2K_2}{1-2\nu_2} p^3 I_1(p) C_3(p) + \frac{G_2K_2}{1-2\nu_2} p^2 \{2(1-\nu_2)I_1(p) + pI_0(p)\} C_4(p) \\
 & - \frac{G_2K_2}{1-2\nu_2} p^3 K_1(p) C_5(p) + \frac{G_2K_2 p^2}{1-2\nu_2} \{2(1-\nu_2)K_1(p) - pK_0(p)\} C_6(p) \\
 & = (G_2K_2 - G_1K_1) \frac{h_1}{U} I_0(p) - \frac{4}{\pi} (G_2K_2h_2 - G_1K_1h_1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2p\mu_n}{(\mu_n^2 + p^2)^2 V_n} J_1(\mu_n) e^{-(\mu_n^2 + p^2)\tau} \dots\dots\dots (48)
 \end{aligned}$$

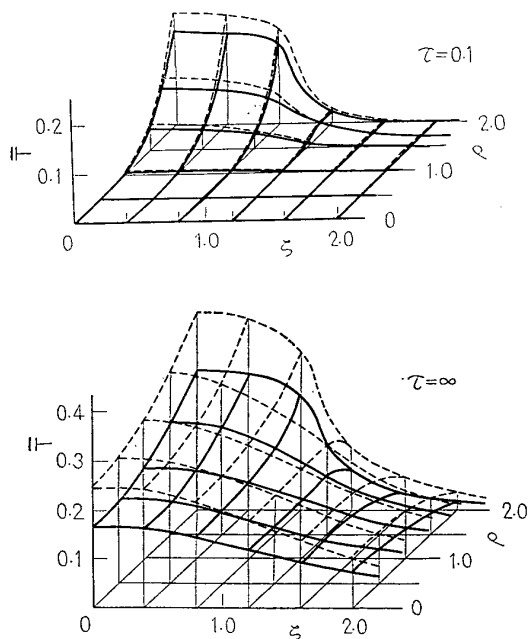


図 2 温度分布

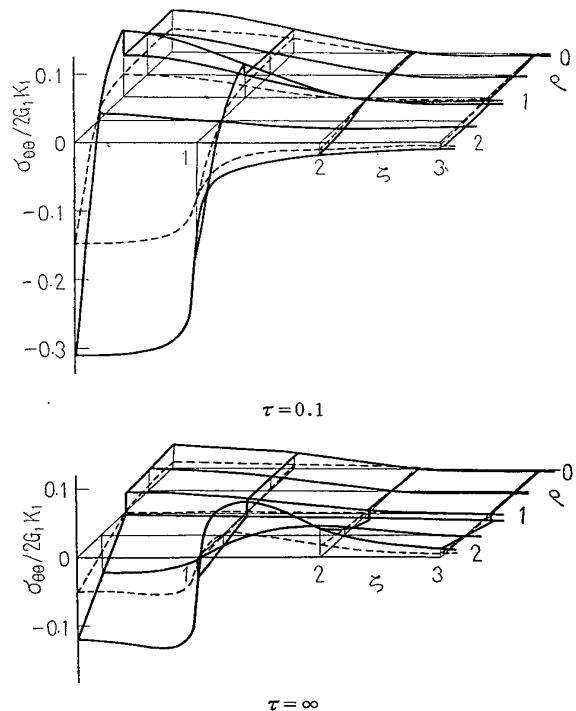


図 3 円周応力

$$\begin{aligned} & \frac{K_1 p^2}{1-2\nu_1} I_1(p) C_1(p) + \frac{K_1 p^2}{1-2\nu_1} I_0(p) C_2(p) - \frac{K_2 p^2}{1-2\nu_2} I_1(p) C_3(p) \\ & - \frac{K_2 p^2}{1-2\nu_2} I_0(p) C_4(p) + \frac{K_2 p^2}{1-2\nu_2} K_1(p) C_5(p) + \frac{K_2 p^2}{1-2\nu_2} K_0(p) C_6(p) \\ & = -(K_2 - K_1) \frac{h_1}{pU} I_0(p) + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\mu_n(K_2 h_2 - K_1 h_1)}{(\mu_n^2 + p^2)^2 V_n} J_1(\mu_n) e^{-(\mu_n^2 + p^2)\tau} \dots \dots \dots (49) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \frac{K_1 p^2}{1-2\nu_1} I_0(p) C_1(p) - \frac{K_1 p}{1-2\nu_1} \{4(1-\nu_1)I_0(p) + pI_1(p)\} C_2(p) + \frac{K_2 p^2}{1-2\nu_2} I_0(p) C_3(p) \\ & + \frac{K_2 p}{1-2\nu_2} \{4(1-\nu_2)I_0(p) + pI_1(p)\} C_4(p) + \frac{K_2 p^2}{1-2\nu_2} K_0(p) C_5(p) - \frac{K_2 p}{1-2\nu_2} \{4(1-\nu_2)K_0(p) \\ & - pK_1(p)\} C_6(p) = (K_2 h_2 - K_1 h_1) \frac{I_1(p)}{pU} + \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_1(K_2 - K_1)}{(\mu_n^2 + p^2)^2 V_n} p J_0(\mu_n) e^{-(\mu_n^2 + p^2)\tau} \dots \dots \dots (50) \end{aligned}$$

式(45)~(50)の6元連立一次方程式を解くことにより, 未知係数  $C_1(p) \sim C_6(p)$  は決定される. この係数を式(33)~(44)に代入することにより, 各熱応力成分と変位成分が決定される.

4. 数値計算結果と考察

数値計算例として, 内層材にはねずみ鉄を, 外層

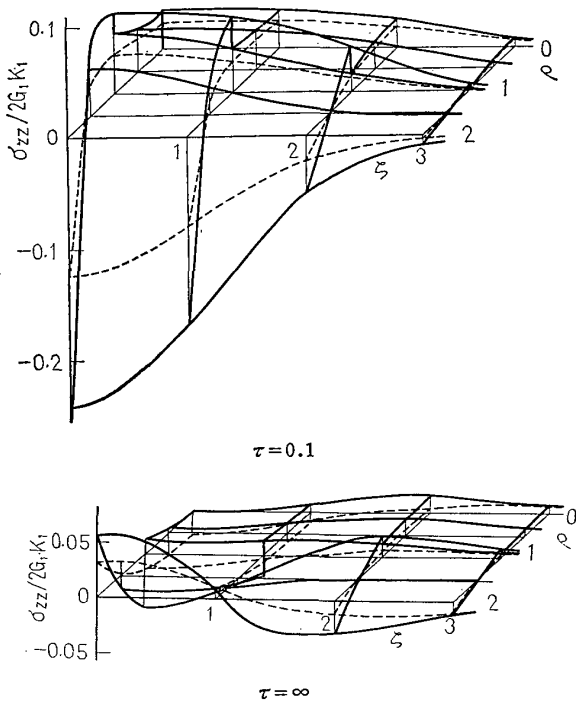


図4 軸応力

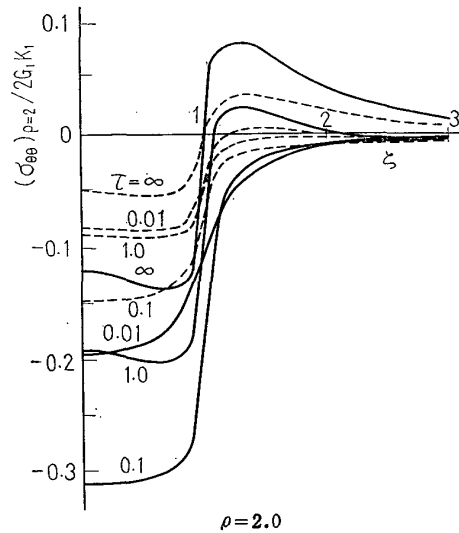


図6 円周応力(境界表面上)

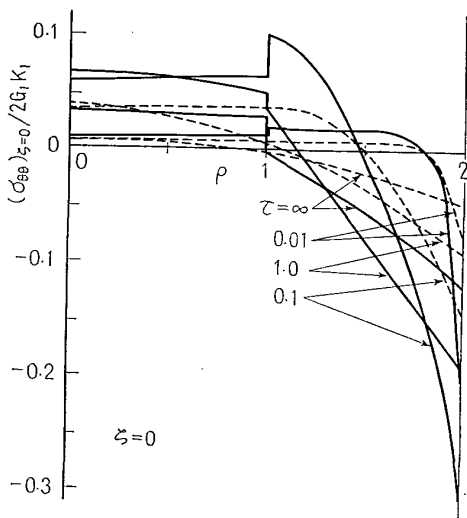


図5 円周応力(zeta=0面上)

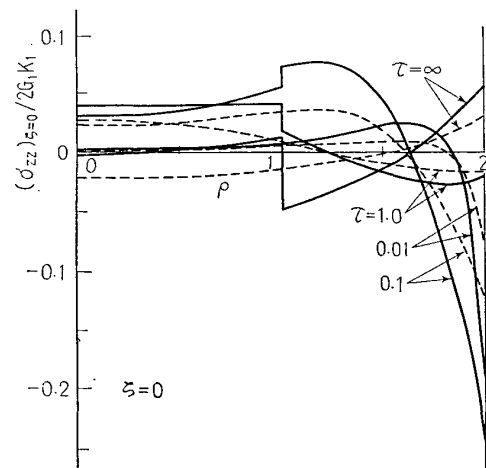


図7 軸応力(zeta=0面上)

材にはステンレス鋼を用い、内径と外径の比  $\rho_0$  を 2 の場合と 1.2 の場合を取扱った。そのときの物理量は

$$\nu_1=0.33, \quad \frac{\nu_2}{\nu_1}=0.75, \quad \frac{h_2}{h_1}=1.5, \quad h_2=2.0$$

$$\frac{G_2}{G_1}=2.8, \quad \frac{K_2}{K_1}=0.84, \quad \zeta_0=1$$

図 2 から 9 は  $\rho_0=2$  の場合に関係し、図 10 と 11 は  $\rho_0=1.2$  の場合に関する。また各図における破

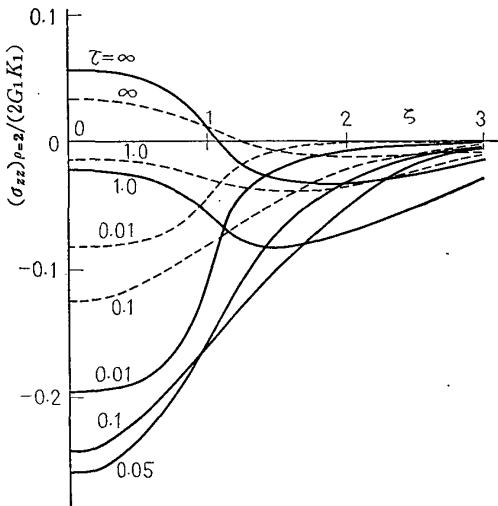


図 8 軸応力 (境界表面上)  
 $\rho=2.0$

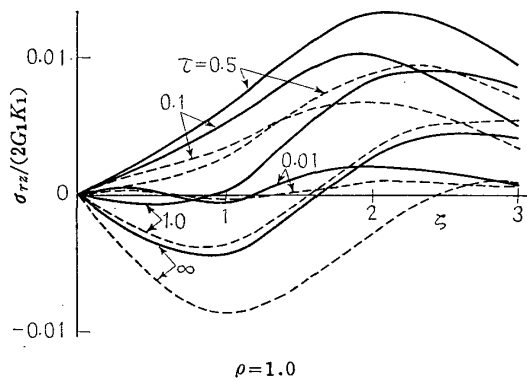


図 9 せん断応力 (接合部)  
 $\rho=1.0$

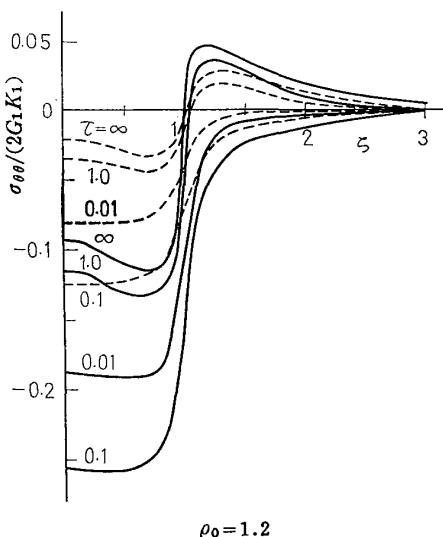


図 10 円周応力 (境界表面上)  
 $\rho_0=1.2$

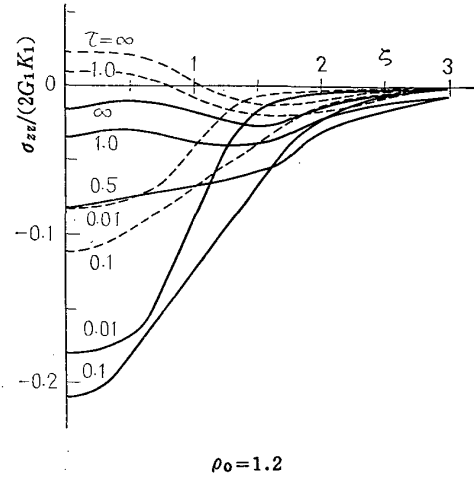


図 11 軸応力 (境界表面上)  
 $\rho_0=1.2$

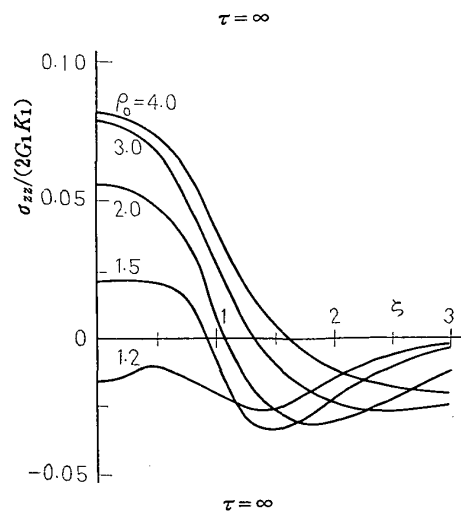
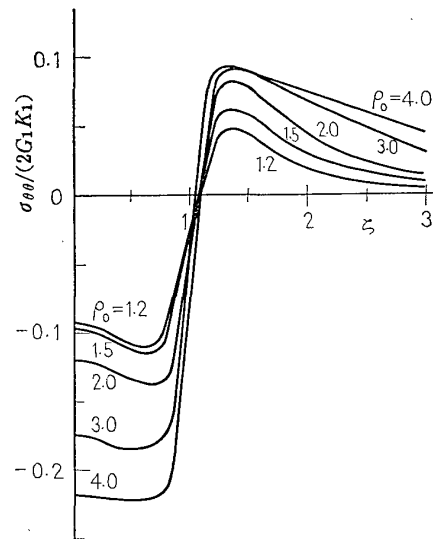


図 12 境界表面上の円周応力と軸応力  
 $\tau = \infty$



線は、ねずみ鉄の単層材とした場合の結果である。図2には無次元時間  $\tau=0.1$  と定常状態の温度分布を示す。図3には  $\tau=0.1$  と定常状態の円周応力を示す。熱源近傍で大きな圧縮応力が生じ、接合部で応力の不連続が生じるが、 $\zeta$  が3以上になると不連続は小さくなる。図4には  $\tau=0.1$  と定常状態の軸応力を示す。 $\tau=0.1$  では熱源近傍では大きな圧縮力を生じるが、定常状態では引張応力となる。図5には  $\zeta=0$  面上の円周応力を示し、図6には境界表面上の円周応力を示す。各時間の応力とも単層材とした場合の応力のほぼ2倍である。図7には  $\zeta=0$  面上の軸応力を示し、図8には境界表面上の軸応力を示す。熱源上の軸応力は時間の経過と共に大きな圧縮応力が生じ  $\tau=0.05$  付近で最大圧縮応力となり、さらに時間が経過するにつれ応力は減少し、定常状態で引張応力になる。図9には接合部のせん断応力を示す。

図10には  $\rho_0=1.2$  の場合の円周応力を示す。図11

には  $\rho_0=1.2$  の場合の軸応力を示す。各応力とも  $\rho_0=2$  の場合とほぼ同じ傾向であるが、相互の拘束が弱まるため、最大応力は  $\rho_0=2$  の場合より小さい。

図12には  $\rho_0=1.2, 1.5, 2, 3, 4$  の場合の境界表面上の円周応力と軸応力を示す。円周応力に対し、 $\rho_0$  が増加するにつれ、熱源上では圧縮応力が増加するが、その他のところでは引張応力が増加する。熱源上の軸応力は  $\rho_0$  が増加するにつれ、圧縮応力から引張応力に変化する。

## 文 献

- (1) 大西・ほか4名, 日立造船技報, 34-2 (昭48-8), 126; 34-2 (昭48-8), 135; 渡辺・ほか6名, 日立造船技報, 34-2 (昭48-8), 141.
- (2) Youngdahl, C.K. and Sternberg, E., *Trans. ASME, Ser. E*, 28-1 (1961-3), 25.
- (3) 小泉・谷脇, 機論, 33-248 (昭42-4), 522.
- (4) 武井, 機論, 41-348 (昭50-8), 2278.
- (5) Carslaw, H.S. and Jaeger, J.C., *Conduction of Heat in Solids*, (1959), 497, Oxford Univ. Press.

## 討 論

〔質問〕 相原民彦(東京都立工業高等専門学校)

(1) 応力の数値計算に必要な半無限区間の積分、無限級数のそれぞれの収束性および収束の方法はどのようなものか。

(2) 本報の内容は緒言にもあるように、三次元問題にあると思われるので、対応する二次元の場合と比較して、注目すべき数値計算結果があれば示していただきたい。

本報の解法はおおむね従来からの定石どおりと思われるが、今後この種の問題の解析、数値計算に参考となることがあればご教示願いたい。

〔回答〕 (1) 無限積分

$$\int_0^{\infty} f(p) dp \text{ は } \sum_{j=1}^m \int_{p_j}^{p_{j+1}} f(p) dp$$

とし、区間  $p_j \leq p \leq p_{j+1}$  に対してシンプソンの1/3則を用い、上限の  $m$  は上限を  $m$  とした場合と  $m+1$  とした場合を比較して、有効数字が3けた以上になるようにした。また無限級数  $\sum_{n=1}^{\infty}$  は  $\sum_{n=1}^l$  で打ち切り、有

効数字が3けた以上になるように上限  $l$  を決定した。そのため各応力成分の計算に対し、上限  $m, l$  は異なるが、時間が短いほど無次元半径  $\rho$  が大きいほど、 $m, l$  の値は大きくなる。応力成分が境界上で零でなければならぬ  $\sigma_{rr}$  と  $\sigma_{rz}$  は、境界上で  $10^{-8}$  のオーダーの値であるため、境界条件は満足していると考えられる。

(2) 本報に対応する二次元問題は、本報の熱源の幅を無限大に持っていった場合の平面ひずみ問題と考えられるが、解析例は見あたらないようである。対応する二次元問題と比較すると、三次元問題(本報)は軸方向に応力変化が生じるが、二次元問題では軸方向に応力は変化しない。熱源の幅が大きな場合の熱源の中心の位置の応力は、二次元問題の場合と比較的一致すると考えられる。

本報では複合材なので、解析が複雑になり、数値計算に時間がかかるので、(1)の収束性の問題を考えながら計算時間を短くするように工夫する必要があると思う。