

539.313 : 539.371 : 539.377.01

偶応力を考慮した中空円筒の非定常熱応力\*

竹内洋一郎\*\*, 野田直剛\*\*

1. 緒言

前報<sup>(1)</sup>において偶応力理論を考慮に入れた重複連結領域における, いわゆる Michell の条件式に関する理論を始めて発表した. この理論の応用として中空円筒の定常熱応力問題を解決した<sup>(2)</sup>. さて中空円筒の非定常熱応力問題に関しては, 従来の理論による多数の報告があるが偶応力理論を考慮した報告は見当たらない. そこでこの報告では偶応力理論を考慮して, 非軸対称加熱を受ける中空円筒の平面ひずみ非定常熱応力問題を解決し, 応力分布および偶応力分布を求めた. 解析に関する基礎理論は Mindlin<sup>(3)</sup> および Nowacki<sup>(4)</sup> の偶応力理論および温度変化を考慮した偶応力理論を用い, 解析の手段としては プララス変換を適用した.

2. 解析

2.1 偶応力理論を考慮した平面ひずみ熱弾性論の基礎式

$$\gamma_{11} = u_{1,1}, \quad \gamma_{12} = \gamma_{21} = (u_{1,2} + u_{2,1})/2, \quad \gamma_{22} = u_{2,2} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\left. \begin{aligned} K_{31} &= \omega_{3,1} = (u_{2,1} - u_{1,2})/2 \\ K_{32} &= \omega_{3,2} = (u_{2,1} - u_{1,2})/2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left( \gamma_{ij} - \frac{1}{2} l^2 \varepsilon_{3ij} K_{3k,k} \right) + \left\{ \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \gamma_{kk} - \beta \tau \right\} \delta_{ij} \dots\dots\dots (3)$$

$$\mu_{13} = 2El^2 K_{31}/(1+\nu), \quad \mu_{23} = 2El^2 K_{32}/(1+\nu) \quad \dots\dots\dots (4)$$

ただし

- $\gamma_{ij}$  : ひずみ成分
- $\sigma_{ij}$  : 応力成分
- $u_i$  : 変位成分
- $K_{ij}$  : 曲率成分
- $\omega_3$  : 回転成分
- $\mu_{ij}$  : 偶応力成分

- $E$  : 縦弾性係数
- $G$  : 横弾性係数
- $\tau$  : 温度関数
- $\nu$  : ポアソン比
- $l^2$  : 偶応力論における新材料定数 ( $l^2 = B/G$ )
- $B$  : 曲率の弾性係数 ( $4B = \mu_{ij}/K_{ij}$ )
- $\alpha_i$  : 線膨張係数
- $\beta$  : 熱応力における定数 ( $\beta = \alpha_i E / (1-2\nu)$ )
- $\delta_{ij}$  : クロネッカーのデルタ
- $\varepsilon_{ijk}$  : エディントンの記号
- $i, j, k$  : 1, 2, 3 または  $x, y, z$
- $_{,i}$  :  $i$  に関する偏微分

つぎに Airy の熱応力関数 ( $\chi$ ) および Mindlin の偶応力関数 ( $\phi$ ) を用いた熱応力成分および偶応力成分の表示は次式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= \chi_{,22} - \phi_{,12}, \quad \sigma_{21} = \phi_{,11} - \chi_{,21} \\ \sigma_{12} &= -\chi_{,12} - \phi_{,22}, \quad \sigma_{22} = \chi_{,11} + \phi_{,21} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

$$\mu_{13} = \phi_{,1}, \quad \mu_{23} = \phi_{,2} \quad \dots\dots\dots (6)$$

(1) 基礎微分方程式

$$\Delta \Delta \chi + k \Delta \tau = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\Delta (\phi - l^2 \Delta \phi) = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここで  $\Delta$  はラプラス演算子,  $k = \alpha_i E / (1-\nu)$ .

(2) 共役関係式

$$(\phi - l^2 \Delta \phi)_{,1} = -2(1-\nu) l^2 (\Delta \chi + k\tau)_{,2} \dots\dots\dots (9)$$

$$(\phi - l^2 \Delta \phi)_{,2} = 2(1-\nu) l^2 (\Delta \chi + k\tau)_{,1} \dots\dots\dots (10)$$

(3) 境界条件式

$$\left. \begin{aligned} \chi &= \bar{C}_1 x + \bar{C}_2 y + \bar{C}_3 \\ \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} &= \bar{C}_1 \cos \theta + \bar{C}_2 \sin \theta \\ \frac{\partial \phi}{\partial r} &= 0 \end{aligned} \right\} r = a \text{ で} \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\chi = \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \quad r = b \text{ で} \dots\dots\dots (12)$$

ここで  $a$  は中空円筒の内半径,  $b$  は外半径で  $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{C}_3$  は積分定数.

(4) 偶応力理論における Michell の条件式

\* 昭和 47 年 6 月 10 日 関西支部 第 228 回講演会において講演, 原稿受付 昭和 47 年 8 月 12 日.  
\*\* 正員, 静岡大学工学部 (浜松市城北 3-5-1).

$$\left. \begin{aligned} \oint_{L_i} \left\{ \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\Delta\phi}{2} \right) + (1-\nu) \frac{\partial}{\partial n} (\Delta\chi + k\tau) \right\} ds &= 0 \\ \oint_{L_i} \left( x_1 \frac{\partial}{\partial s} - x_2 \frac{\partial}{\partial n} \right) (\Delta\chi + k\tau) ds &= 0 \\ \oint_{L_i} \left( x_1 \frac{\partial}{\partial n} + x_2 \frac{\partial}{\partial s} \right) (\Delta\chi + k\tau) ds &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

ただし  $L_i$  は重複連結領域内の交差しない閉曲線,  $n$  は閉曲線の外向き法線,  $s$  は閉曲線にそう弧の長さ,  $x_i$  は直角座標である. 偶応力を考慮した熱応力問題は 2 種の応力関数で表された基礎微分方程式を 3 種の条件式, すなわち共役関係式, 境界条件式, 重複連結領域に対する変位と回転の一価性を保証する Michell の条件式を満足するように解けばよいわけである.

**2.2 非定常熱伝導問題の解** 非定常熱伝導の基礎式は

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \kappa \Delta \tau \dots\dots\dots(14)$$

境界条件は

$$\tau = 0 \quad (r = b \text{ に対し}) \dots\dots\dots(15)$$

$$\tau = \tau_i \cos 2\theta \quad (r = a \text{ に対し}) \dots\dots\dots(16)$$

初期条件は

$$\tau = 0 \dots\dots\dots(17)$$

ただし,  $\kappa$  は温度伝導率,  $\tau_i$  は一定温度,  $t$  は時間.

上記の温度境界条件はフーリエ展開が可能な境界温度条件を代表する意味で一般性をもつものであり, また同時につきに述べる重要な意味をもつものである. すなわちよく知られているように偶応力を考慮しない熱弾性理論において,  $\cos n\theta, \sin n\theta$  ( $n=2, 3, 4\dots$ ) の温度境界条件を持つ熱発生のない中空円筒定常熱応力問題は Michell の条件式を自動的に満足させることになり, 熱応力は発生しない. すなわちフーリエ展開可能な温度分布に対して Michell の条件式は  $\theta$  に関して定数項,  $\cos \theta, \sin \theta$  の各項に対してのみ考慮が必要になり, 熱応力はこれらの温度分布に対しての

$$\chi_p = -k\tau_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{\lambda_n^2} \{ J_2(\lambda_n r) Y_2(\lambda_n b) - J_2(\lambda_n b) Y_2(\lambda_n r) \} e^{-\kappa \lambda_n^2 t} \cos 2\theta \dots\dots\dots(27)$$

また式 (26) の一般解としてはすでによく知られている極座標系の一般解より温度分布の対称性を考慮することにより

$$\begin{aligned} \chi_c &= A_0 + B_0 \ln r + C_0 r^2 + D_0 r^2 \ln r + (A_1 r + B_1 r^{-1} + C_1 r^3 + D_1 r \ln r) \cos \theta \\ &+ \sum_{m=2}^{\infty} (A_m r^m + B_m r^{-m} + C_m r^{m+2} + D_m r^{-m+2}) \cos m\theta \dots\dots\dots(28) \end{aligned}$$

よって式 (27), (28) を式 (24) に代入すれば

$$\begin{aligned} \chi &= A_0 + B_0 \ln r + C_0 r^2 + D_0 r^2 \ln r + (A_1 r + B_1 r^{-1} + C_1 r^3 + D_1 r \ln r) \cos \theta + \sum_{m=2}^{\infty} (A_m r^m + B_m r^{-m} \\ &+ C_m r^{m+2} + D_m r^{-m+2}) \cos m\theta - k\tau_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{\lambda_n^2} \{ J_2(\lambda_n r) Y_2(\lambda_n b) - J_2(\lambda_n b) Y_2(\lambda_n r) \} e^{-\kappa \lambda_n^2 t} \cos 2\theta \dots(29) \end{aligned}$$

み発生する. もちろん  $\sigma_{zz}$  については上述のことは適用されずに一般の  $\cos n\theta, \sin n\theta$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) に対して熱応力を発生する. そこで本研究では偶応力を考慮しない場合に,  $t \rightarrow \infty$  の定常温度分布に対して  $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{r\theta}$  が消失するような温度境界条件を選んだ.

さて式 (14) の解は式 (15)~(17) を考慮しラプラス変換を利用すれば

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_i \left\{ \left( -\frac{a^2}{b^4 - a^4} r^2 + \frac{a^2 b^4}{b^4 - a^4} r^{-2} \right) \cos 2\theta \right. \\ &\left. - \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_2(\lambda_n r) Y_2(\lambda_n b) - J_2(\lambda_n b) Y_2(\lambda_n r)}{J_2(\lambda_n b) / J_2(\lambda_n a) - J_2(\lambda_n a) / J_2(\lambda_n b)} e^{-\kappa \lambda_n^2 t} \cos 2\theta \right\} \end{aligned} \dots\dots\dots(18)$$

ここで  $\lambda_n$  は次式を満足する  $\lambda$  の第  $n$  番めの正根である.

$$J_2(\lambda a) Y_2(\lambda b) - J_2(\lambda b) Y_2(\lambda a) = 0 \dots\dots\dots(19)$$

ただし,  $J_2, Y_2$  はベッセル関数である. 以後の処理が都合がよいように式 (18) を定常項  $T_0$  と非定常項  $T_1$  に分離する.

$$\tau = T_0 + T_1 \dots\dots\dots(20)$$

$$T_0 = (\bar{A}_2 r^2 + \bar{B}_2 r^{-2}) \cos 2\theta \dots\dots\dots(21)$$

$$\bar{A}_2 = -\tau_i \frac{a^2}{b^4 - a^4}, \quad \bar{B}_2 = \tau_i \frac{a^2 b^4}{b^4 - a^4}$$

$$\begin{aligned} T_1 &= -\tau_i \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \{ J_2(\lambda_n r) Y_2(\lambda_n b) \\ &- J_2(\lambda_n b) Y_2(\lambda_n r) \} e^{-\kappa \lambda_n^2 t} \cos 2\theta \dots\dots\dots(22) \end{aligned}$$

ただし

$$\xi_n = \pi / \{ J_2(\lambda_n b) / J_2(\lambda_n a) - J_2(\lambda_n a) / J_2(\lambda_n b) \} \dots\dots\dots(23)$$

**2.3 偶応力論を考慮した非定常熱応力問題** いま

式 (7) の解を特解  $\chi_p$  と同次式の解  $\chi_c$  にわけて表すと

$$\chi = \chi_c + \chi_p \dots\dots\dots(24)$$

$$\Delta \chi_p = -k T_1 \dots\dots\dots(25)$$

$$\Delta \chi_c = 0 \dots\dots\dots(26)$$

式 (22) と式 (25) より  $\chi_p$  は

つぎに Mindlin の応力関数  $\psi$  の一般解のうち本問題の温度分布に適応するものとして

$$\psi = E_0 + F_0 \ln r + G_0 I_0\left(\frac{r}{l}\right) + H_0 K_0\left(\frac{r}{l}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ E_m r^m + F_m r^{-m} + G_m I_m\left(\frac{r}{l}\right) + H_m K_m\left(\frac{r}{l}\right) \right\} \sin m\theta \dots (30)$$

つぎに簡単な考察により

$$\Delta\chi + k\tau = \Delta\chi_0 + kT_0 \dots (31)$$

式 (31) の関係と式 (29), (30) を式 (9), (10) に代入することにより

$$\left. \begin{aligned} E_0 = D_0 = 0, \quad E_2 = 2(1-\nu)l^2(12C_2 + k\tau_2 \bar{A}_2), \quad F_2 = 2(1-\nu)l^2(4D_2 - k\tau_2 \bar{B}_2) \\ E_m = 8(1-\nu)l^2(m+1)C_m, \quad F_m = 8(1-\nu)l^2(m-1)D_m \quad (m=1, 3, 4, 5, \dots) \end{aligned} \right\} \dots (32)$$

なる関係が成立する. Michell の条件式 (13) の極座標系では

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\Delta\psi}{2} \right) + (1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} (\Delta\chi + k\tau) \right] r d\theta = 0 \\ \int_0^{2\pi} r \left( \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - r \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \right) (\Delta\chi + k\tau) d\theta = 0 \\ \int_0^{2\pi} r \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + r \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \right) (\Delta\chi + k\tau) d\theta = 0 \end{aligned} \right\} \dots (33)$$

式 (31) を考慮して式 (29), (30) を式 (33) に代入すると

$$D_0 = D_1 = 0 \dots (34)$$

式 (32), (34) を考慮して式 (29), (30) を境界条件式 (11), (12) に代入すると次式を得る.

$$\left. \begin{aligned} \bar{C}_1 = \bar{C}_2 = \bar{C}_3 = A_m = B_m = C_m = D_m = E_m = F_m = G_m = H_m = 0 \quad (m=0, 1, 3, 4, \dots) \\ 2aA_2' - 2a^{-3}B_2' + 4a^3C_2' - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{\lambda_n} \{ J_1(\lambda_n a) Y_2(\lambda_n b) - J_2(\lambda_n b) Y_1(\lambda_n a) \} e^{-\kappa \lambda_n 2t} \\ + 4(1-\nu)l^2 \left[ (12C_2' + \bar{A}_2)a + (4D_2' - \bar{B}_2)a^{-3} + G_2' a^{-1} I_2\left(\frac{a}{l}\right) + H_2' a^{-1} K_2\left(\frac{a}{l}\right) \right] = 0 \\ 2bA_2' - 2b^{-3}B_2' + 4b^3C_2' - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{\lambda_n} \{ J_1(\lambda_n b) Y_2(\lambda_n b) - J_2(\lambda_n b) Y_1(\lambda_n b) \} e^{-\kappa \lambda_n 2t} \\ + 4(1-\nu)l^2 \left[ (12C_2' + \bar{A}_2)b + (4D_2' - \bar{B}_2)b^{-3} + G_2' b^{-1} I_2\left(\frac{b}{l}\right) + H_2' b^{-1} K_2\left(\frac{b}{l}\right) \right] = 0 \\ 2(12C_2' + A_2)a - 2(4D_2' - \bar{B}_2)a^{-3} + G_2' \left\{ \frac{1}{l} I_1\left(\frac{a}{l}\right) - \frac{2}{a} I_2\left(\frac{a}{l}\right) \right\} - H_2' \left\{ \frac{1}{l} K_1\left(\frac{a}{l}\right) + \frac{2}{a} K_2\left(\frac{a}{l}\right) \right\} = 0 \\ 2(12C_2' + A_2)b - 2(4D_2' - \bar{B}_2)b^{-3} + G_2' \left\{ \frac{1}{l} I_1\left(\frac{b}{l}\right) - \frac{2}{b} I_2\left(\frac{b}{l}\right) \right\} - H_2' \left\{ \frac{1}{l} K_1\left(\frac{b}{l}\right) + \frac{2}{b} K_2\left(\frac{b}{l}\right) \right\} = 0 \\ a^2 A_2' + a^{-2} B_2' + a^4 C_2' + D_2' = 0, \quad b^2 A_2' + b^{-2} B_2' + b^4 C_2' + D_2' = 0 \end{aligned} \right\} \dots (35)$$

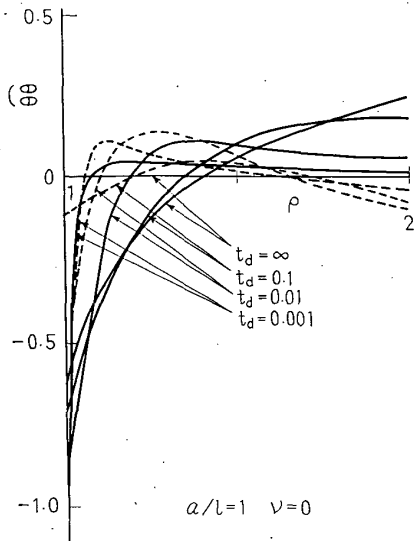


図 1  $\theta=0$  軸上の  $\hat{\theta}\hat{\theta}$  の応力分布 (点線は偶応力を考慮しない場合)

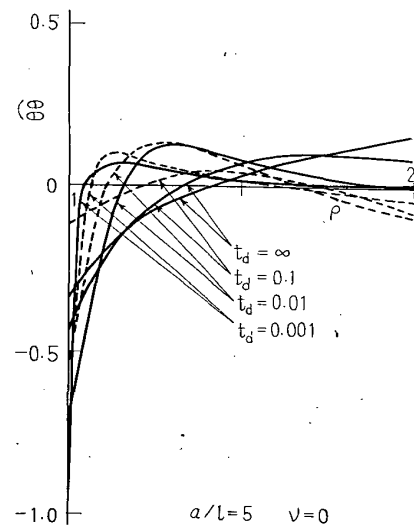


図 2  $\theta=0$  軸上の  $\hat{\theta}\hat{\theta}$  の応力分布 (点線は偶応力を考慮しない場合)

ここで

$$\left. \begin{aligned} A_2' &= A_2/k\tau_i, & B_2' &= B_2/k\tau_i, & C_2' &= C_2/k\tau_i, & D_2' &= D_2/k\tau_i \\ G_2' &= G_2/2(1-\nu)l^2k\tau_i, & H_2' &= H_2/2(1-\nu)l^2k\tau_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(36)$$

よって式 (35) の六元連立一次方程式を解くことにより未知係数  $A_2', B_2', C_2', D_2', G_2', H_2'$  は決定される。これらの係数を用いると熱応力関数 ( $\chi$ ) と偶応力関数 ( $\psi$ ) は

$$\chi = k\tau_i \left[ A_2' r^2 + B_2' r^{-2} + C_2' r^4 + D_2' + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{\lambda_n^2} \{ J_2(\lambda_n r) Y_2(\lambda_n b) - J_2(\lambda_n b) Y_2(\lambda_n r) \} e^{-\kappa \lambda_n^2 t} \right] \cos 2\theta \dots\dots(37)$$

$$\psi = 2(1-\nu)l^2k\tau_i \left\{ (12C_2' + \bar{A}_2) r^2 + (4D_2' - \bar{B}_2) r^{-2} + G_2' I_2\left(\frac{r}{l}\right) + H_2' K_2\left(\frac{r}{l}\right) \right\} \sin 2\theta \dots\dots\dots(38)$$

よって各応力成分, 偶応力成分は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, & \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ \sigma_{r\theta} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}, & \sigma_{\theta r} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots(39)$$

$$\mu_{rz} = \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad \mu_{\theta z} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \dots\dots\dots(40)$$

で与えられる。無次元記号として

$$\left. \begin{aligned} \hat{\rho}\hat{\rho} &= \sigma_{rr}/E\alpha_i\tau_i, & \hat{\theta}\hat{\theta} &= \sigma_{\theta\theta}/E\alpha_i\tau_i, & \hat{\rho}\hat{\theta} &= \sigma_{r\theta}/E\alpha_i\tau_i, & \hat{\theta}\hat{\rho} &= \sigma_{\theta r}/E\alpha_i\tau_i \\ \mu_{\rho z} &= \mu_{rz}/aE\alpha_i\tau_i, & \mu_{\theta z} &= \mu_{\theta z}/aE\alpha_i\tau_i, & \rho &= r/a, & \rho_0 &= b/a, & l_0 &= l/a, & t_d &= \kappa t/a^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(41)$$

を用いると, 無次元応力, 偶応力は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \hat{\rho}\hat{\rho} &= - \left[ 2(A_2^* + 3B_2^* \rho^{-4} + 2D_2^* \rho^{-2}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{\beta_n^2 \rho} \left\{ Y_2(\beta_n \rho_0) \left\{ \beta_n J_1(\beta_n \rho) - \frac{6}{\rho} J_2(\beta_n \rho) \right\} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - J_2(\beta_n \rho_0) \left\{ \beta_n Y_1(\beta_n \rho) - \frac{6}{\rho} Y_2(\beta_n \rho) \right\} \right\} e^{-\beta_n^2 t_d} + 4(1-\nu)l_0^2 \left\{ 12C_2^* + \bar{A}_2^* - 3(4D_2^* - \bar{B}_2^*) \rho^{-4} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + G_2^* \left\{ \frac{1}{l_0 \rho} I_1\left(\frac{\rho}{l_0}\right) - \frac{3}{\rho^2} I_2\left(\frac{\rho}{l_0}\right) \right\} - H_2^* \left\{ \frac{1}{l_0 \rho} K_1\left(\frac{\rho}{l_0}\right) + \frac{3}{\rho^2} K_2\left(\frac{\rho}{l_0}\right) \right\} \right\} \right] \cos 2\theta \dots\dots\dots(42) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\theta}\hat{\theta} &= \left[ 2(A_2^* + 3\beta_2^* \rho^{-4} + 6C_2^* \rho^2) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{\beta_n^2} \left\{ Y_2(\beta_n \rho_0) \left\{ \left( \frac{6}{\rho^2} - \beta_n^2 \right) J_2(\beta_n \rho) - \frac{\beta_n}{\rho} J_1(\beta_n \rho) \right\} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - J_2(\beta_n \rho_0) \left\{ \left( \frac{6}{\rho^2} - \beta_n^2 \right) Y_2(\beta_n \rho) - \frac{\beta_n}{\rho} Y_1(\beta_n \rho) \right\} \right\} e^{-\beta_n^2 t_d} + 4(1-\nu)l_0^2 \left\{ (12C_2^* + \bar{A}_2^*) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 3(4D_2^* - \bar{B}_2^*) \rho^{-4} + G_2^* \left\{ \frac{1}{l_0 \rho} I_1\left(\frac{\rho}{l_0}\right) - \frac{3}{\rho^2} I_2\left(\frac{\rho}{l_0}\right) \right\} - H_2^* \left\{ \frac{1}{l_0 \rho} K_1\left(\frac{\rho}{l_0}\right) + \frac{3}{\rho^2} K_2\left(\frac{\rho}{l_0}\right) \right\} \right\} \right] \cos 2\theta \dots\dots\dots(43) \end{aligned}$$

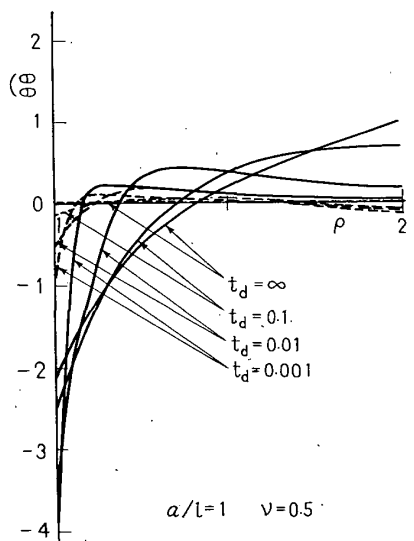


図 3  $\theta=0$  軸上の  $\hat{\theta}\hat{\theta}$  の応力分布 (点線は偶応力を考慮しない場合)

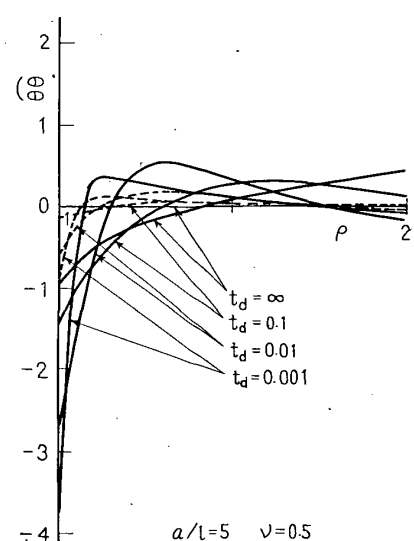


図 4  $\theta=0$  軸上の  $\hat{\theta}\hat{\theta}$  の応力分布 (点線は偶応力を考慮しない場合)

$$\widehat{\theta} = \left[ 2(A_2^* - 3B_2^*\rho^{-4} + 3C_2^*\rho^2 - D_2^*\rho^{-2}) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{\beta_n^2 \rho} \left\{ Y_2(\beta_n \rho_0) \left\{ \beta_n J_1(\beta_n \rho) - \frac{3}{\rho} J_2(\beta_n \rho) \right\} - J_2(\beta_n \rho_0) \left\{ \beta_n Y_1(\beta_n \rho) - \frac{3}{\rho} Y_2(\beta_n \rho) \right\} \right\} e^{-\beta_n^2 t_d} + 2(1-\nu)l_0^2 \left[ 2(12C_2^* + \bar{A}_2^*) + 6(4D_2^* - \bar{B}_2^*)\rho^{-4} - G_2^* \left\{ \frac{1}{l_0 \rho} I_1\left(\frac{\rho}{l_0}\right) - \frac{6}{\rho^2} I_2\left(\frac{\rho}{l_0}\right) \right\} + H_2^* \left\{ \frac{1}{l_0 \rho} K_1\left(\frac{\rho}{l_0}\right) + \frac{6}{\rho^2} K_2\left(\frac{\rho}{l_0}\right) \right\} \right] \right] \sin 2\theta \dots (44)$$

$$\widehat{\rho} = \left[ 2(A_2^* - 3B_2^*\rho^{-4} + 3C_2^*\rho^2 - D_2^*\rho^{-2}) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{\beta_n^2 \rho} \left\{ Y_2(\beta_n \rho_0) \left\{ \beta_n J_1(\beta_n \rho) - \frac{3}{\rho} J_2(\beta_n \rho) \right\} - J_2(\beta_n \rho_0) \left\{ \beta_n Y_1(\beta_n \rho) - \frac{3}{\rho} Y_2(\beta_n \rho) \right\} \right\} e^{-\beta_n^2 t_d} + 2(1-\nu)l_0^2 \left[ 2(12C_2^* + \bar{A}_2^*) + 6(4D_2^* - \bar{B}_2^*)\rho^{-4} + G_2^* \left\{ -\frac{1}{l_0 \rho} I_1\left(\frac{\rho}{l_0}\right) + \left(\frac{1}{l_0^2} + \frac{6}{\rho^2}\right) I_2\left(\frac{\rho}{l_0}\right) \right\} + H_2^* \left\{ \left(\frac{1}{l_0^2} + \frac{6}{\rho^2}\right) K_2 - \frac{1}{l_0 \rho} K_1\left(\frac{\rho}{l_0}\right) \right\} \right] \right] \sin 2\theta \dots (45)$$

$$\mu_{\rho z} = 2(1-\nu)l_0^2 \left[ 2(12C_2^* + \bar{A}_2^*)\rho - 2(4D_2^* - \bar{B}_2^*)\rho^{-3} + G_2^* \left\{ \frac{1}{l_0} I_1\left(\frac{\rho}{l_0}\right) - \frac{2}{\rho} I_2\left(\frac{\rho}{l_0}\right) \right\} - H_2^* \left\{ \frac{1}{l_0} K_1\left(\frac{\rho}{l_0}\right) + \frac{2}{\rho} K_2\left(\frac{\rho}{l_0}\right) \right\} \right] \sin 2\theta \dots (46)$$

$$\mu_{\theta z} = 4(1-\nu)l^2 \left[ (12C_2^* + \bar{A}_2^*)\rho + (4D_2^* - \bar{B}_2^*)\rho^{-3} + G_2^* \frac{1}{\rho} I_2\left(\frac{\rho}{l_0}\right) + H_2^* \frac{1}{\rho} K_2\left(\frac{\rho}{l_0}\right) \right] \cos 2\theta \dots (47)$$

ここで  $\beta_n$  は  $J_2(\beta)Y_2(\beta\rho_0) - J_2(\beta\rho_0)Y_2(\beta) = 0$  を満足する  $\beta$  の第  $n$  番目の正根である。また

$$A_2^* = A_2, \quad B_2^* = B_2'/a^4, \quad C_2^* = C_2'a^2, \quad D_2^* = D_2 a^2$$

$$\bar{A}_2^* = \bar{A}_2 a^2, \quad \bar{B}_2^* = \bar{B}_2/a^2, \quad G_2^* = G_2', \quad H_2^* = H_2'$$

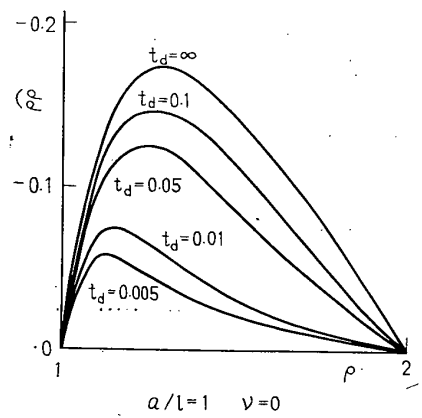


図5  $\theta=0$  軸上の  $\widehat{\rho\rho}$  の応力分布

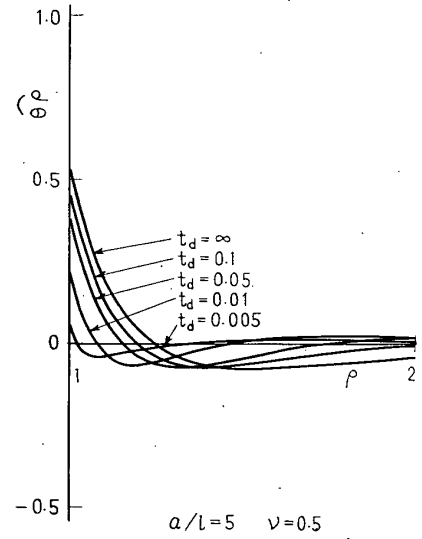


図7  $\theta=0$  軸上の  $\widehat{\theta\theta}$  の応力分布

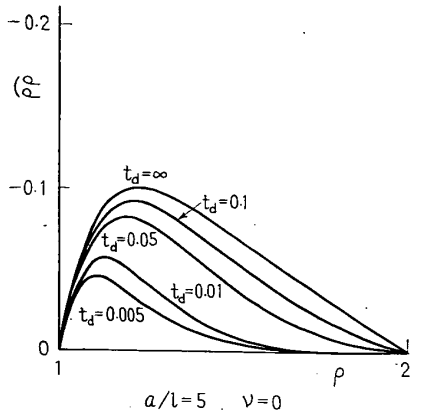


図6  $\theta=0$  軸上の  $\widehat{\rho\rho}$  の応力分布

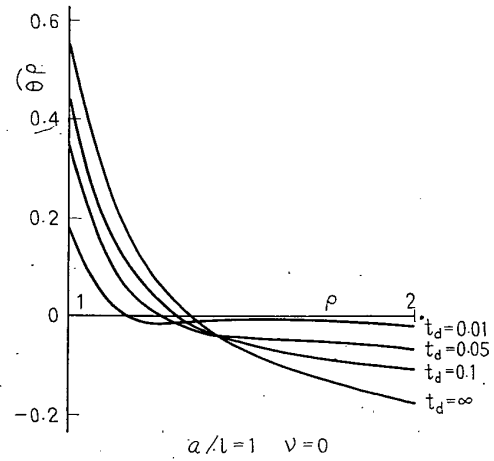


図8  $\theta=0$  軸上の  $\widehat{\theta\theta}$  の応力分布

$$\xi_n = \pi / \{J_2(\beta_n \rho_0) / J_2(\beta_n) - J_2(\beta_n) / J_2(\beta_n \rho_0)\}$$

3. 数値計算および考察

上記の結果に対し、次記の各場合に対し数値計算を行った。

(第一例)

$$a/l=5, \nu=0.5, b/a=2$$

$$a/l=5; \nu=0.0, b/a=2$$

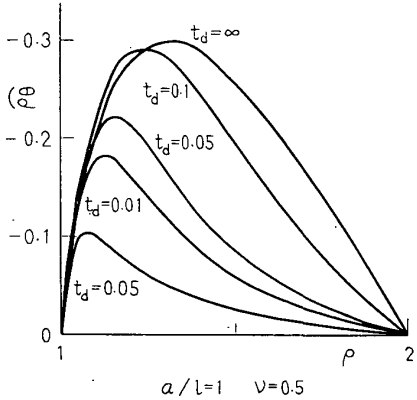


図 9  $\theta=0$  軸上の  $\hat{\rho\theta}$  の応力分布

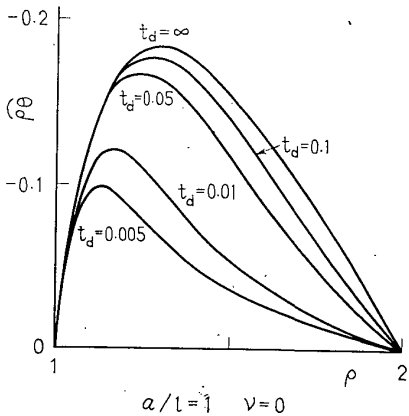


図 10  $\theta=0$  軸上の  $\hat{\rho\theta}$  の応力分布

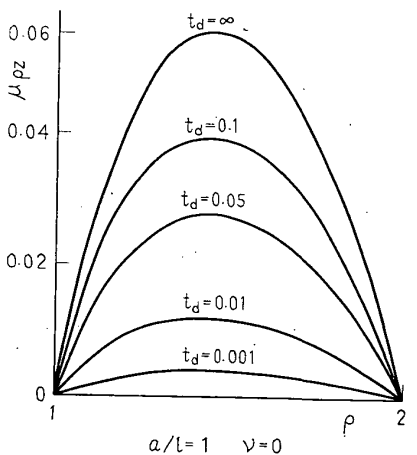


図 11  $\theta=0$  軸上の  $\mu_{\rho z}$  の偶応力分布

(第二例)

$$a/l=1, \nu=0.5, b/a=2$$

$$a/l=1, \nu=0.0, b/a=2$$

上記の材料定数および形状に対し、無次元時間の 0.01, 0.05, 0.1,  $\infty$  を採用して計算し、熱応力および偶応力分布を求めた。ただし、解の中に含まれる各係数の値は、計算機中に内蔵させ、直接係数の数値は求めず、最終の応力値のみを得た。 $t \rightarrow \infty$  における各

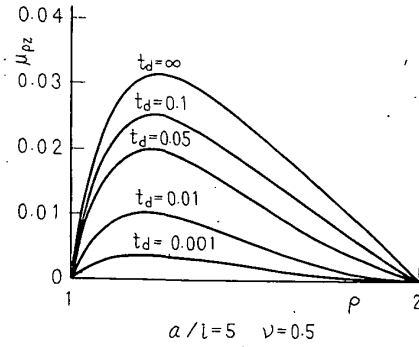


図 12  $\theta=0$  軸上の  $\mu_{\rho z}$  の偶応力分布

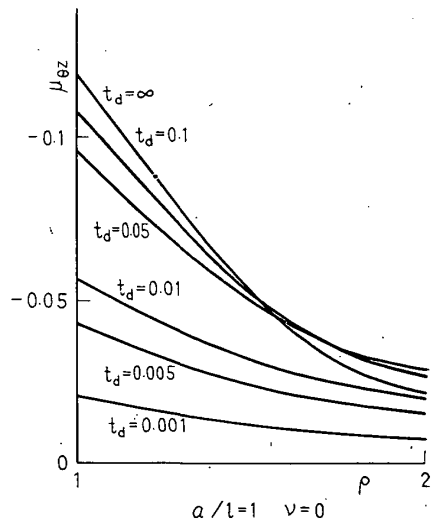


図 13  $\theta=0$  軸上の  $\mu_{\theta z}$  の偶応力分布

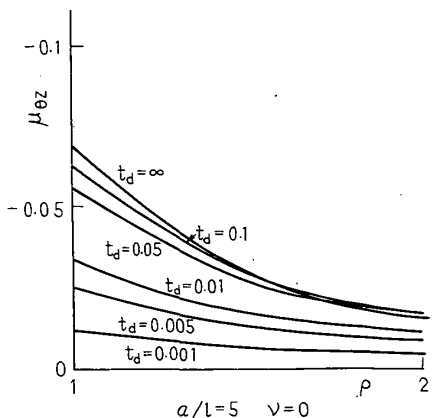
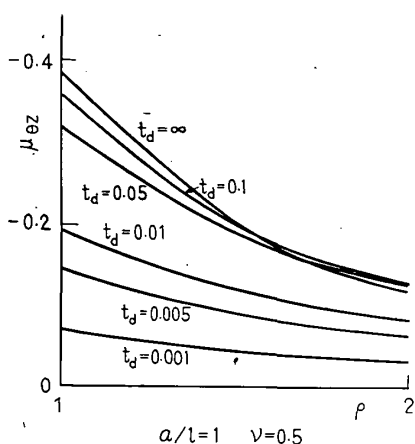
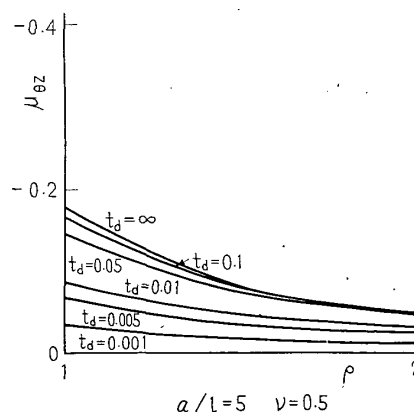


図 14  $\theta=0$  軸上の  $\mu_{\theta z}$  の偶応力分布

図 15  $\theta=0$  軸上の  $\mu_{\theta z}$  の偶応力分布

応力値は、定常状態のものであり、これらの結果は著者の前の報告と一致する。図 1 より図 10 までに熱応力成分の分布を示した。図 1~4 において点線は  $l=0$ 、すなわち偶応力を考慮しない場合の結果を示す。 $t_d=\infty$  のときの  $l=0$  のときは応力は消失するから点線は  $\rho$  軸に一致する。これらの結果より明らかなように、各時間に対し、 $l=0$  のときより最大フープ応力は大きくなっているため、この温度境界条件の非定常熱応力問題では、偶応力を考慮に入れても、熱応力集中を緩和させないで、かえって偶応力の影響が大きくなると（すなわち  $l$  の増大とともに）、応力集中度が高められる。このことは一般に偶応力を考慮に入れるとき、応力集中を緩和されるという従来の諸結果と反することになる。しかしこのことは、偶応力を考慮しないときには、定常状態では熱応力を発生しない温度条件の場合の結果であることを注意しなければならない。すなわち  $\cos n\theta$  の温度境界条件で  $n \geq 2$  のときには、 $l=0$  のときには定常熱応力は発生しないから、本問題の場合に無時限時間で  $\infty$ 、すなわち定常温度分

図 16  $\theta=0$  軸上の  $\mu_{\theta z}$  の偶応力分布

布状態になれば偶応力を考慮した熱応力の存在のみの結果となる。

つぎに偶応力は図 11 より図 16 に示されるように、時間とともに増大して行き、無次元時間で  $\infty$  で、定常偶応力分布に一致する。

その他で注意すべきことは、偶応力理論を考慮することにより、せん断応力の対称性がなくなることより、図 7 および図 8 に示されるように、内外境界位置で  $\widehat{\rho\theta}$  は消失しても、 $\widehat{\theta\rho}$  はかなり大きな値をもつことである。したがって、せん断に弱い材料に対しては、このことも十分考慮されねばならないことになる。

なお数値計算はすべて京都大学および名古屋大学の計算センターの FACOM 230-60 によった。

## 文 献

- (1) 竹内・山里, 機論, 38-310 (昭 47-6), 1201.
- (2) 竹内・山里, 機論, 38-312 (昭 47-8), 1948.
- (3) Mindlin, R.D. and Tiersten, H.F., *Arch. Rat. Mech.*, 11-5 (1962), 415.
- (4) Nowacki, W., *Bull. Pol. Sci.*, 12-2 (1966), 129.

## 討 論

〔質問〕 渥美 光 (東北大学工学部)

定常状態で熱応力が発生する温度条件の場合には、応力集中度が古典解にくらべ緩和されるかどうか興味ある問題と思う。この点に関するご見解、あるいは数値結果のある文献などご存じならご教示されたい。

〔回答〕 ご指示のように定常状態で熱応力が発生する温度条件の場合には、確かに応力集中が緩和され

る結果が出ている。その一例として四角形に円孔のある場合の熱応力解析が、その数学的展開については第 1 の文献(付1)に、またどのような材料の場合に、どのような形状の場合に、どれほど緩和されるかは第 2 の文献(付2)に報告している。

- (付1) Takeuti, Y. and Noda, N., *Int. J. Engng. Sci.*, 11-5 (1973), 519.
- (付2) 竹内・ほか 2 名, 材料, 22-234 (昭 48-3), 213.