

539.377.01 : 539.4.019.1 : 534.2

持続熱源による円柱の動的熱応力*

野田直剛**, 竹内洋一郎**

1. 緒 言

円形領域に点熱源が作用する場合の非定常熱応力問題に関しては、著者のひとりが瞬間点熱源の問題に関し前に発表し⁽¹⁾、その後同一問題について Hsu がアメリカ機械学会で発表し⁽²⁾、最近 Hsu は持続点熱源についても発表している⁽³⁾。これらはいずれも準静的処理であって慣性項を無視している。しかしながら温度変化が急激な熱衝撃の問題が最近重要視されるに至り、立上りの熱応力を問題とするとき、準静的処理を不相当とする解析も多くなった。すなわち温度変化が急激なときには、いわゆる動的問題として、運動方程式において慣性項を考慮に入れて解析することになる。この種の問題については Danilovskaya⁽⁴⁾の研究に端を発し、最近多くの報告があるがそれらの多くは解析の容易な無限領域または、半無限領域の問題で、有限領域についてはきわめて少なく、Dhaliwal⁽⁵⁾らの報告が見られるようである。著者らは先の発表の瞬間点熱源の同一問題を改めて動的処理し、最初一様に 0° の円形領域の中心において、 $t \geq 0$ の瞬間より強さが時間とともに変化する点熱源が作用し、その熱作用が持続する場合の動的熱応力を解析した。この種の工学上の重要な応用例は溶接問題や原子炉における放射の問題がある。

2. 解 析

最初一様に 0°C であった円形領域の中心において、 $t \geq 0$ の瞬間より時間の関数である点熱源が作用し、その作用がそのまま持続するいわゆる持続点熱源による円形領域の軸対称動的熱応力問題を解析する。極座標 (r, θ) における熱伝導方程式において軸対称問題の場合、温度変化を τ とすれば

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau}{\partial r} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \tau}{\partial t} \dots\dots\dots(1)$$

ただし κ は温度伝導率、 t は時間である。応力成分 $(\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta})$ による運動方程式は、半径方向の変位成分

を u_r とすれば

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = \gamma \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \dots\dots\dots(2)$$

ただし γ は密度である。温度変化のある場合の応力-ひずみの関係式は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \frac{u_r}{r} - \beta \tau \\ \sigma_{\theta\theta} &= \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r} + (\lambda + 2\mu) \frac{u_r}{r} - \beta \tau \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

ただし λ, μ はラーメの定数、 β は熱応力の定数で $\beta = \alpha_r(3\lambda + 2\mu)$ 、 α_r は線膨張係数である。式(3)を式(2)に代入し、変位成分 u_r による運動方程式は

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} + \alpha_1 \frac{\partial \tau}{\partial r} \dots\dots(4)$$

ただし $\alpha_1 = \beta/(\lambda + 2\mu)$ 、 $v_0 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\gamma}$ 、 v_0 は縦波の伝ば速度である。ゆえに問題は式(1)、(4)を与えられた条件に合わせて解くことになる。初期条件として

$$\tau = 0, \quad u_r = \partial u_r / \partial t = 0 \dots\dots\dots(5)$$

境界条件として、 h を相対熱伝達率とすれば

$$r = a \text{ にて } -\partial \tau / \partial r = h\tau, \quad \sigma_{rr} = 0 \dots\dots(6)$$

中心に持続熱源 $Q(t)\gamma c$ が作用する条件として

$$\lim_{r \rightarrow 0} 2\pi r \frac{\partial \tau}{\partial r} = -\frac{Q(t)}{\kappa}, \quad \kappa = \frac{\lambda_r}{\gamma c} \dots\dots\dots(7)$$

ここで c は比熱、 λ_r は熱伝導率である。式(1)、(4)を解くために

$$f^*(r, s) = \int_0^\infty f(r, t) e^{-st} dt \dots\dots\dots(8)$$

で定義されるラプラス変換を導入する。初期条件式(5)を考慮して式(1)、(4)をラプラス変換すれば

$$\frac{d^2 \tau^*}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\tau^*}{dr} - \frac{s}{\kappa} \tau^* = 0 \dots\dots\dots(9)$$

$$\frac{d^2 u_r^*}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r^*}{dr} - \left(\frac{s^2}{v_0^2} + \frac{1}{r^2} \right) u_r^* = \alpha_1 \frac{d\tau^*}{dr} \dots\dots\dots(10)$$

境界条件は

$$r = a \text{ にて } -d\tau^*/dr = h\tau^*, \quad \sigma_{rr}^* = 0 \dots\dots(11)$$

中心持続点熱源の条件は

$$\lim_{r \rightarrow 0} 2\pi r d\tau^*/dr = -Q^*/\kappa \dots\dots\dots(12)$$

式(9)の一般解は I_0, K_0 をそれぞれ 0 階の第 1 種、

* 昭和 46 年 11 月 12 日 東海支部創立 20 周年記念講演会において講演、原稿受付 昭和 46 年 12 月 27 日。
** 正員、静岡大学工学部 (浜松市城北 3-5-1)。

第2種変形ベッセル関数とすると

$$\tau^*(r, s) = A(s)I_0(qr) + B(s)K_0(qr) \dots\dots\dots (13)$$

ただし $q = \sqrt{s/\kappa}$. つぎに式 (10) の一般解はラグランジュの定数変化法により

$$u_r^*(r, s) = \{C(s) - \phi^*(r, s)\}I_1(sr/v_0) + \{D(s) + \phi^*(r, s)\}K_1(sr/v_0) \dots\dots\dots (14)$$

ただし I_1, K_1 はそれぞれ一階の第1種, 第2種の変形ベッセル関数で, $\phi^*(r, s), \phi^*(r, s)$ は次式で定義される.

$$\phi^*(r, s) = \alpha_1 \int_r^a r I_1\left(\frac{s}{v_0} r\right) \frac{d\tau^*}{dr} dr \dots\dots\dots (15)$$

$$\phi^*(r, s) = \alpha_1 \int_r^a r K_1\left(\frac{s}{v_0} r\right) \frac{d\tau^*}{dr} dr \dots\dots\dots (16)$$

式 (15), (16) に式 (13) を代入すると

$$\begin{aligned} \phi^*(r, s) = \alpha_1 \left[A(s) \left\{ r I_0(qr) I_1(sr/v_0) - s/v_0 \int r I_0(sr/v_0) I_0(qr) dr \right\} + B(s) \left\{ r K_0(qr) I_1(sr/v_0) \right. \right. \\ \left. \left. - s/v_0 \int r K_0(qr) I_0(sr/v_0) dr \right\} \right]_r^a \dots\dots\dots (15)' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi^*(r, s) = \alpha_1 \left[A(s) \left\{ r I_0(qr) K_1(sr/v_0) + s/v_0 \int r I_0(qr) K_0(sr/v_0) dr \right\} + B(s) \left\{ r K_0(qr) K_1(sr/v_0) \right. \right. \\ \left. \left. + s/v_0 \int r K_0(qr) K_0(sr/v_0) dr \right\} \right]_r^a \dots\dots\dots (16)' \end{aligned}$$

式 (15)', (16)' より次式が成立する.

$$\phi^*(a, s) = \phi^*(a, s) = 0, \quad I_1(sr/v_0) d\phi^*/dr = K_1(sr/v_0) d\phi^*/dr \dots\dots\dots (17)$$

像関数表示における温度分布は式 (13) を式 (11), (12) に代入することにより, 係数 $A(s), B(s)$ を決定しそれを式 (13) に代入することにより次式を得る.

$$\tau^*(r, s) = \frac{Q^*}{2\pi\kappa} \frac{h\{I_0(qa)K_0(qr) - K_0(qa)I_0(qr)\} + q\{I_1(qa)K_0(qr) + K_1(qa)I_0(qr)\}}{hI_0(qa) + qI_1(qa)} \dots\dots\dots (18)$$

一方変位成分 u_r^* は中心において有限でなければならぬから

$$D(s) = -\phi^*(0, s) \dots\dots\dots (19)$$

式 (14) を式 (6) に代入し式 (17), (19) を考慮すれば

$$u_r^*(r, s) = \{C(s) - \phi^*(r, s)\}I_1(sr/v_0) + \{\phi^*(r, s) - \phi^*(0, s)\}K_1(sr/v_0) \dots\dots\dots (20)$$

ただし

$$C(s) = \frac{\beta a \tau^*(a, s) - \phi^*(0, s) \{(\lambda + 2\mu)(sa/v_0)K_0(sa/v_0) + 2\mu K_1(sa/v_0)\}}{(\lambda + 2\mu)(sa/v_0)I_0(sa/v_0) - 2\mu I_1(sa/v_0)}$$

式 (20) の ϕ^*, ϕ^* の積分を実行すると変位成分は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} u_r^*(r, s) = -\frac{\alpha_1 Q^*}{2\pi} \left[\frac{\left(s^2 + \frac{\mu_\lambda v_0^2 h}{a}\right) I_1\left(\frac{s}{v_0} r\right)}{s(v_0^2 - \kappa s) \{hI_0(qa) + qI_1(qa)\} \left\{ \frac{sa}{v_0} I_0\left(\frac{s}{v_0} a\right) - \mu_\lambda I_1\left(\frac{s}{v_0} a\right) \right\}} \right. \\ \frac{sa \left\{ K_0\left(\frac{s}{v_0} a\right) I_1\left(\frac{s}{v_0} r\right) + I_0\left(\frac{s}{v_0} a\right) K_1\left(\frac{s}{v_0} r\right) \right\} + v_0 \mu_\lambda \left\{ K_1\left(\frac{s}{v_0} a\right) I_1\left(\frac{s}{v_0} r\right) - I_1\left(\frac{s}{v_0} a\right) K_1\left(\frac{s}{v_0} r\right) \right\}}{(v_0^2 - \kappa s) \left\{ \frac{sa}{v_0} I_0\left(\frac{s}{v_0} a\right) - \mu_\lambda I_1\left(\frac{s}{v_0} a\right) \right\}} \\ \left. + \frac{v_0^2}{\kappa} \frac{h\{K_0(qa)I_1(qr) + I_0(qa)K_1(qr)\} + q\{I_1(qa)K_1(qr) - K_1(qa)I_1(qr)\}}{q(v_0^2 - \kappa s) \{hI_0(qa) + qI_1(qa)\}} \right] \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

式 (20), (21) のラプラス逆変換を実行する. $Q^*(s)$ が一般の任意の関数のままでラプラス逆変換を実行するために合成則を用いる. そこで τ^*, u_r^* を次式に置く.

$$\tau^*(r, s) = Q^*(s) \tau_1^*(r, s) \dots\dots\dots (22)$$

$$u_r^*(r, s) = Q^*(s) u_{r1}^*(r, s) \dots\dots\dots (23)$$

ここで

$$\tau_1^*(r, s) = \frac{1}{2\pi\kappa} \frac{h\{I_0(qa)K_0(qr) - K_0(qa)I_0(qr)\} + q\{I_1(qa)K_0(qr) + K_1(qa)I_0(qr)\}}{hI_0(qa) + qI_1(qa)} \dots\dots\dots (24)$$

$$u_{r_1}^*(r, s) = -\frac{\alpha_1}{2\pi} \left[\frac{\left(s^2 + \frac{\mu_\lambda v_e^2 h}{a}\right) I_1\left(\frac{s}{v_e} r\right)}{\left[s(v_e^2 - \kappa s)\{hI_0(qa) + qI_1(qa)\}\left\{\frac{sa}{v_e} I_0\left(\frac{s}{v_e} a\right) - \mu_\lambda I_1\left(\frac{s}{v_e} a\right)\right\}\right.} \right. \\ \left. - \frac{sa\left\{K_0\left(\frac{s}{v_e} a\right) I_1\left(\frac{s}{v_e} r\right) + I_0\left(\frac{s}{v_e} a\right) K_1\left(\frac{s}{v_e} r\right)\right\} + v_e \mu_\lambda \left\{K_1\left(\frac{s}{v_e} a\right) I_1\left(\frac{s}{v_e} r\right) - I_1\left(\frac{s}{v_e} a\right) K_1\left(\frac{s}{v_e} r\right)\right\}}{(v_e^2 - \kappa s)\left\{\frac{sa}{v_e} I_0\left(\frac{s}{v_e} a\right) - \mu_\lambda I_1\left(\frac{s}{v_e} a\right)\right\}} \right. \\ \left. + \frac{v_e^2 h\{K_0(qa)I_1(qr) + I_0(qa)K_1(qr)\} + q\{I_1(qa)K_1(qr) - K_1(qa)I_1(qr)\}}{\kappa q(v_e^2 - \kappa s)\{hI_0(qa) + qI_1(qa)\}} \right] \dots\dots\dots (25)$$

式 (24), (25) をラプラス逆変換すれば次式を得る (付録参照).

$$\tau_1(r, t) = \frac{1}{\pi a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_n r)}{\left(1 + \frac{\xi_n^2}{h^2}\right) J_0^2(\xi_n a)} e^{-\kappa \xi_n^2 t} \dots\dots\dots (26)$$

$$u_{r_1}(r, t) = \frac{\alpha_1}{2\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_1(\xi_n r) e^{-\kappa \xi_n^2 t}}{\xi_n a^2 \left(1 + \frac{\kappa^2}{v_e^2} \xi_n^2\right) \left(1 + \frac{\xi_n^2}{h^2}\right) J_1^2(\xi_n a)} \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\left\{\frac{\kappa^2 \xi_n^4}{v_e^2 h a} + \frac{\mu_\lambda}{a^2}\right\} I_1\left(\frac{\kappa}{v_e} \xi_n^2 r\right) e^{-\kappa \xi_n^2 t}}{\xi_n \left(1 + \frac{\kappa^2}{v_e^2} \xi_n^2\right) \left(1 + \frac{\xi_n^2}{h^2}\right) J_1(\xi_n a) \left\{\frac{\kappa}{v_e} \xi_n^2 a I_0\left(\frac{\kappa}{v_e} \xi_n^2 a\right) - \mu_\lambda I_1\left(\frac{\kappa}{v_e} \xi_n^2 a\right)\right\}} \right. \\ \left. - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\left(\mu_\lambda - \frac{\eta_m^2}{ha}\right) J_1\left(\frac{r}{a} \eta_m\right)}{a \left(1 + \frac{\kappa^2 \eta_m^2}{a^2 v_e^2}\right) \{1 - (\eta_m^2 + \gamma_1^2)\} J_1(\eta_m)} \right. \\ \left. \times \frac{\left[\begin{aligned} &M_0(z_m) \cos\{t_m - \theta_0(z_m)\} + \frac{z_m}{ha} M_1(z_m) \cos\left(t_m - \theta_1(z_m) + \frac{\pi}{4}\right) \\ &- \frac{\kappa \eta_m}{av_e} \left\{M_0(z_m) \sin\{t_m - \theta_0(z_m)\} + \frac{z_m}{ha} M_1(z_m) \sin\left(t_m - \theta_1(z_m) + \frac{\pi}{4}\right)\right\} \end{aligned} \right]}{M_0^2(z_m) + \left(\frac{z_m}{ha}\right)^2 M_1^2(z_m) + 2 \frac{z_m}{ha} M_0(z_m) M_1(z_m) \cos\left(\theta_0(z_m) - \theta_1(z_m) + \frac{\pi}{4}\right)} \right. \\ \left. - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu_\lambda J_1\left(\frac{r}{a} \eta_m\right) \left\{\frac{\kappa \eta_m}{av_e} \sin t_m - \cos t_m\right\}}{a \left(1 + \frac{\kappa^2 \eta_m^2}{a^2 v_e^2}\right) \{1 - (\eta_m^2 + \gamma_1^2)\} J_1(\eta_m) J_0(\eta_m)} \right] \dots\dots\dots (27)$$

ただし $\xi_n (n=1, 2, \dots)$ は

$$hJ_0(\xi a) - \xi J_1(\xi a) = 0 \dots\dots\dots (28)$$

を満足する第 n 番めの正根. $\eta_m (m=1, 2, \dots)$ は

$$\eta J_0(\eta) - \mu_\lambda J_1(\eta) = 0 \dots\dots\dots (29)$$

を満足する第 m 番めの正根である. J_0, J_1 はそれぞれ 0 階, 一階の第 1 種ベッセル関数で, M_l, θ_l はケルビンの ber, bei 関数を用いて

$$\left. \begin{aligned} M_l(z_m) &= (\text{ber}_l^2 z_m + \text{bei}_l^2 z_m)^{1/2} \\ \theta_l(z_m) &= \tan^{-1} \left(\frac{\text{bei}_l(z_m)}{\text{ber}_l(z_m)} \right) (l=0, 1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

式 (26), (27) において簡略化のため次記の記号を用いた.

$$\left. \begin{aligned} z_m &= \sqrt{\frac{v_e}{\kappa} a \eta_m}, & t_m &= \frac{v_e}{a} \eta_m t \\ \gamma_1 &= \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}, & \mu_\lambda &= \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

よって温度分布, 変位成分は次式により与えられる.

$$\tau(r, t) = Q(t) * \tau_1(r, t) = \int_0^t Q(t - \delta_1) \tau_1(r, \delta_1) d\delta_1 \dots\dots\dots (32)$$

$$u_r(r, t) = Q(t) * u_{r_1}(r, t) = \int_0^t Q(t - \delta_1) u_{r_1}(r, \delta_1) d\delta_1 \dots\dots\dots (33)$$

以上により熱発生 $c\gamma Q(t)$ が時間の関数として変化する場合について温度分布と変位成分の一般解表示が得

られ, 式 (32), (33) を式 (3) に代入することにより各応力成分の一般解表示が得られる。

実際例として熱発生が時間によって変化しない一定の場合, $Q=Q_0=$ 一定, について考える。式 (32), (33) の Q を Q_0 と置いて積分を実行することにより温度分布と変位成分は次式で表わされる。

$$\tau(r, t) = \frac{Q_0}{\pi a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_n r)}{\left(1 + \frac{\xi_n^2}{h^2}\right) \kappa \xi_n^2 J_1^2(\xi_n a)} (1 - e^{-\kappa \xi_n^2 t}) \dots \dots \dots (34)$$

$$u_r(r, t) = \frac{\alpha_1 Q_0}{2\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_1(\xi_n r)(1 - e^{-\kappa \xi_n^2 t})}{\kappa \xi_n^3 \left(1 + \frac{\kappa^2}{v_e^2} \xi_n^2\right) \left(1 + \frac{\xi_n^2}{h^2}\right) J_1^2(\xi_n a)} \right. \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \left\{ \frac{\kappa^2 \xi_n^4}{v_e^2 h a} + \frac{\mu_\lambda}{a^2} \right\} I_1 \left(\frac{\kappa}{v_e} \xi_n^2 r \right) (1 - e^{-\kappa \xi_n^2 t})}{\kappa \xi_n^3 \left(1 + \frac{\kappa^2}{v_e^2} \xi_n^2\right) \left(1 + \frac{\xi_n^2}{h^2}\right) J_1(\xi_n a) \left\{ \frac{\kappa}{v_e} \xi_n^2 a I_0 \left(\frac{\kappa}{v_e} \xi_n^2 a \right) - \mu_\lambda I_1 \left(\frac{\kappa}{v_e} \xi_n^2 a \right) \right\}} \\ - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \left(\mu_\lambda - \frac{\eta_m^2}{h a} \right) J_1 \left(\frac{r}{a} \eta_m \right)}{v_e \eta_m \left(1 + \frac{\kappa^2 \eta_m^2}{a^2 v_e^2}\right) \{1 - (\eta_m^2 + \gamma_1^2)\} J_1(\eta_m)} \\ \left. \begin{aligned} & \left[M_0(z_m) [\sin(t_m - \theta_0(z_m)) - \sin \theta_0(z_m)] + \frac{z_m}{h a} M_1(z_m) \left\{ \sin \left(t_m - \theta_1(z_m) + \frac{\pi}{4} \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \sin \left(\theta_1(z_m) - \frac{\pi}{4} \right) \right\} + \frac{\kappa \eta_m}{a v_e} \left[M_0(z_m) [\cos(t_m - \theta_0(z_m)) - \cos \theta_0(z_m)] \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{z_m}{h a} M_1(z_m) \left\{ \cos \left(t_m - \theta_1(z_m) + \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(\theta_1(z_m) - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \right] \right] \\ & + \frac{M_0^2(z_m) + \left(\frac{z_m}{h a} \right)^2 M_1^2(z_m) + 2 \frac{z_m}{h a} M_0(z_m) M_1(z_m) \cos \left(\theta_0(z_m) - \theta_1(z_m) + \frac{\pi}{4} \right)}{\dots} \right. \\ & \left. - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu_\lambda J_1 \left(\frac{r}{a} \eta_m \right) \left\{ \frac{\kappa \eta_m}{a v_e} (1 - \cos t_m) - \sin t_m \right\}}{v_e \eta_m \left(1 + \frac{\kappa^2 \eta_m^2}{a^2 v_e^2}\right) \{1 - (\eta_m^2 + \gamma_1^2)\} J_1(\eta_m) J_0(\eta_m)} \right] \dots \dots \dots (35) \end{aligned}$$

式 (34), (35) を式 (3) に代入すれば各応力成分 $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{rr} が得られる。そこで最終結果としての各成分を無次元化すれば次式によって表わされる。

$$T = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\zeta_n \rho) (1 - e^{-\zeta_n^2 t D})}{\zeta_n^2 (1 + \zeta_n^2 / H^2) J_1^2(\zeta_n)} \dots \dots \dots (36)$$

$$U = \frac{\beta_1}{\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\zeta_n^2 t D}}{\zeta_n^3 (1 + K^2 \zeta_n^2) (1 + \zeta_n^2 / H^2) J_1(\zeta_n)} \left\{ \frac{J_1(\zeta_n \rho)}{J_1(\zeta_n)} + \frac{(K^2 \zeta_n^4 / H + \mu_\lambda) I_1(K \zeta_n^2 \rho)}{K \zeta_n^2 I_0(K \zeta_n^2) - \mu_\lambda I_1(K \zeta_n^2)} \right\} \right. \\ - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{K(\mu_\lambda - \eta_m^2 / H)}{\eta_m (1 + K^2 \eta_m^2) \{1 - (\eta_m^2 + \gamma_1^2)\} J_1(\eta_m)} \\ \times \frac{J_1(\rho \eta_m)}{M_0^2(z_m) + \frac{z_m^2}{H^2} M_1^2(z_m) + 2 \frac{z_m}{H} M_0(z_m) M_1(z_m) \cos \left(\theta_0(z_m) - \theta_1(z_m) + \frac{\pi}{4} \right)} \\ \times \left[M_0(z_m) [\sin(t_m - \theta_0(z_m)) + \sin \theta_0(z_m)] + \frac{z_m}{H} M_1(z_m) \left\{ \sin \left(t_m - \theta_1(z_m) + \frac{\pi}{4} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \sin \left(\theta_1(z_m) - \frac{\pi}{4} \right) \right\} + K \eta_m \left\{ M_0(z_m) [\cos(t_m - \theta_0(z_m)) - \cos \theta_0(z_m)] \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{z_m}{H} M_1(z_m) \left\{ \cos \left(t_m - \theta_1(z_m) + \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(\theta_1(z_m) - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \right\} \right] \\ \left. - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{K \mu_\lambda J_1(\rho \eta_m) \{K \eta_m (1 - \cos t_m) - \sin t_m\}}{\eta_m (1 + K^2 \eta_m^2) \{1 - (\eta_m^2 + \gamma_1^2)\} J_0(\eta_m) J_1(\eta_m)} \right] \dots \dots \dots (37)$$

$$\widehat{\theta\theta} = \frac{\beta_1}{\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\zeta_n^2 t D}}{\zeta_n^3 (1 + K^2 \zeta_n^2) (1 + \zeta_n^2 / H^2) J_1^2(\zeta_n)} \left[\frac{(K^2 \zeta_n^4 / H + \mu_\lambda) J_1(\zeta_n)}{K \zeta_n^2 I_0(K \zeta_n^2) - \mu_\lambda I_1(K \zeta_n^2)} \right. \right. \\ \left. \left. \times \left\{ \gamma_1 K \zeta_n^2 J_0(K \zeta_n^2 \rho) + \frac{\mu_\lambda}{\rho} J_1(K \zeta_n^2 \rho) \right\} - \zeta_n (K^2 \zeta_n^2 + \mu_\lambda) J_0(\rho \zeta_n) + \frac{\mu_\lambda}{\rho} J_1(\rho \zeta_n) \right] \right]$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{K(\mu_\lambda - \eta_m^2/H)}{\eta_m(1+K^2\eta_m^2)\{1-(\eta_m^2+\gamma_1^2)\}J_1(\eta_m)} \\
 & \times \frac{\gamma_1\eta_m J_0(\rho\eta_m) + (\mu_\lambda/\rho)J_1(\rho\eta_m)}{M_0^2(z_m) + (z_m^2/H^2)M_1^2(z_m) + 2(z_m/H)M_0(z_m)M_1(z_m)\cos(\theta_0(z_m) - \theta_1(z_m) + \pi/4)} \\
 & \times \left[M_0(z_m)[\sin(t_m - \theta_0(z_m)) + \sin\theta_0(z_m)] + \frac{z_m}{H}M_1(z_m)\left\{\sin\left(t_m - \theta_1(z_m) + \frac{\pi}{4}\right) \right. \right. \\
 & \left. \left. - \sin\left(\theta_1(z_m) - \frac{\pi}{4}\right)\right\} + K\eta_m \left[M_0(z_m)[\cos(t_m - \theta_0(z_m)) - \cos\theta_0(z_m)] \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{z_m}{H}M_1(z_m)\left\{\cos\left(t_m - \theta_1(z_m) + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\theta_1(z_m) - \frac{\pi}{4}\right)\right\}\right] \right] \\
 & - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{K\mu_\lambda\{\gamma_1\eta_m J_0(\rho\eta_m) + (\mu_\lambda/\rho)J_1(\rho\eta_m)\}\{K\eta_m(1 - \cos t_m) - \sin t_m\}}{\eta_m(1+K^2\eta_m^2)\{1-(\eta_m^2+\gamma_1^2)\}J_0(\eta_m)J_1(\eta_m)} \dots\dots\dots(38) \\
 \widehat{\rho\rho} = & \frac{\beta}{\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\zeta_n^2 t_D}}{\zeta_n^3(1+K^2\zeta_n^2)(1+\zeta_n^2/H^2)J_1(\zeta_n)} \left[\frac{(K\zeta_n^4/H + \mu_\lambda)J_1(\zeta_n)}{K\zeta_n^2 I_0(K\zeta_n^2) - \mu_\lambda I_1(K\zeta_n^2)} \right. \right. \\
 & \left. \left. \times \left\{ K\zeta_n^2 I_0(K\zeta_n^2 \rho) - \frac{\mu_\lambda}{\rho} I_1(K\zeta_n^2 \rho) \right\} - \left\{ K^2 \zeta_n^3 J_0(\zeta_n \rho) + \frac{\mu_\lambda}{\rho} J_1(\zeta_n \rho) \right\} \right] \right. \\
 & - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{K(\mu_\lambda - \eta_m^2/H)}{\eta_m(1+K^2\eta_m^2)\{1-(\eta_m^2+\gamma_1^2)\}J_1(\eta_m)} \\
 & \times \frac{\eta_m J_0(\rho\eta_m) - (\mu_\lambda/\rho)J_1(\rho\eta_m)}{M_0^2(z_m) + (z_m^2/H^2)M_1^2(z_m) + 2(z_m/H)M_0(z_m)M_1(z_m)\cos(\theta_0(z_m) - \theta_1(z_m) + \pi/4)} \\
 & \times \left[M_0(z_m)[\sin(t_m - \theta_0(z_m)) + \sin\theta_0(z_m)] + \frac{z_m}{H}M_1(z_m)\left\{\sin\left(t_m - \theta_1(z_m) + \frac{\pi}{4}\right) \right. \right. \\
 & \left. \left. - \sin\left(\theta_1(z_m) - \frac{\pi}{4}\right)\right\} + K\eta_m \left[M_0(z_m)[\cos(t_m - \theta_0(z_m)) - \cos\theta_0(z_m)] \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{z_m}{H}M_1(z_m)\left\{\cos\left(t_m - \theta_1(z_m) + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\theta_1(z_m) - \frac{\pi}{4}\right)\right\}\right] \right] \\
 & - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{K\mu_\lambda\{\eta_m J_0(\rho\eta_m) - (\mu_\lambda/\rho)J_1(\rho\eta_m)\}\{K\eta_m(1 - \cos t_m) - \sin t_m\}}{\eta_m(1+K^2\eta_m^2)\{1-(\eta_m^2+\gamma_1^2)\}J_0(\eta_m)J_1(\eta_m)} \dots\dots\dots(39)
 \end{aligned}$$

ただし $\eta_m(m=1, 2, \dots)$ は
 $\eta J_0(\eta) - \mu_\lambda J_1(\eta) = 0 \dots\dots\dots(39)'$
 を満足する第 m 番めの正根. $\zeta_n(n=1, 2, \dots)$ は
 $J_0(\zeta) - \frac{\zeta}{H}J_1(\zeta) = 0 \dots\dots\dots(39)''$
 を満足する第 n 番めの正根. 上式において使用した無次元化量と簡略記号は次式のとおりである.

$$\left. \begin{aligned}
 T &= \frac{\kappa\tau}{Q_0}, \quad U = \frac{\kappa u_r}{\alpha_\tau a Q_0}, \quad \widehat{\theta\theta} = \frac{\kappa\sigma_{\theta\theta}}{\alpha_\tau Q_0(\lambda+2\mu)} \\
 \widehat{\rho\rho} &= \frac{\kappa\sigma_{rr}}{\alpha_\tau Q_0(\lambda+2\mu)}, \quad \rho = \frac{r}{a}, \quad K = \frac{\kappa}{v_0 a} \\
 t_D &= \frac{\kappa}{a^2} t, \quad t_m = \frac{\eta_m}{K} t_D, \quad H = ha, \quad z_m = \sqrt{\frac{\eta_m}{K}} \\
 \gamma_1 &= \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}, \quad \mu_\lambda = \frac{2\mu}{\lambda+2\mu}, \quad \beta_1 = \frac{1-\nu}{1+\nu} \dots\dots\dots(40)
 \end{aligned} \right\}$$

ν はポアソン比である.

3. 数値計算結果

式 (36)~(39) に与えられた各成分の数値計算例として、
 温度分布 T と応力成分 $\widehat{\theta\theta}$ を無次元時間 t_D をパラ

メータとして図 1, 2 に示した. また立上がりにおける応力成分 $\widehat{\theta\theta}$ の挙動を調べるため、無次元化時間として t_D/K を横軸にとり境界上の応力成分 $\widehat{\theta\theta}$ を図 3 に示す. 応力成分 $\widehat{\theta\theta}$ は式 (38) より時間に関し指数的に変化する成分と、時間に関し振動的に変化する成分の和として表わされる. なお、実際の数値計算実行のため採用した材料定数は軟鋼を例にとり、 $\nu=1/3$, $\mu=7.55 \times 10^{11}$ dyn/cm², $\rho=7.85$ g/cm³, $\kappa=0.12$ cm²/s で、このとき $v_0=6.202567 \times 10^5$ cm/s で、こ

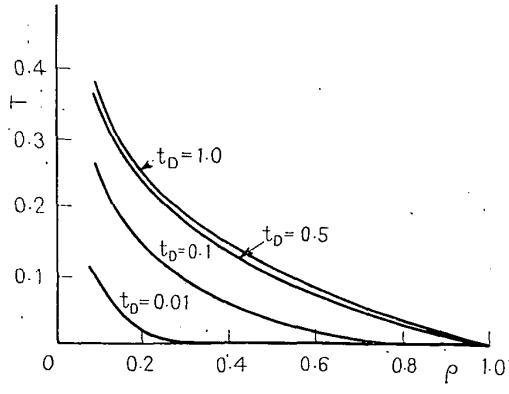
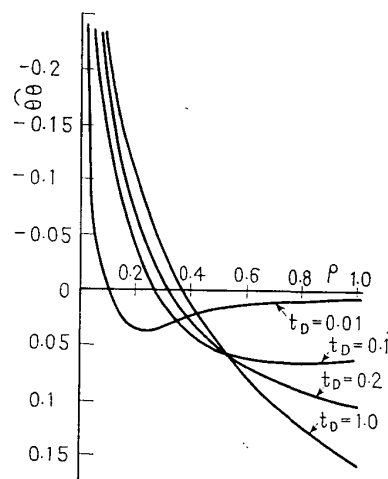


図 1 温度分布

これらの値のとき、もし $K=1.93 \times 10^{-7}$ の値をとると $a=1 \text{ cm}$ となる。上記の材料定数はいずれも温度依存性があるが、本論文では解析を容易にするため温度に関し定数とした。また境界における熱伝達は良好として $h \rightarrow \infty$ の場合を示してあるが、 h が一般の場合は同様な手続きで解析できる。点熱源の作用位置は特異点となり、図2のグラフにおいて $\rho \rightarrow 0$ で ∞ になることになる。現実にはこの点では直ちに塑性変形に移行するものと考えられる。なお、動的効果のめいりょうに出るのは立上りの瞬時のときだけであるが、図3の $t_D/K=1$ は $t_D=1.93 \times 10^{-7}$ で図2の時間の座標と著しい差がある。通常の工業材料の K の値に対する図2の結果においては、 $t_D \geq 0.01$ の無次元化時間に対し、動的効果はほとんど現われない。このことは $\hat{\theta}\theta$ の表示式において K が小さいとき振動項の値が小さいことからわかる。指数項においても動的効果を含んでいるが、 $t_D \geq 0.01$ でほとんど準定常の解と一致する*。

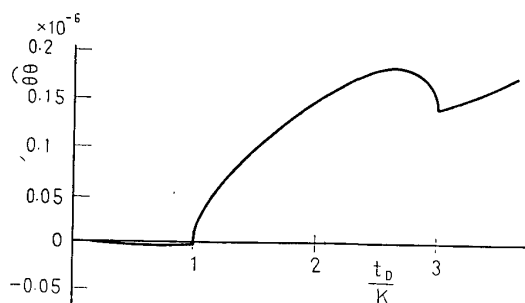
4. 結 言

円形領域に持続点熱源が作用する非定常熱応力の解析は、Hsu の準静的処理しかないが、本報告では、まず解析容易な中心に持続点熱源が作用する円形領域の動的熱応力の解析を行なった。熱衝撃問題の重要性が増加している現在、準静的解析の不安が考えられるが、通常の工業材料で、通常の寸法の棒に対しては、立上りのきわめて微小時間では、やや準静的処理に見られない応力の立上がり形式が見られるが、Sternberg⁽⁶⁾ などの外国の報告に見られるような著しい影響は無い。外国の報告では動的効果を誇張するための材料定数や穴寸法が採用されている。しかし解析結果においてはめいりょうに動的効果に関する項は含まれるから、式(40)で与えられる K の値が大きくなると、動的効果が大きく現われることも予想される。し



$H=\infty, K=1.935 \times 10^{-7}, \nu=1/3$

図2 応力 $\hat{\theta}\theta$ の分布



$H=\infty, K=1.935 \times 10^{-7}, \nu=1/3, \rho=1$

図3 立上がりにおける応力 $\hat{\theta}\theta$ の分布

かし本報告の場合に関するかぎり、無次元時間 0.01 以降ぐらいになると、準静的解析と差が少ないことがわかる。

数値計算は京都大学大型計算センターを利用した。

付 録

$u_{r1}^*(r, s)$ のラプラス逆変換
 $u_{r1}^*(r, s)$ を次次に置く。
 $u_{r1}^* = u_{r2}^*(r, s) + u_{r3}^*(r, s) + u_{r4}^*(r, s) \dots (41)$
 ここで

$$u_{r2}^*(r, s) = -\frac{\alpha_1}{2\pi} \frac{\left(s + \frac{\mu_\lambda v_e^2 h}{a}\right) I_1\left(\frac{s}{v_e} r\right)}{s(v_e^2 - \kappa s)(hI_0(qa) + qI_1(qa)) \left\{ \frac{sa}{v_e} I_0\left(\frac{s}{v_e} a\right) - \mu_\lambda I_1\left(\frac{s}{v_e} a\right) \right\}} \dots (42)$$

$$u_{r3}^*(r, s) = \frac{\alpha_1}{2\pi} \frac{sa \left\{ K_0\left(\frac{s}{v_e} a\right) I_1\left(\frac{s}{v_e} r\right) + I_0\left(\frac{s}{v_e} a\right) K_1\left(\frac{s}{v_e} r\right) \right\} + v_e \mu_\lambda \left\{ K_1\left(\frac{s}{v_e} a\right) I_1\left(\frac{s}{v_e} r\right) - I_1\left(\frac{s}{v_e} a\right) K_1\left(\frac{s}{v_e} r\right) \right\}}{(v_e^2 - \kappa s) \left\{ \frac{sa}{v_e} I_0\left(\frac{s}{v_e} a\right) - \mu_\lambda I_1\left(\frac{s}{v_e} a\right) \right\}} \dots (43)$$

$$u_{r4}^*(r, s) = -\frac{\alpha_1 v_e^2 h \{ K_0(qa) I_1(qr) + I_0(qa) K_1(qr) \} + q \{ I_1(qa) K_1(qr) - K_1(qa) I_1(qr) \}}{2\pi \kappa q(v_e^2 - \kappa s)(hI_0(qa) + qI_1(qa))} \dots (44)$$

* K の値を Sternberg のように $K=0.2$ (われわれの場合の約 1.04×10^6 倍) と大きくとれば、式(38)の $\hat{\theta}\theta$ の表示において、振動項の影響が急速に大きくなることは注意せねばならない。

代表的に $u_{r_2}^*(r, s)$ について考える. ラプラス逆変換は

$$u_{r_2}(r, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} -\frac{\alpha_1}{2\pi} \frac{\left(s + \frac{\mu_\lambda v_e^2 h}{a}\right) I_1\left(\frac{s}{v_e} r\right) e^{ts}}{s(v_e^2 - \kappa s)\{hI_0(qa) + qI_1(qa)\} \left\{\frac{sa}{v_e} I_0\left(\frac{s}{v_e} a\right) - \mu_\lambda I_1\left(\frac{s}{v_e} a\right)\right\}} ds \dots\dots\dots (45)$$

で与えられる. 直線 δ ($\delta > 0$) は被積分関数の特異点が直線 δ より左側にあるように選ばれる. 図 4 に示すように, 直線部 c_1 と円弧部 c_2 からなる閉曲線 c を考える. 被積分関数は

$$(v_e^2 - \kappa s)\{hI_0(qa) + qI_1(qa)\} \left\{\frac{sa}{v_e} I_0\left(\frac{s}{v_e} a\right) - \mu_\lambda I_1\left(\frac{s}{v_e} a\right)\right\} = 0$$

の根によって与えられる極を除いて閉曲線 c 内で複素変数 s の解析関数である. またジョルダンの補助定理を用いて,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{c_2} -\frac{\alpha_1}{2\pi} \frac{\left(s + \frac{\mu_\lambda v_e^2 h}{a}\right) I_1\left(\frac{s}{v_e} r\right) e^{ts}}{s(v_e^2 - \kappa s)\{hI_0(qa) + qI_1(qa)\} \left\{\frac{sa}{v_e} I_0\left(\frac{s}{v_e} a\right) - \mu_\lambda I_1\left(\frac{s}{v_e} a\right)\right\}} ds \rightarrow 0$$

となるから, 式 (45) の積分は被積分関数の極における留数の和に等しい. 被積分関数は $s = v_e^2/\kappa$, $\{hI_0(qa) + qI_1(qa)\} = 0$ を満足する $s = -\kappa \xi_n^2$ ($n = 1, 2, \dots$), $[(sa/v_e)I_0((s/v_e)a) - \mu_\lambda I_1((s/v_e)a)] = 0$ を満足する $s = 0$, $s = \pm i(v_e/a)\eta_m$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) $\eta_m \neq 0$ の各点で 1 位の極をもつ. ξ_n は式 (28) を満足する ξ の第 n 番めの正根, η_m は式 (29) を満足する η の第 m 番めの正根である. $s = 0$ における留数は

$$\frac{\alpha_1}{2\pi} \frac{\mu_\lambda r}{a^2(2 - \mu_\lambda)} \dots\dots\dots (46)$$

$s = v_e^2/\kappa$ における留数は

$$\frac{\alpha_1}{2\pi} \frac{(av_e^2 - \mu_\lambda \kappa^2 h) I_1\left(\frac{v_e}{\kappa} r\right) e^{(v_e^2/\kappa)t}}{a\kappa^2 \left\{hI_0\left(\frac{v_e}{\kappa} a\right) + \frac{v_e}{\kappa} I_1\left(\frac{v_e}{\kappa} a\right)\right\} \left\{\frac{v_e}{\kappa} a I_0\left(\frac{v_e}{\kappa} a\right) - \mu_\lambda I_1\left(\frac{v_e}{\kappa} a\right)\right\}} \dots\dots\dots (47)$$

$s = -\kappa \xi_n^2$ における留数は

$$\frac{\alpha_1}{2\pi} \frac{2\left(\kappa^2 \xi_n^4 + \frac{\mu_\lambda v_e^2 h}{a}\right) I_1\left(\frac{\kappa}{v_e} \xi_n^2 r\right) e^{-\kappa \xi_n^2 t}}{\xi_n(v_e^2 + \kappa^2 \xi_n^2) \left\{\frac{\kappa}{v_e} \xi_n^2 a I_0\left(\frac{\kappa}{v_e} \xi_n^2 a\right) - \mu_\lambda I_1\left(\frac{\kappa}{v_e} \xi_n^2 a\right)\right\} \{h a J_1(\xi_n a) + \xi_n a J_0(\xi_n a)\}} \dots\dots\dots (48)$$

$s = \pm i(v_e/a)\eta_m$ における留数の和は

$$\frac{\alpha_1}{2\pi} \frac{-\frac{v_e^2}{a^2} \eta_m^2 + \frac{v_e \mu_\lambda h}{a}}{v_e \eta_m \left[1 - \left\{\eta_m^2 + \left(\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\right)^2\right\}\right]} J_1(\eta_m) \times \left[\frac{I_1\left(i \frac{r}{a} \eta_m\right) e^{i(v_e/a)\eta_m t}}{i \frac{v_e}{a} \eta_m (v_e^2 - i \frac{\kappa v_e}{a} \eta_m) \left\{h I_0\left(i^{1/2} \sqrt{\frac{v_e}{\kappa} a \eta_m}\right) + \frac{1}{a} i^{1/2} \sqrt{\frac{v_e}{\kappa} a \eta_m} I_1\left(i^{1/2} \sqrt{\frac{v_e}{\kappa} a \eta_m}\right)\right\}} + \frac{I_1\left(-i \frac{r}{a} \eta_m\right) e^{-i(v_e/a)\eta_m t}}{-i \frac{v_e}{a} \eta_m (v_e^2 + i \frac{\kappa v_e}{a} \eta_m) \left\{I_0\left(i^{-1/2} \sqrt{\frac{v_e}{\kappa} a \eta_m}\right) + \frac{1}{a} i^{-1/2} \sqrt{\frac{v_e}{\kappa} a \eta_m} I_1\left(i^{-1/2} \sqrt{\frac{v_e}{\kappa} a \eta_m}\right)\right\}} \right]$$

式 (31) の記号 z_m, t_m, γ_1 を用いて上式を書き直すと

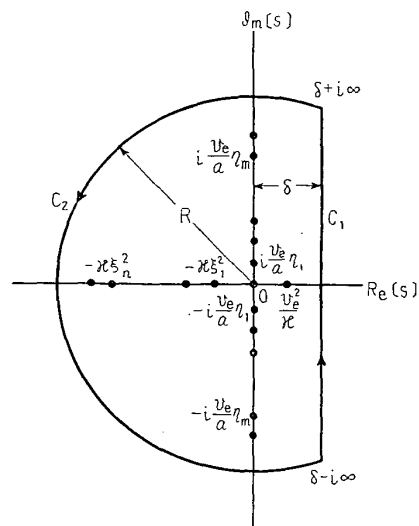


図 4 反転積分路

$$= -\frac{\alpha_1}{2\pi} \frac{a\mu_\lambda h - \eta_m^2}{a(1 - (\eta_m^2 + \gamma_1^2))J_1(\eta_m)} \left[\frac{J_1\{(r/a)\eta_m\}e^{it_m}}{\{1 - i(\kappa\eta_m/av_e)\}\{haI_0(i^{1/2}z_m) + i^{1/2}z_mI_1(i^{1/2}z_m)\}} \right. \\ \left. + \frac{J_1\{(r/a)\eta_m\}e^{-it_m}}{\{1 + i(\kappa\eta_m/av_e)\}\{haI_0(i^{-1/2}z_m) + i^{-1/2}I_1(i^{-1/2}z_m)\}} \right] \dots\dots\dots (49)$$

ベッセル関数の関係式

$$I_0(i^{\pm 1/2}z) = \text{ber}_0 z \pm i \text{bei}_0 z = M_0(z)e^{\pm i\theta_0(z)}, \quad I_1(i^{\pm 1/2}z) = -i(\text{ber}_1 z \pm i \text{bei}_1 z) = \mp iM_1(z)e^{\pm i\theta_1(z)} \\ M_j(z) = (\text{ber}_j^2 z + \text{bei}_j^2 z)^{1/2}, \quad \theta_j(z) = \tan^{-1}(\text{bei}_j z / \text{ber}_j z) \quad (j=0, 1)$$

を用いて式(49)を整理すると

$$-\frac{\alpha_1}{2\pi} \frac{2(a\mu_\lambda h - \eta_m^2)J_1\{(r/a)\eta_m\}}{a(1 + \kappa^2\eta_m^2/a^2v_e^2)\{1 - (\eta_m^2 + \gamma_1^2)\}J_1(\eta_m)} \\ \times \left[\frac{haM_0(z_m) \cos\{t_m - \theta_0(z_m)\} + z_m M_1(z_m) \cos\{t_m - \theta_1(z_m) + \pi/4\}}{-\kappa\eta_m/av_e\{haM_0(z_m) \sin\{t_m - \theta_0(z_m)\} + z_m M_1(z_m) \sin\{t_m - \theta_1(z_m) + \pi/4\}\}} \right] \dots\dots\dots (50)$$

よって $u_{r_2}(r, t)$ は

$$u_{r_2}(r, t) = \frac{\alpha_1}{2\pi} \left[-\frac{\mu_\lambda r}{a^2(1 - 2\mu)} + \frac{(av_e^2 - \mu_\lambda \kappa^2 h)I_1\{(v_e/\kappa)r\}e^{(v_e^2/\kappa)t}}{a\kappa^2 \left\{ hI_0\left(\frac{v_e}{\kappa}a\right) + \frac{v_e}{\kappa}I_1\left(\frac{v_e}{\kappa}a\right) \right\} \left\{ \frac{v_e}{\kappa}aI_0\left(\frac{v_e}{\kappa}a\right) - \mu_\lambda I_1\left(\frac{v_e}{\kappa}a\right) \right\}} \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(\kappa^2 \xi_n^4 + \mu_\lambda v_e^2 h/a)I_1\{(\kappa/v_e)\xi_n^2 r\}e^{-\kappa \xi_n^2 t}}{\xi_n(v_e^2 + \kappa^2 \xi_n^2) \left\{ \frac{\kappa}{v_e} \xi_n^2 a I_0\left(\frac{\kappa}{v_e} \xi_n^2 a\right) - \mu_\lambda I_1\left(\frac{\kappa}{v_e} \xi_n^2 a\right) \right\} \{haJ_1(\xi_n a) + \xi_n a J_0(\xi_n a)\}} \right. \\ \left. - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a\mu_\lambda h - \eta_m^2}{a(1 + \kappa^2\eta_m^2/a^2v_e^2)\{1 - (\eta_m^2 + \gamma_1^2)\}J_1(\eta_m)} \frac{2J_1\{(r/a)\eta_m\}}{h^2 a^2 M_0^2(z_m) + z_m^2 M_1^2(z_m) + 2haM_0(z_m)M_1(z_m) \cos\{\theta_0(z_m) - \theta_1(z_m) + \pi/4\}} \right. \\ \left. \times \left\{ haM_0(z_m) \cos\{t_m - \theta_0(z_m)\} + z_m M_1(z_m) \cos\left(t_m - \theta_1(z_m) + \frac{\pi}{4}\right) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\kappa\eta_m}{av_e} \left\{ haM_0(z_m) \sin\{t_m - \theta_0(z_m)\} + z_m M_1(z_m) \sin\left(t_m - \theta_1(z_m) + \frac{\pi}{4}\right) \right\} \right\} \right] \dots\dots\dots (51)$$

となる.

$u_{r_3}^*(r, s)$, $u_{r_4}^*(r, s)$ のラプラス逆変換は $u_{r_2}^*(r, s)$ とまったく同様にして次式を得る.

$$u_{r_3}(r, t) = \frac{\alpha_1}{2\pi} \left[\frac{1}{r} + \frac{\mu_\lambda r}{a^2(2 - \mu_\lambda)} \right. \\ \left. \frac{\frac{v_e}{\kappa} a \left\{ K_0\left(\frac{v_e}{\kappa}a\right) I_1\left(\frac{v_e}{\kappa}r\right) + I_0\left(\frac{v_e}{\kappa}a\right) K_1\left(\frac{v_e}{\kappa}r\right) \right\} + \mu_\lambda \left\{ K_1\left(\frac{v_e}{\kappa}a\right) I_1\left(\frac{v_e}{\kappa}r\right) - I_1\left(\frac{v_e}{\kappa}a\right) K_1\left(\frac{v_e}{\kappa}r\right) \right\}}{\frac{v_e}{\kappa} a I_0\left(\frac{v_e}{\kappa}a\right) - \mu_\lambda I_1\left(\frac{v_e}{\kappa}a\right)} \right. \\ \left. \times e^{(v_e^2/\kappa)t} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu_\lambda J_1\{(r/a)\eta_m\} \{(\kappa\eta_m/av_e) \sin t_m - \cos t_m\}}{a(1 + \kappa^2\eta_m^2/a^2v_e^2)\{1 - (\eta_m^2 + \gamma_1^2)\}J_0(\eta_m)J_1(\eta_m)} \right] \dots\dots\dots (52)$$

$$u_{r_4}(r, t) = \frac{\alpha_1}{2\pi} \left[-\frac{1}{r} \right. \\ \left. + \frac{\frac{v_e}{\kappa} h \left\{ K_0\left(\frac{v_e}{\kappa}a\right) I_1\left(\frac{v_e}{\kappa}r\right) - I_0\left(\frac{v_e}{\kappa}a\right) K_1\left(\frac{v_e}{\kappa}r\right) \right\} + \frac{v_e}{\kappa} \left\{ I_0\left(\frac{v_e}{\kappa}a\right) K_1\left(\frac{v_e}{\kappa}r\right) - K_0\left(\frac{v_e}{\kappa}a\right) I_0\left(\frac{v_e}{\kappa}r\right) \right\}}{hI_0\left(\frac{v_e}{\kappa}a\right) + \frac{v_e}{\kappa} I_1\left(\frac{v_e}{\kappa}a\right)} \right. \\ \left. e^{(v_e^2/\kappa)t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_1(\xi_n r) e^{-\kappa \xi_n^2 t}}{\xi_n a^2 \{1 + (\kappa^2/v_e^2)\xi_n^2\} (1 + \xi_n^2/h^2) J_1^2(\xi_n a)} \right] \dots\dots\dots (53)$$

$u_{r_2}(r, t)$ と $u_{r_3}(r, t)$ と $u_{r_4}(r, t)$ を加えると式(27)を得る.

文 献

- (1) 竹内, 機論, 32-242 (昭 41-10), 1470.
 (2) Hsu, T.R., *Trans. ASME, Ser. E*, 36-1 (1969-3), 113.
 (3) Hsu, T.R., *Trans. ASME, Ser. B*, 92-2 (1970-5),

357.
 (4) Danilovskaya, V.I., *Prik. Mat. Mech.*, 14 (1950), 316.
 (5) Dhaliwal, R.S. and Chowdhury, K.L., *Arch. Mech. Stosowanej*, 20-1 (1968), 47.
 (6) Sternberg, E. and Chakravorty, J.G., *Quart. Appl. Math.*, 17-2 (1959), 205.

討 論

〔質問〕 柴原正雄 (金沢大学工学部)

K の大きくなる状態は具体的には考えられないのであれば, 現実材料においては, まずは動的効果はないものと理解してよいか. 具体的例があるならば, ご教示いただきたい.

〔回答〕 現実材料では動的効果はまずないとはっきり断言できる自信は, 筆者の工業材料に関する知識が不完全なためないので, 具体的に動的効果の大きくなる場合を列記してみる.

(1) 形状寸法の小さい場合, これは通常的设计問題ではまず起こらないが, 弾性論的考察法が, 破壊力学やその他微視的理論に応用される場合は起こりやすい.

(2) 縦波伝ば速度 $\sqrt{E/\rho}$ が小さいとき, すなわち E が小さくて, ρ が大きい新工業材料ができている場合起こりやすい.

(3) 温度伝導率の大きい材料のとき起こりやすい.

(4) 解の構造が, e のべき (t) に関する項と, 振動の項の合成されたものになっているが, 時間が小

さいとき振動項の効果が大きい, すなわち動的効果は大きい. このことは当然予想されるが, 熱源位置付近の時間の小さいときは, 塑性変形が予想されるうえ, 通常の鉄鋼などの材料値で計算すると, 特異点付近の値は正確な計算が, 時間のきわめて小さいとき不可能である. しかし, 通常の小時間に対してはグラフ上に影響するような効果は現われなかった. ただし, (1)~(3)の値を好きな値にとって計算すれば, Danilovskaya 以来の外国の多くの論文のような, 興味ある例示も可能であろう.

以上の考察より, 工業材料の多様化により, 各場合に適合する材料が, 現われないと限らない.

結論的に述べると, 穴の無い領域に対し, 鉄鋼を中心とした現時点ではその影響は小さく, 熱衝撃の実験的考察に対応する理論考察は準静的解析の範囲内でありと考えられる. ただ絶対に動的効果の考察は不要であるかといえば, 特異点近傍でなくても, 解の上で定量化される式で出ていることであり, また世界の研究のすう勢も動的効果の報告も増加しているから, 研究の動向としては必要であると考えられる.