

熱物性値が分布する物質の非定常温度応答* (傾斜機能材料の温度応答における近似解の有用性)

石黒達男*¹ 牧野敦*²
野田直剛*², 荒木信幸*²

Transient Temperature Response of Material with Distributed Properties (Usefulness of Approximate Solutions for the Temperature Response in FGM)

Tatsuo ISHIGURO, Atsushi MAKINO,
Naotake NODA and Nobuyuki ARAKI

Functionally gradient materials (FGM) with distributed properties have attracted special interest as advanced heat-shielding/structural materials in future space applications. The objective of the present study is to evaluate the validity and/or usefulness of the solution of the temperature rise in FGM, the front surface of which is subjected to pulse- or stepwise heating. Applicability of the approximate solution has been investigated by comparing it with an exact analytical solution for the FGM in which distributed thermophysical properties have certain profiles. When the FGM is composed of conventional solid materials, the appropriateness of the approximate solution for the FGM has been shown, inasmuch as the temperature response near the rear surface is concerned. The approximate solution is also compared with the solution for the multilayered material. Because of its simplicity and fair degree of agreement, the approximate solution is anticipated to be used for not only qualitative but also quantitative prediction of the temperature rise near the rear surface of the FGM, from the engineering point of view.

Key Words: Heat Conduction, Thermophysical properties, Composite Material, Thermal Diffusivity, Multilayered Material, Functionally Gradient Material, Pulsewise Heating Method, Stepwise Heating Method, Temperature Response

1. 緒 言

試料内部に物性値分布を持った多層材料や傾斜機能材料は、従来の均質材料に優る特性を付与することができるため、航空宇宙や電子機器の分野での使用が検討されている。特に、材料内に金属とセラミックスの組成分布を持つ傾斜機能材料については、宇宙往還機用の遮熱構造材料として注目されており、材料設計、材料創成、材料評価の各観点から研究が行われている。しかしながら、この傾斜機能材料が真に魅力ある遮熱構造材料として、広範な用途に供されるようになるためには、機械的物性値の評価のほか、熱伝導率をはじめとした熱物性値の評価が不可欠である。

高温下での遮熱性能評価については、パルス状加熱法やステップ状加熱法で熱拡散率を測定した後に、熱伝導率を算出することが検討されてはいるが、傾斜機能材料の非定常加熱による熱拡散率測定について、測定原理に立ち返って検討を行った研究は少ない。

本研究では、非定常加熱時の多層試料内温度応答の

解析解から導かれた傾斜機能材料内温度応答の近似解について、この解の妥当性および適用範囲の検討を行うことにより、傾斜機能材料の熱拡散率測定に関する知見を得ることを目的としている。

記 号

a : 熱拡散率

c : 比熱

Fo : フーリエ数 $= at/L^2$

f : 補正係数

L : 試料厚さ

l : 層の厚さ $l_i = z_{i+1} - z_i$

n : 多層試料の層の数

p : 熱拡散率の傾斜関数中の指数

Q : 単位面積当たりの熱流束

s : ラプラス変換の変数

t : 時間

V : 規格化された温度上昇

W : 熱流束

X : 混合割合

y : 変数

z : 距離

α : 熱浸透率の傾斜関数中の定数

* 平成4年5月27日 第29回日本伝熱シンポジウムにおいて講演、原稿受付 平成4年6月10日。

*¹ 学生員、静岡大学大学院 (〒432 浜松市城北3-5-1)。

*² 正員、静岡大学工学部。

$\alpha_{j,m} : \pm 1$

β : 熱浸透率の傾斜関数中の定数

γ : 特性方程式の正根

ε : 摂動項

ζ : 規格化された熱拡散時間

η : 熱拡散時間 $= l/\sqrt{a}$

η_L : 全熱拡散時間

Θ : θ のラプラス変換

θ : 温度上昇

Λ : 熱浸透率 $= \lambda/\sqrt{a}$

λ : 熱伝導率 $= \rho ca$

ρ : 密度

Φ : 補正項

χ : パラメータ

ω : パラメータ

下添字

F : 試料前面

i : 第 i 層

i/j : (第 i 層)/(第 j 層)

P : パルス状加熱

R : 試料背面

S : ステップ状加熱

I : 成分 I

II : 成分 II

上添字

* : 層内部

2. 多層試料の温度応答⁽¹⁾

多層試料(図1)の非定常温度応答の解析解は著者ら⁽¹⁾により導出されており、パルス状加熱の場合には

$$\theta_i(z,t) = \left(\frac{2^{i-1}Q}{\Lambda_i \eta_n} \right) \left(\frac{\sum_{j=i}^{i-1+2^{n-i}} \chi_j^*}{\sum_{j=1}^{2^{n-1}} \omega_j \chi_j} \right) \cdot V_P; \dots (1)$$

$$V_P = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\sum_{j=i}^{i-1+2^{n-i}} \chi_j^* \cos(\gamma_k \omega_j^*)}{\sum_{j=i}^{i-1+2^{n-i}} \chi_j^*} \right] \times \left[\frac{\left(\sum_{j=1}^{2^{n-1}} \omega_j \chi_j \right) e^{-(\gamma_k \omega_1)^2 Fo}}{\sum_{j=1}^{2^{n-1}} \omega_j \chi_j \cos(\gamma_k \omega_j)} \right]; \dots (2)$$

ステップ状加熱の場合には

$$\theta_i(z,t) = \left(\frac{2^{i-1}Q\eta_n^2}{\Lambda_i \eta_n} \right) \left(\frac{\sum_{j=i}^{i-1+2^{n-i}} \chi_j^*}{\sum_{j=1}^{2^{n-1}} \omega_j \chi_j} \right) \omega_1 \cdot V_S; \dots (3)$$

$$V_S = Fo - \frac{\sum_{j=1}^{2^{n-1}} \omega_j^3 \chi_j}{6\omega_1^2 \sum_{j=1}^{2^{n-1}} \omega_j \chi_j} + \frac{\sum_{j=i}^{i-1+2^{n-i}} \omega_j^{*2} \chi_j^*}{2\omega_1^2 \sum_{j=i}^{i-1+2^{n-i}} \chi_j^*} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\sum_{j=i}^{i-1+2^{n-i}} \chi_j^* \cos(\gamma_k \omega_j^*)}{\sum_{j=i}^{i-1+2^{n-i}} \chi_j^*} \right] \times \left[\frac{\left(\sum_{j=1}^{2^{n-1}} \omega_j \chi_j \right) e^{-(\gamma_k \omega_1)^2 Fo}}{(\gamma_k \omega_1)^2 \sum_{j=1}^{2^{n-1}} \omega_j \chi_j \cos(\gamma_k \omega_j)} \right] \dots (4)$$

となる。ここで

$$\chi_j = \prod_{m=1}^{n-1} (\Lambda_{m/m+1} + \alpha_{j,m} \alpha_{j,m+1}), \dots (5)$$

$$\omega_j = \sum_{m=1}^n \alpha_{j,m} \eta_{m/n}$$

$$\chi_j^* = \prod_{m=i}^{n-1} (\Lambda_{m/m+1} + \alpha_{j,m}^* \alpha_{j,m+1}^*) \dots (6)$$

$$\omega_j^* = \eta_{i/n}^* + \sum_{m=i+1}^n \alpha_{j,m}^* \eta_{m/n}$$

$$\Lambda_{i/n} = \Lambda_i / \Lambda_n, \Lambda_i = \lambda_i / \sqrt{a_i} \dots (7)$$

$$\eta_{i/n} = \eta_i / \eta_n, \eta_i = (z_{i+1} - z_i) / \sqrt{a_i} \dots (8)$$

$$\eta_{i/n}^* = \eta_i^* / \eta_n, \eta_i^* = (z_{i+1} - z) / \sqrt{a_i} \dots (9)$$

$$Fo = t / (\omega_1 \eta_n)^2 \dots (10)$$

なお、 Λ は熱浸透率、 η は熱拡散時間、 Fo はフーリエ数、 γ_k は特性方程式の k 番目の正根である。

$$\sum_{j=1}^{2^{n-1}} \chi_j \sin(\gamma \omega_j) = 0 \dots (11)$$

また、式(5)の $\alpha_{j,m}$ は $m \geq 2$ の場合に ± 1 のすべての組合せをとる。ただし $\alpha_{j,1} = 1$ 。さらに、式(6)の $\alpha_{j,m}^*$ は $m \geq i+1$ の場合に ± 1 のすべての組合せをとる。ただし $\alpha_{j,i}^* = 1$ 。考慮すべき組合せの数は $j = 2^{n-1}$ である。

3. 傾斜機能材料の温度応答の近似解

傾斜機能材料は、多層試料の層数が無限大となると

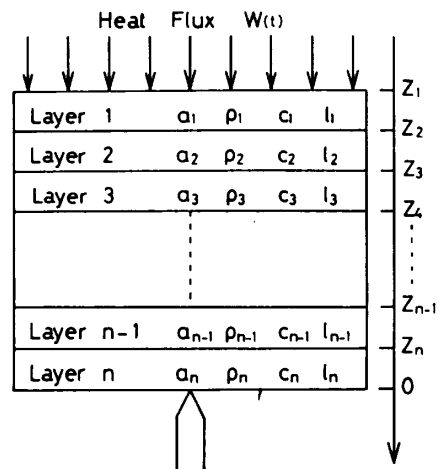


図1 多層試料のモデル

ともに物性値分布が連続的に変化している材料と考えられる。これらの仮定を多層試料の非定常温度応答の解析解に適用すると、傾斜機能材料の非定常温度応答の近似解が得られる(付録参照)。パルス状加熱の場合には

$$V_p = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos(k\pi\zeta) e^{-(k\pi)^2 Fo} \cdot (1 + \Phi_{p,k}), \quad \dots\dots\dots (12)$$

ステップ状加熱の場合には

$$V_s = Fo - \frac{1}{6}(1 + \Phi_{s,0}) + \frac{1}{2}\zeta^2 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos(k\pi\zeta)}{(k\pi)^2} e^{-(k\pi)^2 Fo} \cdot (1 + \Phi_{s,k}) \quad \dots\dots\dots (13)$$

となる。ここで、

$$\zeta = \frac{1}{\eta_L} \int_z^0 \frac{dz}{\sqrt{a(z)}}; \quad \eta_L = \int_{-L}^0 \frac{dz}{\sqrt{a(z)}} \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$Fo = t/\eta_L^2 \quad \dots\dots\dots (15)$$

さらに、 η_L は全熱拡散時間、 ζ は試料内部の位置から試料背面までの熱拡散時間で、補正項 $\Phi_{p,k}$ 、 $\Phi_{s,0}$ 、 $\Phi_{s,k}$ は式(51)、(53)、(54)で表示される。なお補正項のない式は荒木ら⁽¹⁾により求められている。

4. 解析解が存在する場合の傾斜機能材料の温度応答

傾斜機能材料の非定常温度応答の近似解の妥当性を検証するためには、解析解が存在する場合の傾斜機能材料の温度応答と比較を行う必要がある。初期条件

$$\theta(z,0) = 0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

境界条件

$$-\lambda_F \frac{\partial \theta(-L,t)}{\partial z} = W(t), \quad -\lambda_R \frac{\partial \theta(0,t)}{\partial z} = 0, \quad \dots\dots\dots (17)$$

の下での熱伝導方程式

$$\rho(z)c(z) \frac{\partial \theta(z,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda(z) \frac{\partial \theta(z,t)}{\partial z} \right], \quad \dots\dots (18)$$

の解法を考えると、式(14)の変数 ζ とラプラス変換の使用により、支配方程式および境界条件は次式となる。

$$\left(\frac{d^2 \Theta}{d\zeta^2} \right) + \left(\frac{d \ln \Lambda}{d\zeta} \right) \left(\frac{d\Theta}{d\zeta} \right) - \eta_L^2 s \Theta = 0 \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$\left(\frac{\Lambda_F}{\eta_L} \right) \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=1} = W(s), \quad \left(\frac{\Lambda_R}{\eta_L} \right) \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=0} = 0 \quad \dots\dots\dots (20)$$

式(19)は熱浸透率が

$$\ln \Lambda = 2\alpha\zeta + \beta \quad (\alpha, \beta: \text{定数}) \quad \dots\dots\dots (21)$$

の場合に解析解が存在し、逆ラプラス変換によりパルス状加熱時の非定常温度応答を求めると次式となる。

$$\theta(z,t) = \frac{Qae^\alpha}{\eta_L \Lambda_F \sinh \alpha} V_p; \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$V_p = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos(k\pi\zeta) e^{-(k\pi)^2 Fo} \cdot f_{p,k}; \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$f_{p,k} = \frac{\sinh \alpha}{\alpha} e^{-\alpha t - \alpha^2 Fo} \left[\frac{(k\pi)^2}{(k\pi)^2 + \alpha^2} \right] \times \left[1 + \frac{\alpha}{k\pi} \tan(k\pi\zeta) \right]. \quad \dots\dots\dots (24)$$

なお、特性根は $k\pi$ である。ちなみに、この Λ の分布を用いると近似解である式(12)の補正項は

$$\Phi_{p,k} = -\alpha\zeta + \frac{\alpha}{k\pi} \tan(k\pi\zeta) \quad \dots\dots\dots (25)$$

となり、 $(1 + \Phi_{p,k})$ が $\alpha \ll 1$ における式(24)の近似表示となっていることがわかる。また、ステップ状加熱の場合には次式のようなになる。

$$\theta(z,t) = \frac{\eta_L Qae^\alpha}{\Lambda_F \sinh \alpha} V_s; \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$V_s = Fo + \frac{1 + e^{-2\alpha t} + 2\alpha(\zeta - \coth \alpha)}{4\alpha^2} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos(k\pi\zeta)}{(k\pi)^2} e^{-(k\pi)^2 Fo} \cdot f_{s,k}; \quad \dots\dots\dots (27)$$

$$f_{s,k} = \frac{\sinh \alpha}{\alpha} e^{-\alpha t - \alpha^2 Fo} \left[\frac{(k\pi)^2}{(k\pi)^2 + \alpha^2} \right]^2 \times \left[1 + \frac{\alpha}{k\pi} \tan(k\pi\zeta) \right]. \quad \dots\dots\dots (28)$$

$\alpha \ll 1$ の場合には式(27)の第2項は $[-(1/6) + (\zeta^2/2)]$ となる。また、近似解である式(13)の補正項は

$$\Phi_{s,0} = 0, \quad \Phi_{s,k} = -\alpha\zeta + \frac{\alpha}{k\pi} \tan(k\pi\zeta) \quad \dots\dots\dots (29)$$

となり、 $(1 + \Phi_{s,k})$ が $\alpha \ll 1$ における式(28)の近似表示となっていることがわかる。

5. 計算結果

5.1 近似解と解析解との比較

近似解と解析解との比較を行うために、温度応答に関して数値計算を行った。ここではパルス状加熱法についてのみ計算結果を示す。まず、解析解が存在する場合の傾斜機能材料内の熱浸透率 Λ の分布を図2に示す。式(21)中の定数 α が1の場合においてさえも、前面と背面の熱浸透率比(Λ_F/Λ_R)は7.39となり、通常の固体物質の組合せで得られるであろう熱浸透率比と同程度か、またはより大きな値となっている。つまり、通常の固体物質を用いて創成された傾斜機能材料を検討対象にする限りにおいては、式(21)中の係数 α の取りうる値としては $-1 \leq \alpha \leq 1$ を考えればよいということになる。

まず、試料背面における温度上昇に着目し、ここで

の温度が最高温度上昇の50%になるときの、フーリエ数 $Fo_{1/2}$ を検討対象とする。図3に係数 α と $Fo_{1/2}$ との関係を示す。実線は式(23)の解析解の結果であり、一点鎖線は式(12)の近似解の結果である。試料内に熱浸透率分布がない $\alpha=0$ の場合には、単層試料となるため、 $Fo_{1/2}=0.1388$ となる。係数 α の増加(減少)にともない解析解の $Fo_{1/2}$ が減少(増加)するのに対して、近似解の $Fo_{1/2}$ は一定値となっている。このため $\alpha=\pm 1$ においては5.6%の誤差が生じている。しかしながら、この程度の誤差は測定実験において他の要因により生じる誤差と比べると許容しうる程度であると考えられる。

近似解である式(12)の妥当性が試料背面において示されたので、次には傾斜機能材料内の温度応答について調べることとする。係数 α の値としては、上記の考察に基づいて $\alpha=\pm 1$ とする。図4にフーリエ数 Fo と温度上昇 V との関係を示す。パラメータは ζ で、これは試料内部の位置に対応している。図4中の実線は解析解、破線は補正項なしの近似解、一点鎖線は補正項

付きの近似解を示している。 $\zeta=0$ および0.25においては、近似解と解析解との隔たりがわずかである。また、補正項なしの近似解のほうが解析解に近いこともわかる。しかしながら、 $\zeta=0.5$ およびそれ以上となる試料前面付近においては、近似解と解析解との隔たりが大きく、近似解がもはや使用できないことがわかる。これは式(21)で与えられる熱浸透率 Λ の分布が、試料前面においてより急峻なためである。

試料内部における温度応答については、温度上昇が試料背面の温度上昇の50%となるフーリエ数 $Fo_{1/2}$ を近似解と解析解とで求め、これらの隔たりを調べた(図5)。パラメータは係数 α である。破線は補正項なしの近似解、一点鎖線は補正項付きの近似解を示している。 ζ の増加にともない、補正項付きの近似解の隔たりは増大しているのに対し、補正項なしの近似解の

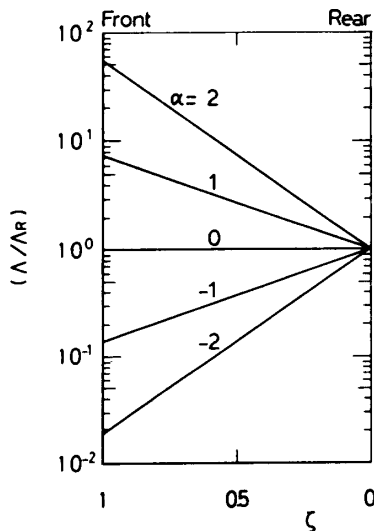


図2 熱浸透率の分布

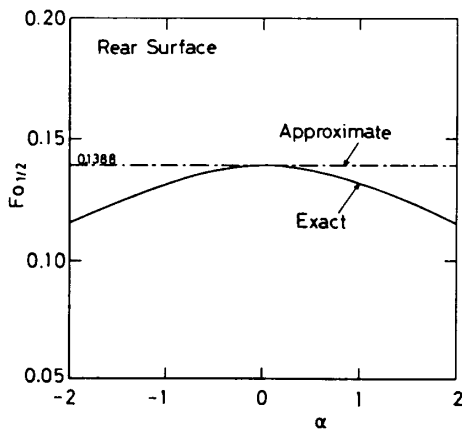


図3 係数 α とフーリエ数 $Fo_{1/2}$ との関係(試料背面)

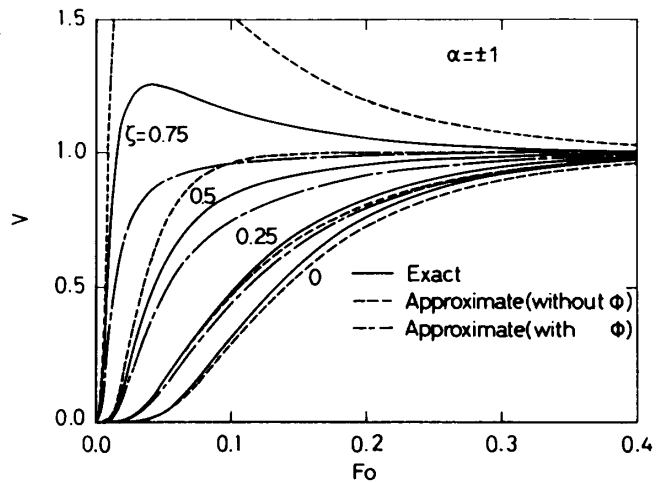


図4 フーリエ数 Fo と温度上昇 V との関係

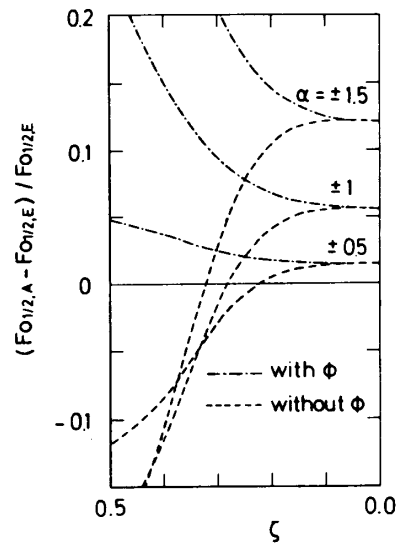


図5 ζ にともない近似解と解析解との隔たり(添字A: 近似解, 添字E: 解析解)

隔たりは正の値から負の値へと変化している。このため、補正項なしの近似解のほうが、 ζ のより大きな値にまで適用が可能となっており、係数 α が±1の場合には試料背面から $\zeta=0.34$ に相当する試料内部までの温度応答を6%程度の誤差内で表示することができる。

なお、傾斜機能材料内の熱拡散率分布が与えられれば、規格化された熱拡散時間 ζ と無次元距離 $[z/(-L)]$ との関係が得られる。特に、熱拡散率分布が

$$\alpha = \alpha_R + (\alpha_F - \alpha_R) [z/(-L)]^p \dots\dots\dots (30)$$

により表示されるとともに、指数 p が0, 1, 2の場合には、 ζ は次のように表すことができる。

$$p=0, \zeta = \left(\frac{z}{-L} \right) \dots\dots\dots (31)$$

$$p=1, \zeta = \frac{\sqrt{1+y}-1}{\sqrt{1+y_L}-1}; \quad y = y_L \left(\frac{z}{-L} \right);$$

$$y_L = \frac{\alpha_F - \alpha_R}{\alpha_R} \dots\dots (32)$$

$$p=2, \zeta = \frac{\ln(\sqrt{1+y^2}-y)}{\ln(\sqrt{1+y_L^2}-y_L)}; \quad y = y_L \left(\frac{z}{-L} \right);$$

$$y_L^2 = \frac{\alpha_F - \alpha_R}{\alpha_R} \dots\dots\dots (33)$$

しかも、 $(\alpha_F/\alpha_R) \gg 1$ の場合には、 $p=2$ では $\zeta=1$ となり、 $p=1$ では $\zeta = \sqrt{z/(-L)}$ となる。また、 $\alpha_F = \alpha_R$ の場合には、 $\zeta = z/(-L)$ となる。図6にはこれらの結果が示されている。

5.2 傾斜機能材料の近似解と多層試料の解析解との比較 傾斜機能材料の補正項なしの近似解の妥当性または有用性が試料背面近傍において示されたので、ここではさらに、多層試料の解析解との比較を行い、その近似解の有用性を示すこととする。一例として鉄(Fe)と酸化チタン(TiO₂)の2成分からなる試料

を考え、試料前面は鉄、試料背面は酸化チタンで、試料内では図7のように混合割合 X が無次元距離 $[z/(-L)]$ の線形関数で表示されるものとする。また、混合割合 X が無次元距離 $[z/(-L)]$ の線形関数で表示されるものとする。また、混合割合 X の成分I(Fe)と混合割合 $(1-X)$ の成分II(TiO₂)からなる混合物の熱物性値は次式により算出した。

$$\rho = \rho_I X + \rho_{II}(1-X), \quad \rho c = \rho_I c_I X + \rho_{II} c_{II}(1-X), \dots\dots\dots (34)$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{X}{\lambda_I} + \frac{1-X}{\lambda_{II}}, \quad \alpha = \frac{\lambda}{\rho c} \dots\dots\dots (35)$$

表1 成分の熱物性値

Component	Material	[kJ/(m ² ·K·√s)]	(m ² /s)
I	Fe	15	2.1×10 ⁻⁵
II	TiO ₂	5	3.0×10 ⁻⁶

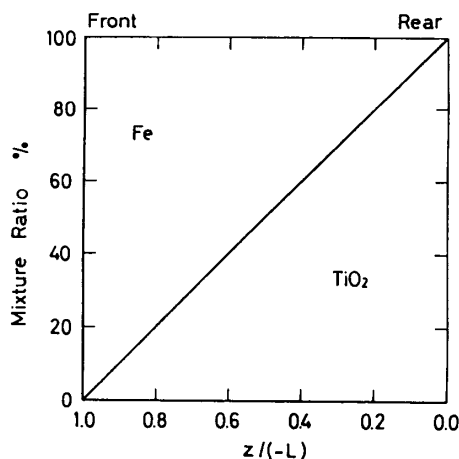


図7 無次元距離 $[z/(-L)]$ と混合割合 $(1-X)$ との関係

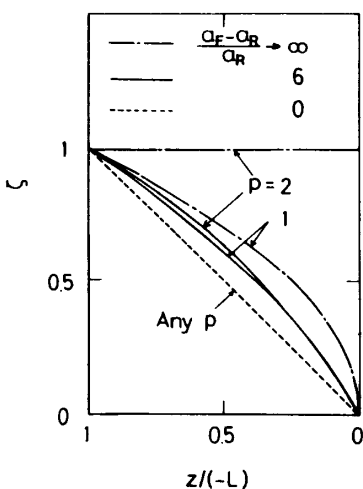


図6 規格化された熱拡散時間 ζ と無次元距離 $[z/(-L)]$

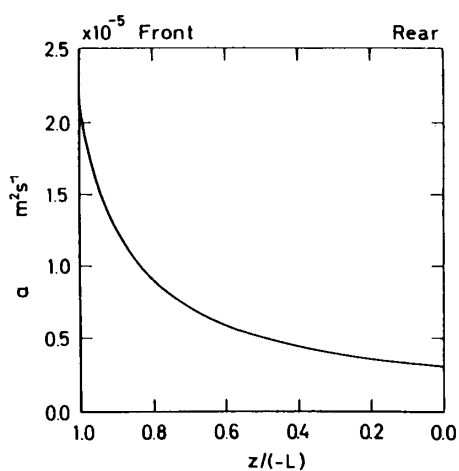
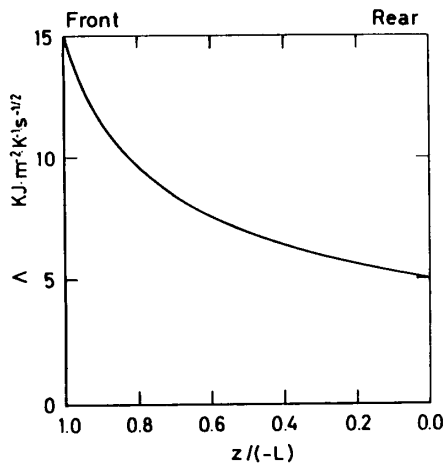


図8 試料内の熱拡散率 α の分布

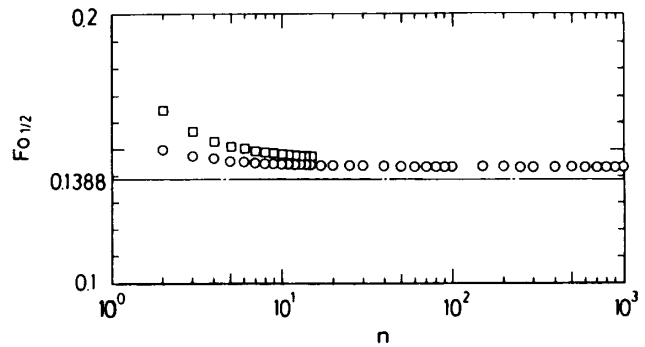
図9 試料内の熱浸透率 λ の分布

なお、表1に2成分の熱物性値を示す。図8には算出された試料内の熱拡散率 a の分布が、図9には熱浸透率 λ の分布が示されている。なお多層試料の解析解を用いる際には、各層の厚さが等しいとして、熱物性値の離散化を行った。

図10に試料の層数にともなうフーリエ数 $FO_{1/2}$ の変化を示す。ここでは試料背面での温度応答のみに着目している。計算機の記憶容量の制約のため、15層試料までの計算しか行えなかったが、層数の増加にともなう $FO_{1/2}$ が減少し、一定値に漸近する傾向が見受けられる(記号: □)。15層試料の $FO_{1/2}$ に比べると、8層試料の $FO_{1/2}$ は約1%大きく、5層試料の $FO_{1/2}$ は約3%大きいという結果が得られている。このことより、試料背面での温度応答に関する限りでは、傾斜機能材料を8層程度の試料とみなしても差し支えなく、これを用いることで簡便に傾斜機能材料の遮熱性能を評価できるものと考えられる。

図10には傾斜機能材料の近似式を用いて得られたフーリエ数も提示してある ($FO_{1/2}=0.1388$)。この値は15層試料の $FO_{1/2}$ に比べて、6%程度の隔りがあるものの、傾斜機能材料の遮熱性能のより簡便な評価には使用できるものと考えられる。

また、多層試料の解析解の中に現れるパラメータ x について、その値が大きなもの n 個だけ計算に使用するという手法も用いた。なお、使用しなかった x の値は、使用した x の値に比べて1けた以上小さな値である。この手法による計算結果も、層数の増加にともなう $FO_{1/2}$ が減少し、一定値に漸近する傾向を示している(記号: ○)。しかも、1000層試料の $FO_{1/2}$ に比べて、8層試料の $FO_{1/2}$ は1%程度大きいだけである。また、8層試料について解析解の $FO_{1/2}$ と比べると、この手法での $FO_{1/2}$ のほうが約3%小さくなっている。この

図10 多層試料の層数 n とフーリエ数 $FO_{1/2}$ との関係

隔たりは15層試料についても同程度である。それゆえ、近似解による評価では誤差が大きくなりすぎると考えられる場合には、ここでの手法により比較的簡便に傾斜機能材料の遮熱性能を評価しうることを示唆している。

6. 結 論

試料内に物性値分布を持つ傾斜機能材料の遮熱性能評価に関連して基礎的研究が行われた。本研究においては、傾斜機能材料の非定常加熱による熱拡散率測定の実験原理確立に不可欠な試料内部の温度応答に着目し、温度応答の近似解について妥当性ないしは有用性が調べられた。近似解の妥当性ないしは有用性の検証に当たっては、解析解が存在する傾斜機能材料の温度応答との比較、ならびに多層試料の温度応答の解析解との比較が行われた。その結果、通常の固体物質により創成された傾斜機能材料であれば、試料背面近傍については、近似解を用いてこの温度応答を表示しうることが判明した。なお、この際の誤差は6%程度である。また、温度応答に関する限りでは、傾斜機能材料を8層程度の多層試料とみなして取扱うことが可能であるし、さらに6%程度の誤差が許容されるならば近似解の使用も可能であることがわかった。このように近似解の有用性が示されたので、定量的および定性的議論において、この近似解の多方面での使用が期待される。

本研究は科学技術庁科学技術振興調整費による航空宇宙技術研究所の「熱応力緩和のための傾斜機能材料開発の基盤技術に関する研究」の研究委託で行われた。

〔付 録〕

ここでは、多層試料の温度応答の解析解に摂動法的手法を適用することにより、傾斜機能材料の温度応答の近似解の導出を試みる。隣接層の熱浸透率の比を

$$\Lambda_{m/m+1} \approx 1 - \left(\frac{d \ln \Lambda}{dz} \right)_m \delta z \equiv 1 - 2\varepsilon_m \dots\dots\dots (36)$$

と表示すると、 $0(\varepsilon)$ より大きなパラメータ x は

$$x_1 \approx \prod_{m=1}^{n-1} 2(1 - \varepsilon_m) \approx 2^{n-1} \left(1 - \sum_{m=1}^{n-1} \varepsilon_m \right), \dots\dots\dots (37)$$

$$x_{\text{①}}^* \approx \left[\prod_{m=1}^{j-1} 2(1 - \varepsilon_m) \right] (-2\varepsilon_j) \left[\prod_{m=j+1}^{n-1} 2(1 - \varepsilon_m) \right] \\ \approx -\varepsilon_j x_1 \dots\dots\dots (38)$$

となる。パラメータ ω については次のようになる。

$$\omega_1 = \sum_{n=1}^n \eta_{m/n}, \omega_{\text{①}}^* = \omega_1 - 2 \sum_{m=j+1}^n \eta_{m/n}. \dots\dots\dots (39)$$

同様に x^* と ω^* は次式で表示される。

$$x_1^* \approx 2^{n-i} \left(1 - \sum_{m=i}^{n-1} \varepsilon_m \right), x_{\text{①}}^* \approx -\varepsilon_j x_1^*; \dots\dots\dots (40)$$

$$\omega_1^* = \eta_{i/n}^* + \sum_{m=i+1}^n \eta_{m/n}, \omega_{\text{①}}^* = \omega_1^* - 2 \sum_{m=j+1}^n \eta_{m/n}. \dots\dots\dots (41)$$

熱浸透率分布がない場合の特性根が $\gamma_k \omega_1 = k\pi$ であることに留意しつつ $O(\varepsilon)$ の項を比較すると特性根は

$$\gamma_k \approx \frac{1}{\omega_1} \left[k\pi - \sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon_j \sin \left(\frac{2k\pi}{\omega_1} \sum_{m=j+1}^n \eta_{m/n} \right) \right] \dots\dots\dots (42)$$

となる。また、次の一連の関係も導かれる。

$$\sum_{j=1}^{2^{n-1}} \omega_j x_j \approx \omega_1 x_1 \left[1 - \sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon_j \left(1 - \frac{2}{\omega_1} \sum_{m=j+1}^n \eta_{m/n} \right) \right], \dots\dots\dots (43)$$

$$\sum_{j=1}^{2^{n-1}} \omega_j x_j \cos(\gamma_k \omega) \approx (-1)^k \omega_1 x \\ \times \left[1 - \sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon_j \left(1 - \frac{2}{\omega_1} \sum_{m=j+1}^n \eta_{m/n} \right) \right] \\ \times \cos \left(\frac{2k\pi}{\omega_1} \sum_{m=j+1}^n \eta_{m/n} \right), \dots\dots\dots (44)$$

$$e^{-(\gamma_k / \eta_m)^2 t} \approx e^{-(k\pi)^2 Fo} \left[1 + 2k\pi Fo \sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon_j \right. \\ \left. \times \sin \left(\frac{2k\pi}{\omega_1} \sum_{m=j+1}^n \eta_{m/n} \right) \right], \dots\dots\dots (45)$$

$$\sum_{j=i}^{i-1+2^{n-i}} x_j^* \cos(\gamma_k \omega_j^*) \approx x_i^* \cos \left(\frac{k\pi}{\omega_1} \omega_i^* \right) \\ \times \left[1 - \sum_{j=i}^{n-1} \varepsilon_j \cos \left(\frac{2k\pi}{\omega_1} \sum_{m=j+1}^n \eta_{m/n} \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{\omega_1^*}{\omega_1} \right) \tan \left(\frac{k\pi}{\omega_1} \omega_1^* \right) \sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon_j \sin \left(\frac{2k\pi}{\omega_1} \sum_{m=j+1}^n \eta_{m/n} \right) \right. \\ \left. - \tan \left(\frac{k\pi}{\omega_1} \omega_1^* \right) \sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon_j \sin \left(\frac{2k\pi}{\omega_1} \sum_{m=j+1}^n \eta_{m/n} \right) \right], \dots\dots\dots (46)$$

$$\sum_{j=i}^{i-1+2^{n-i}} x_j^* \approx x_i^* \left(1 - \sum_{j=i}^{n-1} \varepsilon_j \right). \dots\dots\dots (47)$$

さらに、層数を無限大とすると次の関係も得られる。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\omega_1} \sum_{m=j+1}^{n-1} \eta_{m/n} \right) = \left(\int_z^0 \frac{dz}{\sqrt{a}} \right) / \left(\int_{-L}^0 \frac{dz}{\sqrt{a}} \right) \equiv \zeta, \dots\dots\dots (48)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\omega_1^*}{\omega_1} \right) = \left(\int_z^0 \frac{dz}{\sqrt{a}} \right) / \left(\int_{-L}^0 \frac{dz}{\sqrt{a}} \right) \equiv \zeta. \dots\dots\dots (49)$$

そこで、パルス状加熱の場合には式(2)は次式となる。

$$V_p = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos(k\pi\zeta) e^{-(k\pi)^2 Fo} \cdot (1 + \Phi_{p,k}); \dots\dots\dots (50)$$

$$\Phi_{p,k} = -\frac{1}{2} \int_{-L}^0 \left(\frac{d \ln \Lambda}{dz} \right) [(1 - 2\zeta)(1 - \cos(2k\pi\zeta)) \\ - (2k\pi Fo) \sin(2k\pi\zeta)] dz \\ + \frac{\zeta \tan(k\pi\zeta)}{2} \int_{-L}^0 \left(\frac{d \ln \Lambda}{dz} \right) \sin(2k\pi\zeta) dz \\ + \frac{1}{2} \int_z^0 \left(\frac{d \ln \Lambda}{dz} \right) [1 - \cos(2k\pi\zeta)] dz \\ - \frac{\tan(k\pi\zeta)}{2} \int_z^0 \left(\frac{d \ln \Lambda}{dz} \right) \sin(2k\pi\zeta) dz. \dots\dots\dots (51)$$

また、ステップ状加熱の場合には式(4)は次式となる。

$$V_s = Fo - \frac{1 + \Phi_{s,0}}{6} + \frac{\zeta^2}{2} \\ - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos(k\pi\zeta)}{(k\pi)^2} e^{-(k\pi)^2 Fo} \cdot (1 + \Phi_{s,k}); \dots\dots\dots (52)$$

$$\Phi_{s,0} = 2 \int_{-L}^0 \left(\frac{d \ln \Lambda}{dz} \right) \zeta (1 - \zeta) (1 - 2\zeta) dz, \dots\dots\dots (53)$$

$$\Phi_{s,k} = -\frac{1}{2} \int_{-L}^0 \left(\frac{d \ln \Lambda}{dz} \right) [(1 - 2\zeta)(1 - \cos(2k\pi\zeta)) \\ - \frac{2((k\pi)^2 Fo + 1)}{k\pi} \sin(2k\pi\zeta)] dz \\ + \frac{\zeta \tan(k\pi\zeta)}{2} \int_{-L}^0 \left(\frac{d \ln \Lambda}{dz} \right) \sin(2k\pi\zeta) dz \\ + \frac{1}{2} \int_z^0 \left(\frac{d \ln \Lambda}{dz} \right) [1 - \cos(2k\pi\zeta)] dz \\ - \frac{\tan(k\pi\zeta)}{2} \int_z^0 \left(\frac{d \ln \Lambda}{dz} \right) \sin(2k\pi\zeta) dz. \dots\dots\dots (54)$$

文 献

(1) Araki, N., ほか3名, *Int. J. Thermophys.*, **13**, (1992) 515.