

539. 377. 01

非対称流体加熱による直交異方性中空円筒の非定常熱応力*

野田直剛**, 竹内洋一郎***

1. 緒 言

近年工業材料の多種多様化に伴い、異方性体に属する工業材料も数多く、異方性体の熱応力は重要問題となってきた。異方性体の熱応力は熱伝導問題の異方性処理の困難さが加わるため、等方性体にくらべ研究発表が少ない。直交異方性体の熱応力の研究は直角座標方向の異方性体については比較的研究⁽¹⁾されているが、 r, θ 方向直交異方性体については円板の非定常熱応力について Parida-Das⁽²⁾ と Parkus⁽³⁾ の研究があり、中空円板の非定常熱応力については著者ら⁽⁴⁾⁽⁵⁾の研究があるにすぎない。

r, θ 方向直交異方性中空円筒の非対称問題は内部熱発生形状や位置による場合と、内外媒質の非対称温度による場合とがあり、前者は著者らにより解析されているが、後者はいまだ解析されていない。そこで、後者を解析すれば中空円筒の非対称処理が完成するので、本研究では非対称流体加熱による r, θ 方向直交異方性中空円筒の非定常熱応力を解析した。解析にさいし、著者のうちの一人が等方性体に対し提案した 5 種関数法⁽⁶⁾を異方性体に対し適用し、5 種関数法が等方性、異方性体にかかわらず適用できることを示した。

2. 解 析

2.1 温度分布 図 1 に示すように内半径 a 、外半径 b の r, θ 方向直交異方性中空円筒が内側温度 T_{in} 、外側温度 T_{out} の媒質に浸される場合について考える。二次元非定常熱伝導方程式は

$$\alpha^{-2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = \beta^{-2} \frac{\partial T}{\partial t} \dots (1)$$

ただし、 T は温度、 t は時間、 $\alpha^{-2} = \lambda_r / \lambda_\theta$ 、 $\beta^{-2} = c\gamma / \lambda_\theta$ 、 λ_r 、 λ_θ はそれぞれ r, θ 方向の熱伝導率、 c は比熱、 γ は密度である。

境界条件は

$$\left. \begin{aligned} r=a \text{ で } \frac{\partial T}{\partial r} - h_a(T - T_{in}) &= 0 \\ r=b \text{ で } \frac{\partial T}{\partial r} + h_b(T - T_{out}) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} T_{in} &= \sum_{n=0}^{\infty} (T_{an} \cos n\theta + \bar{T}_{an} \sin n\theta) \\ T_{out} &= \sum_{n=0}^{\infty} (T_{bn} \cos n\theta + \bar{T}_{bn} \sin n\theta) \end{aligned} \right\} \dots (2)'$$

h_a と h_b はそれぞれ内外境界での相対熱伝達率で、 T_{an} 、 \bar{T}_{an} 、 T_{bn} 、 \bar{T}_{bn} は定数である。

初期条件は

$$t=0 \text{ で } T=0 \dots (3)$$

とする。

式 (3) を考慮して、式 (1)、(2) をラプラス変換すると

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^*}{\partial r} + \frac{\alpha^2}{r^2} \frac{\partial^2 T^*}{\partial \theta^2} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 p T^* \dots (4)$$

$$\left. \begin{aligned} r=a \text{ で } \frac{\partial T^*}{\partial r} - h_a \left(T^* - \frac{1}{p} T_{in} \right) &= 0 \\ r=b \text{ で } \frac{\partial T^*}{\partial r} + h_b \left(T^* - \frac{1}{p} T_{out} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

ただし、 p はラプラス変換のパラメータである。式 (4) の一般解は

$$\begin{aligned} T^* &= \sum_{n=0}^{\infty} \{ \bar{A}_n^* I_{an}(\alpha q r) \\ &+ \bar{B}_n^* K_{an}(\alpha q r) \} \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \{ \bar{C}_n^* I_{an}(\alpha q r) \\ &+ \bar{D}_n^* K_{an}(\alpha q r) \} \sin n\theta \dots (6) \end{aligned}$$

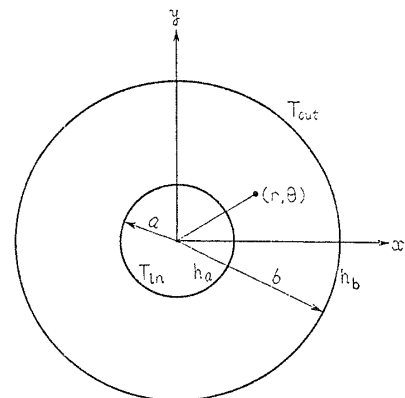


図 1 非軸対称流体加熱を受ける直交異方性中空円筒

* 昭和 52 年 11 月 12 日 創立 80 周年記念講演会(大阪)において講演、原稿受付 昭和 53 年 2 月 27 日。
 ** 正員、静岡大学工学部 (〒432 浜松市城北 3-5-1)。
 *** 正員、大阪府立大学工学部。

ただし, $q^2 = p/\beta^2$, $I_{\alpha n}$, $K_{\alpha n}$ はそれぞれ αn 次の変形ベッセル関数であり, \bar{A}_n^* , \bar{B}_n^* , \bar{C}_n^* , \bar{D}_n^* は未知係数である. 式(6)の未知係数を境界条件式(5)より決定し, 式(6)に代入すると

$$T^* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{pE_n} [h_a T_{an} [-(\alpha n b^{-1} + h_b) \{I_{\alpha n}(\alpha q r) K_{\alpha n}(\alpha q b) - I_{\alpha n}(\alpha q b) K_{\alpha n}(\alpha q r)\} + \alpha q \{I_{\alpha n}(\alpha q r) K_{\alpha n+1}(\alpha q b) + I_{\alpha n+1}(\alpha q b) K_{\alpha n}(\alpha q r)\}] + h_b T_{bn} [-(\alpha n a^{-1} - h_a) \{I_{\alpha n}(\alpha q r) K_{\alpha n}(\alpha q a) - I_{\alpha n}(\alpha q a) K_{\alpha n}(\alpha q r)\} + \alpha q \{I_{\alpha n}(\alpha q r) K_{\alpha n+1}(\alpha q a) + I_{\alpha n+1}(\alpha q a) K_{\alpha n}(\alpha q r)\}]] \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{pE_n} [h_a \bar{T}_{an} [-(\alpha n b^{-1} + h_b) \{I_{\alpha n}(\alpha q r) K_{\alpha n}(\alpha q b) - I_{\alpha n}(\alpha q b) K_{\alpha n}(\alpha q r)\} + \alpha q \{I_{\alpha n}(\alpha q r) K_{\alpha n+1}(\alpha q b) + I_{\alpha n+1}(\alpha q b) K_{\alpha n}(\alpha q r)\}] + h_b \bar{T}_{bn} [-(\alpha n a^{-1} - h_a) \{I_{\alpha n}(\alpha q r) K_{\alpha n}(\alpha q a) - I_{\alpha n}(\alpha q a) K_{\alpha n}(\alpha q r)\} + \alpha q \{I_{\alpha n}(\alpha q r) K_{\alpha n+1}(\alpha q a) + I_{\alpha n+1}(\alpha q a) K_{\alpha n}(\alpha q r)\}]] \sin n\theta \dots \dots \dots (7)$$

ただし

$$E_n = \{\alpha q I_{\alpha n+1}(\alpha q a) + (\alpha n a^{-1} - h_a) I_{\alpha n}(\alpha q a)\} \{-\alpha q K_{\alpha n+1}(\alpha q b) + (\alpha n b^{-1} + h_b) K_{\alpha n}(\alpha q b)\} + \{\alpha q I_{\alpha n+1}(\alpha q b) + (\alpha n b^{-1} + h_b) I_{\alpha n}(\alpha q b)\} \{\alpha q K_{\alpha n+1}(\alpha q a) + (\alpha n a^{-1} - h_a) K_{\alpha n}(\alpha q a)\}$$

式(7)をラプラス逆変換すると, 求める温度分布は次式で表される.

$$T = \bar{A}_0 + \bar{B}_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \{(\bar{A}_n r^{\alpha n} + \bar{B}_n r^{-\alpha n}) \cos n\theta + (\bar{C}_n r^{\alpha n} + \bar{D}_n r^{-\alpha n}) \sin n\theta\} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{u_{\alpha n}(s_{nm} r)}{E_{\alpha n}(s_{nm})} (F_{nm} \cos n\theta + G_{nm} \sin n\theta) e^{-(\beta^2/\alpha^2) s_{nm} t} \dots \dots \dots (8)$$

ただし

$$\bar{A}_0 = \frac{ah_a T_{a0}(bh_b \ln b + 1) - bh_b T_{b0}(ah_a \ln a - 1)}{abh_a h_b \ln(b/a) + ah_a + bh_b}, \quad \bar{B}_0 = \frac{abh_a h_b (T_{b0} - T_{a0})}{abh_a h_b \ln(b/a) + ah_a + bh_b}$$

$$\bar{A}_n = \frac{ah_a T_{an}(bh_b - \alpha n) b^{-\alpha n} - bh_b T_{bn}(ah_a + \alpha n) a^{-\alpha n}}{(ah_a - \alpha n)(bh_b - \alpha n)(a/b)^{\alpha n} - (ah_a + \alpha n)(bh_b + \alpha n)(b/a)^{\alpha n}}$$

$$\bar{B}_n = \frac{-ah_a T_{an}(bh_b + \alpha n) b^{\alpha n} + bh_b T_{bn}(ah_a - \alpha n) a^{\alpha n}}{(ah_a - \alpha n)(bh_b - \alpha n)(a/b)^{\alpha n} - (ah_a + \alpha n)(bh_b + \alpha n)(b/a)^{\alpha n}}$$

$$\bar{C}_n = \frac{ah_a \bar{T}_{an}(bh_b - \alpha n) b^{-\alpha n} - bh_b \bar{T}_{bn}(ah_a + \alpha n) a^{-\alpha n}}{(ah_a - \alpha n)(bh_b - \alpha n)(a/b)^{\alpha n} - (ah_a + \alpha n)(bh_b + \alpha n)(b/a)^{\alpha n}}$$

$$\bar{D}_n = \frac{-ah_a \bar{T}_{an}(bh_b + \alpha n) b^{\alpha n} + bh_b \bar{T}_{bn}(ah_a - \alpha n) a^{\alpha n}}{(ah_a - \alpha n)(bh_b - \alpha n)(a/b)^{\alpha n} - (ah_a + \alpha n)(bh_b + \alpha n)(b/a)^{\alpha n}}$$

$$F_{0m} = s_{0m}^{-2} \left[(bh_b(\bar{A}_0 + \bar{B}_0 \ln b) + \bar{B}_0) u_0(s_{0m} b) + \frac{2}{\pi} \left(\bar{A}_0 + \bar{B}_0 \ln a - \frac{\bar{B}_0}{ah_a} \right) \right]$$

$$F_{nm} = s_{nm}^{-2} \left[\{(bh_b + \alpha n)(\bar{A}_n b^{\alpha n} + \bar{B}_n b^{-\alpha n}) - 2\alpha n \bar{B}_n b^{-\alpha n}\} u_{\alpha n}(s_{nm} b) + \frac{2}{\pi ah_a} \{(ah_a - \alpha n)(\bar{A}_n a^{\alpha n} + \bar{B}_n a^{-\alpha n}) + 2\alpha n \bar{B}_n a^{-\alpha n}\} \right]$$

$$G_{nm} = s_{nm}^{-2} \left[\{(bh_b + \alpha n)(\bar{C}_n b^{\alpha n} + \bar{D}_n b^{-\alpha n}) - 2\alpha n \bar{D}_n b^{-\alpha n}\} u_{\alpha n}(s_{nm} b) + \frac{2}{\pi ah_a} \{(ah_a - \alpha n)(\bar{C}_n a^{\alpha n} + \bar{D}_n a^{-\alpha n}) + 2\alpha n \bar{D}_n a^{-\alpha n}\} \right]$$

$$u_{\alpha n}(sr) = \left\{ \left(1 - \frac{\alpha n}{ah_a} \right) J_{\alpha n}(sa) + \frac{s}{h_a} J_{\alpha n+1}(sa) \right\} Y_{\alpha n}(sr) - \left\{ \left(1 - \frac{\alpha n}{ah_a} \right) Y_{\alpha n}(sa) + \frac{s}{h_a} Y_{\alpha n+1}(sa) \right\} J_{\alpha n}(sr)$$

$$E_{\alpha n}(s_{nm}) = \int_a^b r u_{\alpha n}^2(s_{nm} r) dr$$

$J_{\alpha n}$, $Y_{\alpha n}$ は αn 次のベッセル関数で, s_{nm} は次式を満足する s_n の第 m 番目の正根である.

$$\left(1 + \frac{\alpha n}{bh_b} \right) u_{\alpha n}(s_n b) - \frac{s_n}{h_b} v_{\alpha n}(s_n) = 0 \dots \dots \dots (9)$$

また $v_{\alpha n}(sr) = \left\{ \left(1 - \frac{\alpha n}{ah_a} \right) J_{\alpha n}(sa) + \frac{s}{h_a} J_{\alpha n+1}(sa) \right\} Y_{\alpha n+1}(sr) - \left\{ \left(1 - \frac{\alpha n}{ah_a} \right) Y_{\alpha n}(sa) + \frac{s}{h_a} Y_{\alpha n+1}(sa) \right\} J_{\alpha n+1}(sr)$

2.2 熱応力 r, θ 方向直交異方性体の応力-ひずみ関係式は

$$\varepsilon_{rr} = a_{11} \sigma_{rr} + a_{12} \sigma_{\theta\theta} + \alpha_1 T, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = a_{12} \sigma_{rr} + a_{22} \sigma_{\theta\theta} + \alpha_2 T, \quad \varepsilon_{r\theta} = a_{66} \sigma_{r\theta} \dots \dots \dots (10)$$

ただし, ε_{ij} はひずみ成分, σ_{ij} は応力成分, α_1, α_2 はそれぞれ r, θ 方向の線膨張係数, a_{ij} は弾性定数である.

つりあい方程式を満足する応力の応力関数 χ 表示は

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2}, \quad \sigma_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial \theta} \dots (11)$$

ひずみの適合条件式は

$$2 \frac{\partial^2 (r \varepsilon_{r\theta})}{\partial r \partial \theta} = \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta^2} - r \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial r} \dots (12)$$

5 種関数法を用いて解析する. すなわち

$$\chi = \chi_0 + \chi_\tau + \bar{C}_{11} \chi_{11} + \bar{C}_{21} \chi_{21} + \bar{C}_{31} \chi_{31} \dots (13)$$

のように χ を 5 種類の要素関数 $\chi_0, \chi_\tau, \chi_{11}, \chi_{21}, \chi_{31}$ の和で表す. 各要素関数の基礎式は

$$\left\{ \frac{\partial^4}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3}{\partial r^3} - \frac{\beta_1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\beta_1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{2\beta_2}{r^3} \frac{\partial^3}{\partial r \partial \theta^2} + \frac{2\beta_2}{r^2} \frac{\partial^4}{\partial r^2 \partial \theta^2} + \frac{2(\beta_1 + \beta_2)}{r^4} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\beta_1}{r^4} \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} \right\} \chi_\tau = -\nu \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2-\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} T \dots (14)$$

$$\left\{ \frac{\partial^4}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3}{\partial r^3} - \frac{\beta_1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\beta_1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{2\beta_2}{r^3} \frac{\partial^3}{\partial r \partial \theta^2} + \frac{2\beta_2}{r^2} \frac{\partial^4}{\partial r^2 \partial \theta^2} + \frac{2(\beta_1 + \beta_2)}{r^4} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\beta_1}{r^4} \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} \right\} (\chi_0, \chi_{11}, \chi_{21}, \chi_{31}) = 0 \dots (15)$$

ただし

$$\beta_1 = a_{11}/a_{22}, \quad \beta_2 = (a_{12} + a_{66})/a_{22}, \quad \mu = \alpha_1/\alpha_2, \quad \nu = \alpha_2/a_{22}$$

境界条件は外力が作用しないとき

$$r=a \text{ と } r=b \text{ で } \chi_0 = \frac{\partial \chi_0}{\partial r} = 0 \dots (16)$$

$$r=a \text{ と } r=b \text{ で } \chi_\tau = \frac{\partial \chi_\tau}{\partial r} = 0 \dots (17)$$

$$\left. \begin{aligned} r=a \text{ で } \chi_{11} = \chi_{21} = \chi_{31} = \frac{\partial \chi_{11}}{\partial r} = \frac{\partial \chi_{21}}{\partial r} = \frac{\partial \chi_{31}}{\partial r} = 0 \\ r=b \text{ で } \chi_{11} = b \cos \theta, \quad \frac{\partial \chi_{11}}{\partial r} = \cos \theta, \quad \chi_{21} = b \sin \theta, \quad \frac{\partial \chi_{21}}{\partial r} = \sin \theta, \quad \chi_{31} = 1, \quad \frac{\partial \chi_{31}}{\partial r} = 0 \end{aligned} \right\} \dots (18)$$

回転・変位が一価であるためのミッチェルの条件は

$$\left. \begin{aligned} \oint \left[\left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\beta_2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1-\beta_1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\beta_1-\beta_2}{r^3} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} (\chi_0 + \chi_\tau + \bar{C}_{11} \chi_{11} \right. \\ \left. + \bar{C}_{21} \chi_{21} + \bar{C}_{31} \chi_{31}) + \nu \frac{\partial T}{\partial r} - \nu(\mu-1) \frac{T}{r} \right] r d\theta = 0 \\ \oint \left[\left\{ \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\beta_2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\beta_1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\beta_1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) - r \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\beta_2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\beta_2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \right\} (\chi_0 + \chi_\tau \right. \\ \left. + \bar{C}_{11} \chi_{11} + \bar{C}_{21} \chi_{21} + \bar{C}_{31} \chi_{31}) + \nu \mu \cos \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} - \nu r \sin \theta \frac{\partial T}{\partial r} \right] r d\theta = 0 \\ \oint \left[\left\{ \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\beta_2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\beta_1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\beta_1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) + r \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\beta_2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\beta_2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \right\} (\chi_0 + \chi_\tau \right. \\ \left. + \bar{C}_{11} \chi_{11} + \bar{C}_{21} \chi_{21} + \bar{C}_{31} \chi_{31}) + \nu \mu \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} + \nu r \cos \theta \frac{\partial T}{\partial r} \right] r d\theta = 0 \end{aligned} \right\} \dots (19)$$

式 (15) と (16) より, 外力に関係した要素関数 χ_0 は

$$\chi_0 = 0 \dots (20)$$

となる. 式 (14) を満足する χ_τ は

$$\begin{aligned} \chi_\tau = & (A_{\tau 0} + B_{\tau 0} r^2 + C_{\tau 0} \ln r + D_{\tau 0} r^2 \ln r) \delta_{1\beta_1} + (1 - \delta_{1\beta_1}) (A_{\tau 0} + B_{\tau 0} r^{1+\sqrt{\beta_1}} + C_{\tau 0} r^{1-\sqrt{\beta_1}} \\ & + D_{\tau 0} r^2) + (A_{\tau 1} r + B_{\tau 1} r^{1-m_1} + C_{\tau 1} r^{1+m_1} + D_{\tau 1} r \ln r) \cos \theta + \sum_{n=2}^{\infty} (A_{\tau n} r^{1+m_{n1}} \\ & + B_{\tau n} r^{1+m_{n2}} + C_{\tau n} r^{1-m_{n1}} + D_{\tau n} r^{1-m_{n2}}) \cos n\theta + (\bar{A}_{\tau 1} r + \bar{B}_{\tau 1} r^{1-m_1} + \bar{C}_{\tau 1} r^{1+m_1} \\ & + \bar{D}_{\tau 1} r \ln r) \sin \theta + \sum_{n=2}^{\infty} (\bar{A}_{\tau n} r^{1+m_{n1}} + \bar{B}_{\tau n} r^{1+m_{n2}} + \bar{C}_{\tau n} r^{1-m_{n1}} + \bar{D}_{\tau n} r^{1-m_{n2}}) \sin n\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{4} \delta_{1\beta_1} \left[(1 + \ln r) \int_a^r r^3 F_0(r) dr + r^2 (\ln r - 1) \int_a^r r F_0(r) dr - r^2 \int_a^r r \ln r F_0(r) dr \right. \\
 & - \left. \int_a^r r^3 \ln r F_0(r) dr \right] + \frac{1 - \delta_{1\beta_1}}{2(1 - \beta_1)} \left[r^2 \int_a^r r F_0(r) dr - \int_a^r r^3 F_0(r) dr \right. \\
 & + \frac{r^{1 - \sqrt{\beta_1}}}{\sqrt{\beta_1}} \int_a^r r^{2 + \sqrt{\beta_1}} F_0(r) dr - \frac{r^{1 + \sqrt{\beta_1}}}{\sqrt{\beta_1}} \int_a^r r^{2 - \sqrt{\beta_1}} F_0(r) dr \left. \right] + m_1^{-2} \left[r \int_a^r r^2 \ln r F_1(r) dr \right. \\
 & - \left. \frac{r^{1 - m_1}}{2m_1} \int_a^r r^{2 + m_1} F_1(r) dr + \frac{r^{1 + m_1}}{2m_1} \int_a^r r^{2 - m_1} F_1(r) dr - r \ln r \int_a^r r^2 F_1(r) dr \right] \cos \theta \\
 & + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2} (m_{n1}^2 - m_{n2}^2)^{-1} \left[m_{n1}^{-1} r^{1 + m_{n1}} \int_a^r r^{2 - m_{n1}} F_n(r) dr - m_{n2}^{-1} r^{1 + m_{n2}} \int_a^r r^{2 - m_{n2}} F_n(r) dr \right. \\
 & - \left. m_{n1}^{-1} r^{1 - m_{n1}} \int_a^r r^{2 + m_{n1}} F_n(r) dr + m_{n2}^{-1} r^{1 - m_{n2}} \int_a^r r^{2 + m_{n2}} F_n(r) dr \right] \cos n\theta \\
 & + m_1^{-2} \left[r \int_a^r r^2 \ln r G_1(r) dr - \frac{r^{1 - m_1}}{2m_1} \int_a^r r^{2 + m_1} G_1(r) dr + \frac{r^{1 + m_1}}{2m_1} \int_a^r r^{2 - m_1} G_1(r) dr \right. \\
 & - \left. r \ln r \int_a^r r^2 G_1(r) dr \right] \sin \theta + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} (m_{n1}^2 - m_{n2}^2)^{-1} \left[m_{n1}^{-1} r^{1 + m_{n1}} \int_a^r r^{2 - m_{n1}} G_n(r) dr \right. \\
 & - \left. m_{n2}^{-1} r^{1 + m_{n2}} \int_a^r r^{2 - m_{n2}} G_n(r) dr - m_{n1}^{-1} r^{1 - m_{n1}} \int_a^r r^{2 + m_{n1}} G_n(r) dr \right. \\
 & \left. + m_{n2}^{-1} r^{1 - m_{n2}} \int_a^r r^{2 + m_{n2}} G_n(r) dr \right] \sin n\theta \dots\dots\dots(21)
 \end{aligned}$$

ただし, δ_{ij} はクロネッカーのデルタ, $m_1^2 = 1 + \beta_1 + 2\beta_2$, m_{n1} と m_{n2} は

$$m_n^4 - (1 + \beta_1 + 2\beta_2 n^2) m_n^2 + \beta_1 (n^2 - 1)^2 = 0$$

の根であり

$$-\nu \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2 - \mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} T \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \{ F_n(r) \cos n\theta + G_n(r) \sin n\theta \}$$

式(21)を式(17)代入することにより, 未知係数 $A_{\tau 0}, B_{\tau 0}, \dots$ は決定される.

次に $\chi_{11}, \chi_{21}, \chi_{31}$ について考える. 領域と境界条件式(18)より, $\chi_{11}, \chi_{21}, \chi_{31}$ は

$$\chi_{11} = (A_{11}r + B_{11}r^{1 - m_1} + C_{11}r^{1 + m_1} + D_{11}r \ln r) \cos \theta \dots\dots\dots(22)$$

$$\chi_{21} = (A_{21}r + B_{21}r^{1 - m_1} + C_{21}r^{1 + m_1} + D_{21}r \ln r) \sin \theta \dots\dots\dots(23)$$

$$\chi_{31} = (A_{30} + B_{30}r^2 + C_{30} \ln r + D_{30}r^2 \ln r) \delta_{1\beta_1} + (A_{30} + B_{30}r^{1 + \sqrt{\beta_1}} + C_{30}r^{1 - \sqrt{\beta_1}} + D_{30}r^2) (1 - \delta_{1\beta_1}) \dots\dots\dots(24)$$

式(22)~(24)の未知係数は境界条件式(18)より決定される. 以上により各要素関数 $\chi_0, \chi_{\tau}, \chi_{11}, \chi_{21}, \chi_{31}$ は決定された.

次に未知数 $\bar{C}_{11}, \bar{C}_{21}, \bar{C}_{31}$ を決定する. そこで $\chi_0, \chi_{\tau}, \chi_{11}, \chi_{21}, \chi_{31}, T$ をミッチェルの条件式(19)に代入すると

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{C}_{11} &= -\frac{D_{\tau 1}}{D_{11}} + \frac{\nu}{(1 + \beta_1 + 2\beta_2)D_{11}} \left[(\alpha - \mu) \bar{A}_1 a^{\alpha + 1} + (\alpha + \mu) \bar{B}_1 a^{1 - \alpha} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{2a}{\pi} \left(\frac{\mu}{ah_a} - 1 \right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{F_{1m}}{E_{\alpha 1}(s_{1m})} \exp \left\{ -\left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 s_{1m}^2 t \right\} \right] \\
 \bar{C}_{21} &= -\frac{D_{\tau 1}}{D_{21}} + \frac{\nu}{(1 + \beta_1 + 2\beta_2)D_{21}} \left[(\alpha - \mu) \bar{C}_1 a^{\alpha + 1} + (\alpha + \mu) \bar{D}_1 a^{1 - \alpha} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{2a}{\pi} \left(\frac{\mu}{ah_a} - 1 \right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{G_{1m}}{E_{\alpha 1}(s_{1m})} \exp \left\{ -\left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 s_{1m}^2 t \right\} \right] \\
 \bar{C}_{31} &= -\frac{1}{2(1 - \beta_1 + \delta_{1\beta_1}(1 + \beta_1))D_{30}} \left[2(1 - \beta_1 + \delta_{1\beta_1}(1 + \beta_1)) \bar{D}_{\tau 0} + \nu(1 - \mu) \bar{A}_0 \right. \\
 & \quad \left. + (1 + \ln a - \mu \ln a) \bar{B}_0 + \frac{2}{\pi} \left(\frac{1 - \mu}{ah_a} - 1 \right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{F_{0m}}{E_{\alpha 0}(s_{0m})} \exp \left\{ -\left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 s_{0m}^2 t \right\} \right]
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(25)$$

式(20)~(25)を式(13)に代入することにより, χ は完全に決定された. ここで, 新しく係数を

$$\left. \begin{aligned}
 A_0 &= A_{\tau 0} + \bar{C}_{31} A_{30}, & B_0 &= B_{\tau 0} + \bar{C}_{31} B_{30}, \dots & A_1 &= A_{\tau 1} + \bar{C}_{11} A_{11}, & B_1 &= B_{\tau 1} + \bar{C}_{11} B_{11}, \dots \\
 A_n &= A_{\tau n}, & B_n &= B_{\tau n}, \dots
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(26)$$

と置き直し, 各熱応力成分を求めると

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\theta\theta} = & \delta_{1\beta_1} \{2B_0 - C_0 r^{-2} + D_0(2 \ln r + 3)\} + (1 - \delta_{1\beta_1}) \{(\beta_1 + \sqrt{\beta_1}) B r^{\sqrt{\beta_1}-1} + (\beta_1 - \sqrt{\beta_1}) C_0 r^{-\sqrt{\beta_1}-1} + 2D_0\} \\
 & + m_1 \left\{ (m_1 - 1) B_1 r^{-m_1-1} + (m_1 + 1) C_1 r^{m_1-1} + \frac{D_1}{m_1} r^{-1} \right\} \cos \theta + \sum_{n=2}^{\infty} \{m_{n1}(m_{n1} + 1) A_n r^{m_{n1}-1} \\
 & + m_{n2}(m_{n2} + 1) B_n r^{m_{n2}-1} + m_{n1}(m_{n1} - 1) C_n r^{-m_{n1}-1} + m_{n2}(m_{n2} - 1) D_n r^{-m_{n2}-1}\} \cos n\theta \\
 & + (m_1(m_1 - 1) \bar{B}_1 r^{-m_1-1} + m_1(m_1 + 1) \bar{C}_1 r^{m_1-1} + \bar{D}_1 r^{-1}) \sin \theta + \sum_{n=2}^{\infty} \{m_{n1}(m_{n1} + 1) \bar{A}_n r^{m_{n1}-1} \\
 & + m_{n2}(m_{n2} + 1) \bar{B}_n r^{m_{n2}-1} + m_{n1}(m_{n1} - 1) \bar{C}_n r^{-m_{n1}-1} + m_{n2}(m_{n2} - 1) \bar{D}_n r^{-m_{n2}-1}\} \sin n\theta \\
 & + \frac{1}{2} \{1 - \beta_1 + \delta_{1\beta_1}(1 + \beta_1)\}^{-1} \left[-r^{-2} \int_a^r r^3 F_0(r) dr + (2 \ln r + 1) \int_a^r r F_0(r) dr \right. \\
 & - 2 \int_a^r r \ln r F_0(r) dr \left. \right] \delta_{1\beta_1} + (1 - \delta_{1\beta_1}) \left\{ 2 \int_a^r r F_0(r) dr - (1 + \sqrt{\beta_1}) r^{\sqrt{\beta_1}-1} \int_a^r r^{2-\sqrt{\beta_1}} F_0(r) dr \right. \\
 & - (1 - \sqrt{\beta_1}) r^{-1-\sqrt{\beta_1}} \int_a^r r^{2+\sqrt{\beta_1}} F_0(r) dr \left. \right\} + \frac{1}{m_1^2} \left\{ \frac{m_1 - 1}{2} r^{-m_1-1} \int_a^r F_1(r) r^{m_1+2} dr \right. \\
 & - \frac{m_1 + 1}{2} r^{m_1-1} \int_a^r F_1(r) r^{2-m_1} dr + r^{-1} \int_a^r F_1(r) r^2 dr \left. \right\} \cos \theta \\
 & - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2(m_{n1}^2 - m_{n2}^2)} \left\{ -(m_{n1} + 1) r^{m_{n1}-1} \int_a^r F_n(r) r^{2-m_{n1}} dr + (m_{n2} + 1) r^{m_{n2}-1} \int_a^r F_n(r) r^{2-m_{n2}} dr \right. \\
 & + (m_{n1} - 1) r^{-m_{n1}-1} \int_a^r F_n(r) r^{m_{n1}+2} dr - (m_{n2} - 1) r^{-m_{n2}-1} \int_a^r F_n(r) r^{m_{n2}+2} dr \left. \right\} \cos n\theta \\
 & + \frac{1}{m_1^2} \left\{ \frac{m_1 - 1}{2} r^{-m_1-1} \int_a^r G_1(r) r^{m_1+2} dr - \frac{m_1 + 1}{2} r^{m_1-1} \int_a^r G_1(r) r^{2-m_1} dr + r^{-1} \int_a^r G_1(r) r^2 dr \right\} \sin \theta \\
 & - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2(m_{n1}^2 - m_{n2}^2)} \left\{ -(m_{n1} + 1) r^{m_{n1}-1} \int_a^r G_n(r) r^{2-m_{n1}} dr + (m_{n2} + 1) r^{m_{n2}-1} \int_a^r G_n(r) r^{2-m_{n2}} dr \right. \\
 & + (m_{n1} - 1) r^{-m_{n1}-1} \int_a^r G_n(r) r^{m_{n1}+2} dr - (m_{n2} - 1) r^{-m_{n2}-1} \int_a^r G_n(r) r^{m_{n2}+2} dr \left. \right\} \sin n\theta \dots \dots \dots (27)
 \end{aligned}$$

$\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}$ は省略する。

3. 数値計算結果

数値計算は

$$\begin{aligned}
 [A] \quad T_{in} = 0, \quad T_{out} = T_0 H(|\theta_0| - |\theta|) \\
 [B] \quad T_{in} = 0, \quad T_{out} = T_0 \left\{ 1 - \left(\frac{\theta}{\theta_0} \right)^2 \right\} H(|\theta_0| - |\theta|)
 \end{aligned}$$

の場合について実行した。ただし、 $H(\quad)$ はヘビサイドのステップ関数である。この場合、式(2)'は

$$\begin{aligned}
 [A] \quad T_{out} = T_0 \left\{ \frac{\theta_0}{\pi} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta_0}{n\pi} \cos n\theta \right\} \\
 [B] \quad T_{out} = T_0 \left\{ \frac{2\theta_0}{3\pi} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta_0/n\theta_0 - \cos n\theta_0}{\pi n^2 \theta_0} \cos n\theta \right\} \dots \dots \dots (28)
 \end{aligned}$$

となる。無次元量

$\rho = r/a, \rho_0 = b/a, t_d = \beta^2 t/a^2, H_a = ah_a, H_b = ah_b, \tau = T/T_0, \hat{\rho}\hat{\rho} = \sigma_{rr}/(\nu T_0), \hat{\theta}\hat{\theta} = \sigma_{\theta\theta}/(\nu T_0)$ を導入する。表 1 に示す材料定数の場合に対し、 $\rho_0 = 3, H_a = H_b = \infty$ について数値計算を実行した。表 1 において、記号 I は等方性体であり、II は r, θ 方向の熱伝導率のみが異なる場合であり、III は β_1 のみが変わる場合であり、IV は β_2 のみが変わる場合である。

図 2 から図 10 までは [A] のステップ状温度の場合の $\theta_0 = 10^\circ$ に対する温度分布と熱応力分布である。図 2 はフーリエ数 t_d に対する $\theta = 0, \pi$ 軸上の温度分布である。図 3 には $t_d = 0.1$ のときの III-3 ($\beta_1 = 0.7$) の場合のフープ応力を示す。加熱近傍では圧縮応力であるが、加熱の逆の方向 $\theta = \pi$ では引張応力である。

図 4 には III-3 の場合の $\theta = 0$ 軸上のフープ応力を各フーリエ数について示す。フーリエ数が小さいときは $\rho = 3$ で応力が最大になるが、定常状態では $\rho = 1$

表 1 材料定数と記号
 $\alpha^2 = \lambda_0/\lambda_r, \mu = \alpha_1/\alpha_2, \beta_1 = \alpha_{11}/\alpha_{22}, \beta_2 = (\alpha_{12} + \alpha_{66})/\alpha_{22}$

材料定数 記号	α	β_1	β_2	μ
I	1	1	1	1
II	2	1	1	1
III-1	1	0.3	1	1
III-2	1	0.5	1	1
III-3	1	0.7	1	1
IV-1	1	1	1.5	1
IV-2	1	1	2.0	1

で応力は最大になる。図5にはⅢ-3の場合の $\rho=3$ 上のフープ応力を各フーリエ数について示す。 $\theta=0^\circ$ 上では圧縮応力で、 $\theta=180^\circ$ 上では引張応力である。図3~5より、フーリエ数が小さいほど圧縮応力は大きい。

図6はⅡ($\alpha=2$)の場合のフープ応力である。等方

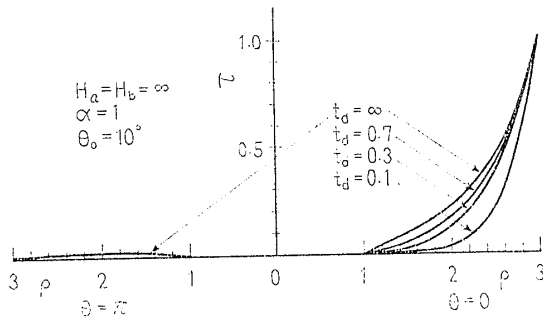


図2 温度分布

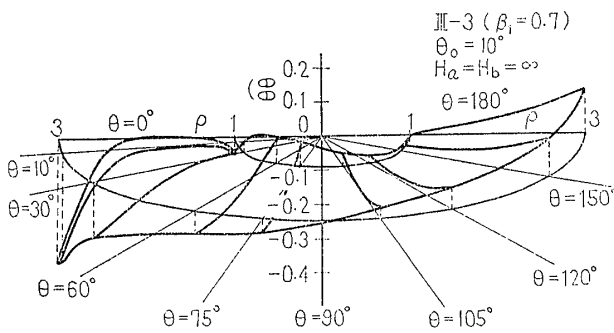


図3 $t_d=0.1$ のときのフープ応力

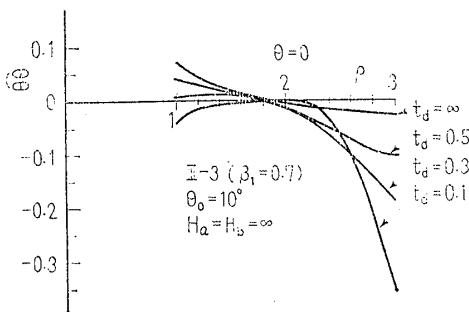


図4 フープ応力 ($\theta=0$ 上)

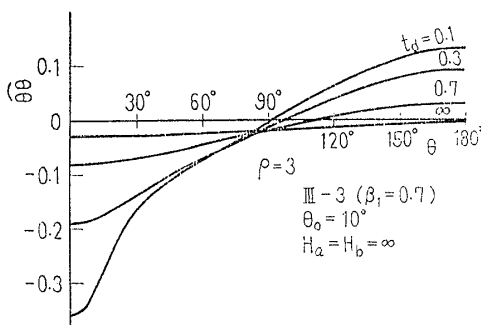


図5 フープ応力 ($\rho=3$)

性体と比較して、比較的大きな応力が生じている。図7にはⅢの場合のフープ応力を示す。 β_1 が小さくなるほど応力は大きくなるが、フーリエ数が0.5以上になると応力にはほとんど差がない。図8にはⅣの場合のフープ応力を示す。 β_2 が大きくなるほど応力は小さくなるが、 t_d が0.5以上では応力にはほとんど差がない。

図9には各種材料定数に対するフープ応力を示す。弾性定数の異方性よりも、温度定数の異方性が大きな応力を与えている。図10には各種材料定数に対する半径応力を示す。図9と10より、フープ応力が半径応力よりひとけたオーダーが大きな応力を示し、最大応力はフープ応力であることがわかる。

Ⅲ-3 ($\beta_1=0.7$) で $\theta_0=30^\circ$ の場合のステップ関数加熱 [A] の場合と二次関数加熱 [B] の場合のフ

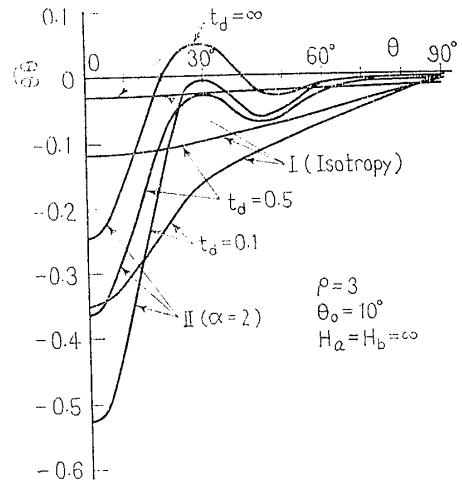


図6 フープ応力 (Ⅱの場合)

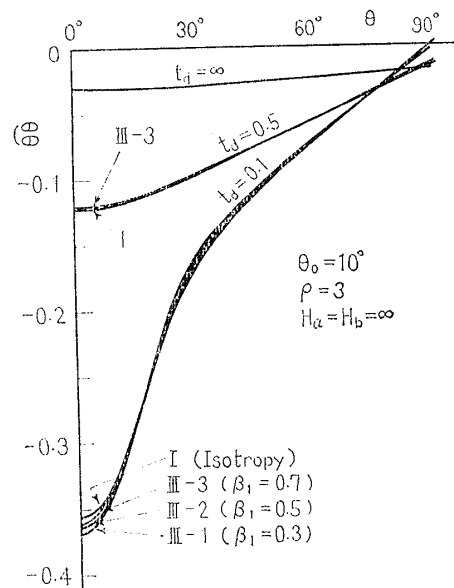


図7 フープ応力 (Ⅲの場合)

ープ応力と半径応力の比較を図 11 にフープ応力の比較を図 12 に示す。各フーリエ数に対して、[A] の場合が [B] の場合より応力が大きい。

図 13 にはフープ応力に与える加熱幅の影響を示

す。加熱幅が増加しても応力は大きくなるとはかぎらない。

4. 結 論

非対称流体加熱を受ける直交異方性中空円筒を 5 種関数法を用いて解析し、式 (28) の温度条件と $\rho_0=3$, $H_a=H_b=\infty$ の場合について数値計算を実行し、次の

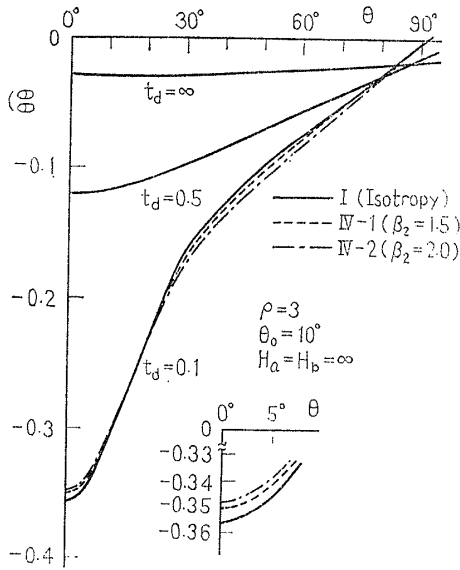


図 8 フープ応力 (IV の場合)

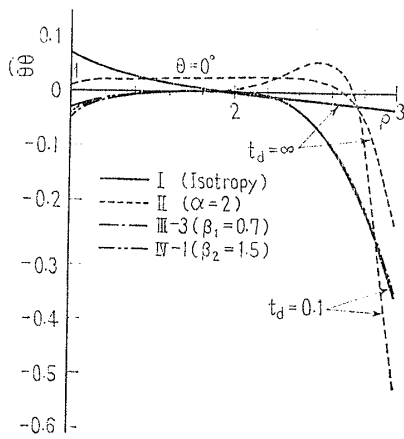


図 9 各種材料定数に対するフープ応力

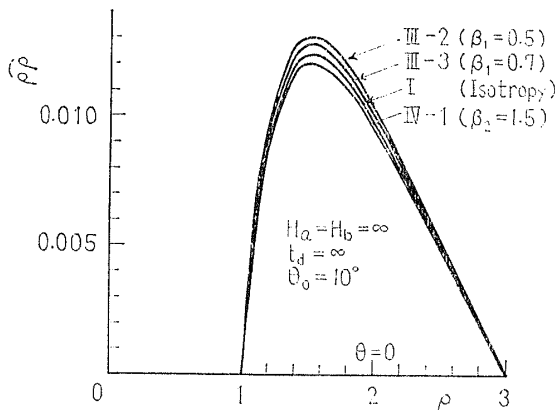


図 10 各種材料定数に対する半径応力

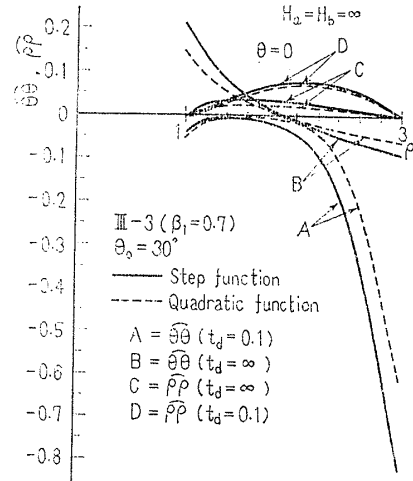


図 11 フープ応力と半径応力 (θ=0 上)

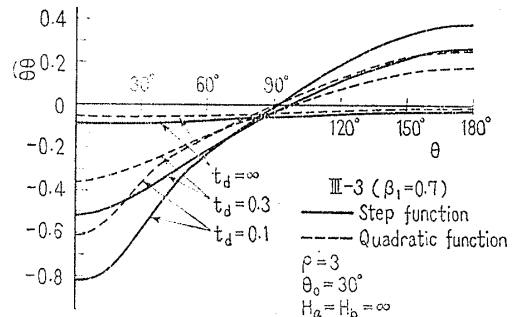


図 12 フープ応力 (ρ=3 上)

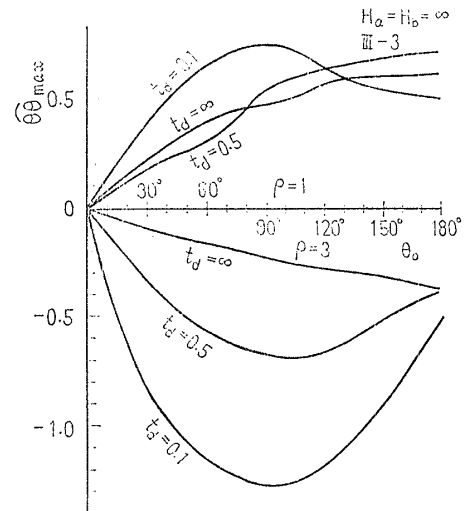


図 13 フープ応力に与える加熱幅の影響

ような結論を得た。

(1) 等方性体と同様に直交異方性体に対しても5種関数法が適用できる。

(2) β_1 が減少するにつれ, 外側境界上の最大応力は増大する。

(3) β_2 が増加するにつれ, 外側境界上の最大応力は減少する。

(4) ステップ関数加熱が二次関数加熱より最大応力が大きい。

(5) 加熱幅が増加しても, 必ずしも最大応力は増加しない。

文 献

- (1) たとえば, Chen, W. T., *Trans. ASME, Ser. E*, **33-2** (1966-6), 347; **35-4** (1968-12), 770.
- (2) Parida, J. and Das, A. R., *Acta Mechanica*, **13-4** (1972-4), 205.
- (3) Parkus, E. W., *Int. J. Mech. Sci.*, **18-1** (1976-1), 5.
- (4) 竹内・ほか3名, 機論, **42-358** (昭 51-6), 1677.
- (5) 野田・ほか2名, 機論, **44-386** (昭 53-10), 3395.
- (6) Takeuti, Y. and Sekiya, T., *Z. AMM*, **48-4** (1968-4), 237.

討 論

〔質問〕 井上達雄(京都大学工学部)

著者らが提案された5種関数法が, 広い応用範囲をもつことを示された一例として興味深く拝見した。

数値計算の結果はすべて無次元化して示されており, このことは設計資料として有益と考えるが, 逆に, この結果が現実に存在する材料の性質(ここでは異方性材料定数)を反映すべきだと考える。この意味で, 現実に存在する異方性がどの程度温度や応力などの分布に影響を与えるか, 一, 二例でも示していただければありがたい。

〔回答〕 ご指摘のご質問は重要であると思うが, 本研究においては, この種の異方性体に対する数値例が非常に少ないので, 異方性材料定数のどの定数が熱応力にどう影響するか, 一般的傾向を調べることを重要視して, 数値計算を実行し, 図示した。特定の異方性体に対しては, 各種温度分布により, 応力がいかに

変化するかとの問題としてとらえ, 今後の研究問題にしてみたいと思う。

〔質問〕 畑 俊明(静岡大学教育学部)

非対称な直交異方性熱応力問題の貴重な研究に対し敬意を表する。

本論文は, 5種関数法を異方性体に対して適用されているが, この5種類の要素関数の物理的な意味をご教示いただきたい。

〔回答〕 式(13)~(19)より, χ_0 は外力に関係した応力関数であり, χ_r は温度分布に関係した応力関数であり, χ_{11} , χ_{21} , χ_{31} は形状に関係した応力関数である。例えば外力の作用がなければ $\chi_0=0$ となり, 単連結領域の場合 $\bar{C}_{11}\chi_{11}$ は零となる。また, χ_{31} は回転, χ_{11} は変位 u_y , χ_{21} 変位 u_z の一価性を保障するために必要な応力関数である。