

539.377.01

内部熱発生を伴うすみを丸めた多角形穴をもつ 有限領域の熱応力*

竹内 洋一郎**, 野田 直剛***

1. 緒 言

著者らは近年熱発生を伴う二次元熱応力問題の研究を行ない^{(1)~(5)}, 円孔をもつ多角形領域, および多数円孔をもつ有限領域の定常熱応力問題に対しては, 多重連結領域に対する五種関数法を適用し, 境界値問題については辺点法を利用して解決した. しかし極座標系の Airy の応力関数を基本とした辺点法による解法は, 円孔をもつ場合には最大応力を発生する穴周辺の境界条件を厳密に合わせるには好都合であったが, 多角形穴をもつ場合には不適当であるので, 先に熱発生のない四角形穴をもつ円形領域に対しては, 等角写像法により Gatewood の提唱した熱応力解析法⁽⁶⁾, Muskhelishvili の複素応力関数法⁽⁷⁾で穴周辺境界条件を厳密に合わせて解決した⁽⁸⁾. しかし最近の熱応力問題では, 原子炉や電子工学機器構成部分のように内部熱発生を伴う問題が多いので, 本報告では基本的には前報告⁽⁸⁾と同一解法によって, 内部熱発生を伴うすみを丸めた $n+1$ 角形穴をもつ円形領域の定常熱応力問題について, 内外境界一定温度, および外側境界断熱の場合に対して, 四角形だけでなく一般の $n+1$ 角形穴についての一般的応力成分の公式表示を提供した. 内部熱発生を伴う場合には, 等角写像によらない場合には単にラプラス形偏微分方程式がポアソン形偏微分方程式になるだけの問題であるが, 本報告のように等角写像法を利用する場合には, 等角写像による z 面の温度関数の形が複雑となり, これに伴って一つには Airy の応力関数の特解の導出が著しくめんどろになること, および一つにはこれに伴う複素応力関数による境界条件式の処理がかなり複雑になり, これとともに熱源のない場合に比較し解の収束が悪くなるが, 大形電子計算機使用による摂動法利用により解決した. 数値計算は三, 四, 六, 八角形穴をもつ円形領域について行ない応力分布図を得た.

2. 記 号

- a_k, b_k : 関数 φ および ψ に関するべき級数の係数
 $a_k^{(s)}, b_k^{(s)}$: a_k, b_k に関する補助係数
 D_i : 係数, 式 (13)
 E : 縦弾性係数
 E_i : 係数, 式 (13)'
 $H, H_k, H_k^{(n)}$: 式簡略のための係数, 式 (28), (29)
 K, K' : 穴形状に関する係数, 式 (7)'', (7)'''
 k_i : 材料定数で平面応力問題に対し $\bar{\alpha}E$, 平面ひずみ問題に対し $\bar{\alpha}E/(1-\nu)$
 m : 多角形の写像関数のすみの丸みを支配する定数
 n : 多角形の写像関数の辺数を支配する定数
 P_k : 定数, 式 (20)
 P_{1k}, P_{0k} : 定数, 式 (19)', (19)''
 $P_k^{(s)}$: P_k に関する補助係数
 q : 単位体積, 単位時間当たりの発熱量
 R : 写像のスケールを定める定数
 R_c : 実数部分
 s : z 面の流通点 X_1+iX_2 に対応する ζ 面の点 $=\lambda_1+i\lambda_2=\delta e^{i\theta}$
 V : $\Delta V=k_i\tau$ の特解
 X_1, X_2 : z 面の直角流通座標 (current coordinate)
 x_1, x_2 : z 面の直角座標
 z : z 面の点, $=x_1+ix_2$
 $\bar{\alpha}$: 線膨張係数
 Δ : ラプラスの演算子
 δ, θ : ζ 面の流通座標 (極座標)
 ζ : ζ 面の点 $=\xi_1+i\xi_2=\rho e^{i\theta}=e^{\alpha+i\theta}$
 λ_r : 熱伝導率
 λ_1, λ_2 : ζ 面の流通座標 (直角座標)
 ν : ポアソン比
 ξ_1, ξ_2 : ζ 面の直角座標
 ρ, θ : ζ 面の極座標
 $\sigma_{\rho\rho}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{\rho\theta}$: 極座標 (ρ, θ) による直角およびせん断応力成分
 $\sigma=e^{i\theta}$: 単位円上の値
 $\sigma_0=\rho_0 e^{i\theta}$: 単位円の外の同心円上の値

* 昭和 44 年 6 月 6 日 関西支部第 222 回講演会において講演, 原稿受付 昭和 44 年 7 月 8 日.

** 正員, 静岡大学工学部 (浜松市城北 3-5-1).

*** 准員, 静岡大学工学部.

- τ : 標準状態を基準にした温度
- τ_i : 内側境界上の温度
- φ, ψ : 複素応力関数
- $\omega(\zeta)$: 写像関数
- i : i に関する偏微分記号

3. 解 析

先報の基礎関係についての途中経過は省略して記す。極座標系の複素応力関数 φ, ψ による二次元熱応力一般式は、単位円写像関数 $z = \omega(\zeta)$ を用いるとき次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho} + \sigma_{\theta\theta} &= 4R_i \{ \varphi'(\zeta) / \omega'(\zeta) \} - k_i \tau \dots\dots\dots(1) \\ \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\rho\rho} + 2i\sigma_{\theta\rho} &= \{ 2\zeta^2 / \rho^2 \omega'(\zeta) \} [\overline{\omega(\zeta)} \{ \varphi'(\zeta) / \omega'(\zeta) \}' + \psi'(\zeta)] \\ &\quad - \frac{4\zeta^2}{\rho^2 \omega'(\zeta)} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial \zeta^2} \frac{1}{\omega'(\zeta)} - \frac{\partial V}{\partial \zeta} \frac{\omega''(\zeta)}{\omega'(\zeta)^2} \right] - k_i \tau \dots\dots\dots(2) \end{aligned}$$

$\Delta V = k_i \tau$ の特解を V とすれば、 V は ζ 面において次記積分で与えられる。

$$\begin{aligned} V(\xi_1, \xi_2) &= \frac{k_i}{2\pi} \int_{S_1} \tau(\lambda_1, \lambda_2) \omega'(s) \overline{\omega'(s)} \ln [(\zeta - s) \\ &\quad \times (\bar{\zeta} - \bar{s})]^{1/2} d\lambda_1 d\lambda_2 \dots\dots\dots(3) \end{aligned}$$

ただし ζ 面における $s = \lambda_1 + i\lambda_2 = \delta e^{i\theta}$ は z 面の流通座標点 $X_1 + iX_2$ に対応する。式(3)より $\rho = 1$ と $\rho = \rho_0$ の円形リング状部分に対しては

$$\begin{aligned} V_{,1-i} V_{,2} &= -\frac{k_i}{2\pi i \omega'(\zeta)} \left(\int_1^{\rho} \right. \\ &\quad \left. + \int_{\rho}^{\rho_0} \right) \int_{|s|=\delta} \frac{\tau \omega'(s) \overline{\omega'(s)}}{s(s-\zeta)} \delta d\delta ds \dots\dots\dots(4) \end{aligned}$$

ただし上式右辺のこの中の積分は、第1項めは $|s| < |\zeta|$ に対し、第2項めは $|s| > |\zeta|$ に対して行なわれる。

$\rho = 1$ と $\rho = \rho_0$ についての境界条件式は

$$\begin{aligned} \varphi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(1/\sigma)}} \bar{\varphi}'\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \bar{\psi}\left(\frac{1}{\sigma}\right) &= (V_{,1+i} V_{,2})_{\rho=1} \dots\dots\dots(5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(\sigma_0) + \frac{\omega(\sigma_0)}{\overline{\omega'(\rho_0^2/\sigma_0)}} \bar{\varphi}'\left(\frac{\rho_0^2}{\sigma_0}\right) + \bar{\psi}\left(\frac{\rho_0^2}{\sigma_0}\right) &= (V_{,1+i} V_{,2})_{\rho=\rho_0} \dots\dots\dots(6) \end{aligned}$$

ただし $\sigma = e^{i\theta}$ および $\sigma_0 = \rho_0 e^{i\theta}$ は、それぞれ内外両境界上の点を表わす。いま次の単位円写像関数

$$\begin{aligned} z &= R(\zeta + m\zeta^{-n}) \quad (R > 0, 0 \leq m \leq 1/n) \dots\dots\dots(7) \\ z &= x_1 + ix_2, \quad \zeta = \xi_1 + i\xi_2 = e^{i\theta} = \rho e^{i\theta} \dots\dots\dots(7)' \end{aligned}$$

によって z 面のすみを丸めた $n+1$ 多角形穴をもつ有限領域を、 ζ 面の単位円と同心円でできるリング状部分に等角写像する。この場合次式の関係をもつ K およ

び K' を定義しておく*。

$$K = \frac{\text{すみ部曲率半径}}{\text{穴の最大半径}} = \frac{(1-nm)^2}{(1+m)(1+n^2m)} \dots\dots\dots(7)''$$

$$\begin{aligned} K' &= \frac{\text{穴の最大半径}}{\text{外部境界の最大半径}} \\ &= \frac{(1+m)}{\sqrt{\rho_0^2 + 2m\rho_0^{-n+1} + m^2\rho_0^{-2n}}} \dots\dots\dots(7)''' \end{aligned}$$

さて一様な内部熱発生 q をもつ熱伝導式は $-\lambda_\tau \Delta \tau = q$ (8)

上式は ζ 面については

$$\partial^2 \tau / \partial \xi_1^2 + \partial^2 \tau / \partial \xi_2^2 = -\omega'(\zeta) \overline{\omega'(\zeta)} q / \lambda_\tau \dots\dots\dots(9)$$

まず両境界温度一定の場合を考えると、境界条件は

$$\begin{aligned} \tau &= R\tau_i \quad (\rho = 1 \text{ に対し}) \\ \tau &= 0 \quad (\rho = \rho_0 \text{ に対し}) \end{aligned} \dots\dots\dots(10)$$

式(7)による式(9)の温度関数の解は

$$\begin{aligned} \tau &= R\tau_i \frac{\ln(\rho_0/\rho)}{\ln \rho_0} + \frac{qR^2}{4\lambda_\tau} \left\{ \frac{1}{\ln \rho_0} [(1+m^2)\ln \rho_0 \right. \\ &\quad + \{(\rho_1^2 - 1) + m^2(\rho_0^{-2n} - 1)\} \ln \rho] - (\rho^2 + m^2\rho^{-2n}) \\ &\quad + 2m \cos(n+1)\theta [-\rho^{-(n+1)} + \{(1-\rho_0^2)\rho^{n+1} \\ &\quad \left. + \rho_0^2(1-\rho_0^{-2n})\rho^{-(n+1)}\} (1-\rho_0^{2(n+1)})^{-1}] \right\} \dots\dots\dots(11) \end{aligned}$$

上式を式(4)に代入し、積分を実行すれば

$$\begin{aligned} V_{,1-i} V_{,2} &= \frac{R^2 k_i}{\omega'(\zeta)} \left[R \{ -D_1(\rho)\zeta^n + D_2(\rho)\zeta^{-1} \right. \\ &\quad + D_3(\rho)\zeta^{-(n+2)} + \frac{qR^2}{4\lambda_\tau} \{ -D_4(\rho)\zeta^n \\ &\quad - D_5(\rho)\zeta^{2n+1} + D_6(\rho)\zeta^{-1} + D_7(\rho)\zeta^{-(n+2)} \\ &\quad \left. + D_8(\rho)\zeta^{-(2n+8)} \} \right] \dots\dots\dots(12) \end{aligned}$$

ただし、 $D_i(\rho)$ は次式を表わし

$$\begin{aligned} D_1(\rho) &= E_1(\rho_0) - E_1(\rho), \quad D_2(\rho) = E_2(\rho) - E_2(1) \\ D_3(\rho) &= E_3(\rho) - E_3(1), \quad D_4(\rho) = E_4(\rho_0) - E_4(\rho) \\ D_5(\rho) &= E_5(\rho_0) - E_5(\rho), \quad D_6(\rho) = E_6(\rho) - E_6(1) \\ D_7(\rho) &= E_7(\rho) - E_7(1), \quad D_8(\rho) = E_8(\rho) - E_8(1) \dots\dots\dots(13) \end{aligned}$$

および $E_i(\rho)$ は次式を表わす。

$$\begin{aligned} E_1(\rho) &= nm \left\{ \frac{-\tau_i}{\ln \rho_0} \left(\frac{\rho^{-2n}}{2n} \ln \rho + \frac{\rho^{-2n}}{(2n)^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\rho^{-2n}}{2n \ln \rho_0} \tau_i \ln \rho_0 \right\} \\ E_2(\rho) &= \frac{-\tau_i}{\ln \rho_0} \left(\frac{\rho^2}{2} \ln \frac{\rho}{\rho_0} - \frac{\rho^2}{4} \right) - m^2 \left\{ \frac{-n^2 \tau_i}{\ln \rho_0} \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{\rho^{-2n}}{2n} \ln \rho + \frac{\rho^{-2n}}{(2n)^2} \right) + \frac{n\rho^{-2n}}{2 \ln \rho_0} \tau_i \ln \rho_0 \right\} \\ E_3(\rho) &= -nm \left\{ \frac{-\tau_i}{\ln \rho_0} \left(\frac{\rho^2}{2} \ln \rho - \frac{\rho^2}{4} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\rho^2}{2 \ln \rho_0} \tau_i \ln \rho_0 \right\} \end{aligned}$$

* K の正負はそれぞれ曲線が外方に凸、凹に対応する。

$$\begin{aligned}
 E_4(\rho) &= m \left[-\frac{\rho^{-2(n-1)}}{2} + \frac{1}{1-\rho_0^{2(n+1)}} \left\{ (1-\rho_0^2) \frac{\rho^2}{2} - \rho_0^2 (1-\rho_0^{2n}) \frac{\rho^{-2n}}{2n} \right\} + \frac{\rho^{-2n}}{2} + \frac{n}{\ln \rho_0} (\rho_0^2 - 1) \right. \\
 &\quad \times \left. \left(\frac{\rho^{-2n}}{2n} \ln \rho + \frac{\rho^{-2n}}{(2n)^2} \right) \right] + m^3 \left[\frac{\rho^{-2n}}{2 \ln \rho_0} + \frac{n-1}{4} \rho^{-4n} + \frac{n}{\ln \rho_0} (\rho_0^{-2n} - 1) \left(\frac{\rho^{-2n}}{2n} \ln \rho + \frac{\rho^{-2n}}{(2n)^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{n^2}{1-\rho_0^{2(n+1)}} \left\{ (1-\rho_0^2) \frac{\rho^{-2n}}{2n} + \rho_0^2 (1-\rho_0^{2n}) \frac{\rho^{-(4n+2)}}{4n+2} \right\} \right] \\
 E_5(\rho) &= nm^2 \left[-\frac{\rho^{-4n}}{4n} + \frac{1}{1-\rho_0^{2(n+1)}} \left\{ (1-\rho_0^2) \frac{\rho^{-2n}}{2n} + \rho_0^2 (1-\rho_0^{2n}) \frac{\rho^{-(4n+2)}}{4n+2} \right\} \right] \\
 E_6(\rho) &= \left\{ \frac{\rho^2}{2} + \frac{1}{\ln \rho_0} (\rho_0^2 - 1) \left(\frac{\rho^2}{2} \ln \rho - \frac{\rho^2}{4} \right) - \frac{\rho^4}{4} \right\} + m^2 \left[\frac{\rho^2}{2} + \frac{1}{\ln \rho_0} (\rho_0^{-2n} - 1) \left(\frac{\rho^2}{2} \ln \rho - \frac{\rho^2}{4} \right) - \frac{n\rho^{-2n}}{2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{n^2}{\ln \rho_0} (\rho_0^2 - 1) \left(\frac{\rho^{-2n}}{2n} \ln \rho + \frac{\rho^{-2n}}{(2n)^2} \right) + \frac{n-1}{2} \rho^{-(2n-1)} - \frac{2n}{1-\rho_0^{2(n+1)}} \left\{ \frac{\rho^2}{2} (1-\rho_0^2) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \rho_0^2 (1-\rho_0^{2n}) \frac{\rho^{-2n}}{2n} \right\} \right] - m^4 \left\{ \frac{n\rho^{-2n}}{2} - \frac{n\rho^{-4n}}{4} + \frac{n^2}{\ln \rho_0} (\rho_0^{-2n} - 1) \left(\frac{\rho^{-2n}}{2n} \ln \rho + \frac{\rho^{-2n}}{(2n)^2} \right) \right\} \\
 E_7(\rho) &= m \left[\frac{n-1}{4} \rho^4 + \frac{1}{1-\rho_0^{2(n+1)}} \left\{ (1-\rho_0^2) \frac{\rho^{2(n+2)}}{2(n+2)} + \rho_0^2 (1-\rho_0^{2n}) \frac{\rho^2}{2} \right\} - \frac{n\rho^2}{2} - \frac{n}{\ln \rho_0} (\rho_0^2 - 1) \right. \\
 &\quad \times \left. \left(\frac{\rho^2}{2} \ln \rho - \frac{\rho^2}{4} \right) \right] + m^3 \left[\frac{n}{2} \rho^{-2(n-1)} + \frac{n^2}{1-\rho_0^{2(n+1)}} \left\{ \frac{\rho^2}{2} (1-\rho_0^2) - \rho_0^2 (1-\rho_0^{2n}) \frac{\rho^{-2n}}{2n} \right\} - \frac{n\rho^2}{2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{n}{\ln \rho_0} (\rho_0^{-2n} - 1) \left(\frac{\rho^2}{2} \ln \rho - \frac{\rho^2}{4} \right) \right] \\
 E_8(\rho) &= nm^2 \left[\frac{\rho^4}{4} - \frac{1}{1-\rho_0^{2(n+1)}} \left\{ \frac{1-\rho_0^2}{2(n+2)} \rho^{2(n+2)} + \rho_0^2 (1-\rho_0^{2n}) \frac{\rho^2}{2} \right\} \right] \dots\dots\dots (13)'
 \end{aligned}$$

式(12)より $\rho=1$ および $\rho=\rho_0$ に対し

$$(V_{,1} + iV_{,2})_{\rho=1} = \frac{-Rk_t}{1-nm\sigma^{n+1}} \left[RD_1(1)\sigma^{-n} + \frac{qR^2}{4\lambda_\tau} (D_4(1)\sigma^{-n} + D_5(1)\sigma^{-(2n+1)}) \right] \dots\dots\dots (14)$$

$$\begin{aligned}
 (V_{,1} + iV_{,2})_{\rho=\rho_0} &= \frac{Rk_t}{1-nm\rho_0^{-2(n+1)}\sigma_0^{n+1}} \left[R \{ D_2(\rho_0)\rho_0^{-2}\sigma_0 + D_3(\rho_0)\rho_0^{-2(n+2)}\sigma_0^{n+2} \} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{qR^2}{4\lambda_\tau} \{ D_6(\rho_0)\rho_0^{-2}\sigma_0 + D_7(\rho_0)\rho_0^{-2(n+2)}\sigma_0^{n+2} + D_8(\rho_0)\rho_0^{-2(2n+3)}\sigma_0^{2n+3} \} \right] \dots\dots\dots (15)
 \end{aligned}$$

境界外力がなく, また $V_{,1} - iV_{,2}$ が式(12)より明らかのように一価関数となるため, 穴周辺における変位は一価となり*, 二つの複素応力関数 $\varphi(\zeta), \psi(\zeta)$ は, 次のようにリング状部分でローラン展開できる.

$$\varphi(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \zeta^k \dots\dots\dots (16)$$

$$\psi(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k \zeta^k \dots\dots\dots (17)$$

係数 a_k, b_k は問題の実軸に関する対称性より実数となる. 式(14)~(16)および(17)を, 境界条件式(5)および(6)に代入し, それぞれの式に $\frac{1}{2\pi i} \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}$ および $\frac{1}{2\pi i} \frac{d\sigma_0}{\sigma_0-\zeta}$ をかけて積分し, コーシーの積分定理を利用すれば, a_k, b_k 間の関係式として次式を得る.

$$-a_{-k} + nma_{-(k+n+1)} - (k+2)a_{k+2} - m(k-n-1)a_{-(k-n+1)} - b_k + nmb_{k+n-1} = P_{1k} \dots\dots\dots (18)$$

$$\begin{aligned}
 a_k - nm\rho_0^{-2(n+1)}a_{k-n-1} - (2-k)\rho_0^{2(1-k)}a_{2-k} - m(k+n-1)\rho_0^{-2(k+n)} \\
 \times a_{-(k+n-1)} + \rho_0^{-2k}b_{-k} - nm\rho_0^{-2k}b_{-(k-n-1)} = P_{0k} \dots\dots\dots (19)
 \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned}
 P_{1n} &= Rk_t \{ RD_1(1) + qR^2 D_4(1)/4\lambda_\tau \} \\
 P_{1(2n+1)} &= Rk_t qR^2 D_5(1)/4\lambda_\tau \\
 P_{1k} &= 0 \text{ (その他の } k \text{ に対し)} \dots\dots\dots (19)'
 \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}
 P_{01} &= Rk_t \{ RD_2(\rho_0)\rho_0^{-2} + qR^2 D_6(\rho_0)\rho_0^{-2}/4\lambda_\tau \} \\
 P_{0(n+2)} &= Rk_t \{ RD_3(\rho_0)\rho_0^{-2(n+2)} + qR^2 D_7(\rho_0)\rho_0^{-2(n+2)}/4\lambda_\tau \}
 \end{aligned}$$

* Gatewood が用いた応力関数中の多価なる $|M(z)|; k$ は $V_{,1} - V_{,2}$ が一価関数なることより現われない.

$$P_{0(2n+3)} = Rk_t \{qR^2 D_6(\rho_0) \rho_0^{-2(2n+3)} / 4\lambda_r\}$$

$$P_{0k} = 0 \text{ (その他の } k \text{ に対し)} \dots\dots\dots (19)''$$

式 (18), (19) より b_n を消去すれば次の関係式を得る.

$$(\rho_0^{-2k} - 1)a_{-k} + nm(1 - \rho_0^{-2(k+n+1)})a_{-(k+n+1)} + (k+2)(\rho_0^2 - 1)a_{k+2}$$

$$+ m(k-n+1)(\rho_0^{-2n} - 1)a_{k-n+1} = P_k \dots\dots\dots (20)$$

ただし

$$P_k = P_{1k} + \rho_0^{-2k} P_{0(-k)}$$

上式より a_k および P_k を求めるため次のように摂動法を利用する. すなわち a_k および P_k を次の無限級数におく.

$$a_k = \sum_{s=0}^{\infty} a_k^{(s)} m^s \dots\dots\dots (21)$$

$$P_k = \sum_{s=0}^{\infty} P_k^{(s)} m^s \dots\dots\dots (22)$$

式 (21), (22) を式 (20) に代入し係数比較によって, $k \neq 1$ に対して

$$a_k^{(s)} = \frac{1}{D} \left[\{(\rho_0^{-2(k-2)} - 1)P_{-k}^{(s)} + (k-2)(\rho_0^2 - 1)P_{k-2}^{(s)}\} + \{n(\rho_0^{2(k-n-1)} - 1)(\rho_0^{-2(k-2)} - 1)\} \right.$$

$$- (k-2)(k-n-1)(\rho_0^2 - 1)(\rho_0^{-2n} - 1)a_{k-n-1}^{(s-1)} + \{(k+n-1)(\rho_0^{-2n} - 1)(\rho_0^{-2(k-2)} - 1)\}$$

$$\left. + n(k-2)(\rho_0^2 - 1)(\rho_0^{-2(k+n-1)} - 1)a_{-(k+n-1)}^{(s-1)} \right] \dots\dots\dots (23)$$

ただし

$$D = (\rho_0^{2k} - 1)(\rho_0^{-2(k-2)} - 1) + k(k-2)(\rho_0^2 - 1)^2$$

$k = 1$ に対しては

$$a_1^{(s)} = \frac{P_{-1}^{(s)} + 2n(\rho_0^{-2n} - 1)a_{-n}^{(s-1)}}{2(\rho_0^2 - 1)} \dots\dots\dots (23)'$$

上の $a_k^{(s)}$ の値を式 (21) に代入すれば a_k が決定される. b_k も同様に決定されるから, $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ は完全に求まる. 次に式 (3) より

$$\frac{\partial V}{\partial \zeta} = \frac{\omega'(\zeta)}{2} (V_{,1} - iV_{,2})$$

$$= \frac{R^2 k_t}{2} \left[R \left\{ -D_1(\rho) \zeta^n + D_2(\rho) \frac{1}{\zeta} + D_3(\rho) \frac{1}{\zeta^{n+2}} \right\} + \frac{qR^2}{4\lambda_r} \left\{ -D_4(\rho) \zeta^n - D_5(\rho) \zeta^{2n+1} \right. \right.$$

$$\left. \left. + D_6(\rho) \frac{1}{\zeta} + D_7(\rho) \frac{1}{\zeta^{n+2}} + D_8(\rho) \frac{1}{\zeta^{2n+3}} \right\} \right] \dots\dots\dots (24)$$

この結果式 (1) および (2) の右辺は全部既知となり, $n+1$ 角形穴の熱応力成分は次式のように決定される.

$$\sigma_{\rho\rho} = \frac{1}{2H} \left[2 \sum_{-\infty}^{\infty} \{ (2H_k^{(1)} - H_k^{(5)}) \cos(k+2n+1)\theta - H_k^{(6)} \cos(k+n+2)\theta \right.$$

$$+ (2H_k^{(2)} - H_k^{(7)}) \cos(k+n)\theta - H_k^{(8)} \cos(k+1)\theta + (2H_k^{(8)} - H_k^{(9)}) \cos(k-1)\theta$$

$$- H_k^{(10)} \cos(k-n)\theta + (2H_k^{(4)} - H_k^{(11)}) \cos(k-n-2)\theta - H_k^{(12)} \cos(k-2n-1)\theta$$

$$- \{ (H^{(18)} + H^{(24)}) \cos 3(n+1)\theta + (H^{(13)} + H^{(17)} + H^{(19)} + H^{(23)}) \cos 2(n+1)\theta$$

$$\left. \left. + (H^{(14)} + H^{(16)} + H^{(20)} + H^{(22)}) \cos(n+1)\theta + H^{(15)} + H^{(21)} \right\} \right] \dots\dots\dots (25)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{2H} \left[2 \sum_{-\infty}^{\infty} \{ (2H_k^{(1)} + H_k^{(5)}) \cos(k+2n+1)\theta + H_k^{(6)} \cos(k+n+2)\theta \right.$$

$$+ (2H_k^{(2)} + H_k^{(7)}) \cos(k+n)\theta + H_k^{(8)} \cos(k+1)\theta + (2H_k^{(8)} + H_k^{(9)}) \cos(k-1)\theta$$

$$+ H_k^{(10)} \cos(k-n)\theta + (2H_k^{(4)} + H_k^{(11)}) \cos(k-n-2)\theta + H_k^{(12)} \cos(k-2n-1)\theta$$

$$+ \{ (H^{(18)} + H^{(24)}) \cos 3(n+1)\theta + (H^{(13)} + H^{(17)} + H^{(19)} + H^{(23)}) \cos 2(n+1)\theta$$

$$\left. \left. + (H^{(14)} + H^{(16)} + H^{(20)} + H^{(22)}) \cos(n+1)\theta + H^{(15)} + H^{(21)} \right\} \right]$$

$$- \frac{Rk_t}{\ln \rho_0} (\tau_i \ln \rho_0 - \tau_e \ln \rho) + \frac{qR^2 k_t}{4\lambda_r} \left[\frac{1}{\ln \rho_0} \{ (1+m^2) \ln \rho_0 + \{ (\rho_0^2 - 1) + m^2(\rho_0^{-2n} - 1) \} \ln \rho \} \right]$$

$$-(\rho^2 + m^2 \rho^{-2n}) + 2m \cos(n+1)\theta \left[-\rho^{-(n-1)} + \frac{1}{1-\rho_0^2(n+1)} \{-(\rho_0^2-1)\rho^{n+1} + \rho_0^2(1-\rho_0^{2n})\rho^{-(n+1)}\} \right] \dots\dots\dots(26)$$

$$\sigma_{\rho\theta} = \frac{1}{2H} \left[2 \sum_{-\infty}^{\infty} \{H_k^{(5)} \sin(k+2n+1)\theta + H_k^{(6)} \sin(k+n+2)\theta + H_k^{(7)} \sin(k+n)\theta + H_k^{(8)} \sin(k+1)\theta + H_k^{(9)} \sin(k-1)\theta + H_k^{(10)} \sin(k-n)\theta + H_k^{(11)} \sin(k-n-2)\theta + H_k^{(12)} \sin(k-2n-1)\theta + \{(H^{(18)}-H^{(24)}) \sin 3(n+1)\theta + (H^{(13)}+H^{(19)}-H^{(17)}-H^{(23)}) \sin 2(n+1)\theta + (H^{(14)}+H^{(20)}-H^{(16)}-H^{(22)}) \sin(n+1)\theta\} \right] \dots\dots\dots(27)$$

ただし

$$H = R \{1 + n^2 m^2 \rho^{-2(n+1)} - 2nm \rho^{-(n+1)} \cos(n+1)\theta\}^2 \dots\dots\dots(28)$$

$$H_k^{(1)} = n^2 m^2 \rho^{k-2n-3} k a_k$$

$$H_k^{(2)} = -(2nm \rho^{k-n-2} + n^3 m^3 \rho^{k-3n-4}) k a_k$$

$$H_k^{(3)} = (\rho^{k-1} + 2n^2 m^2 \rho^{k-2n-3}) k a_k$$

$$H_k^{(4)} = -nm \rho^{k-n-2} k a_k$$

$$H_k^{(5)} = -k(k-1)nm^2 \rho^{k-2n-3} a_k$$

$$H_k^{(6)} = -nmk \rho^{k-n-2} b_k$$

$$H_k^{(7)} = \{-k(k-1)(n-1)m \rho^{k-n-2} + k(k-1)n^2 m^3 \rho^{k-3n-4} + kn^2(n+1)m^3 \rho^{k-3n-4}\} a_k$$

$$H_k^{(8)} = (k \rho^{k-1} + 2kn^2 m^2 \rho^{k-2n-3}) b_k$$

$$H_k^{(9)} = \{k(k-1)\rho^{k-1} + k(k-1)n(n-1)m^2 \rho^{k-2n-3} + k(n+1)n(n-1)m^2 \rho^{k-2n-3}\} a_k$$

$$H_k^{(10)} = (-2knm \rho^{k-n-2} - n^3 m^3 k \rho^{k-3n-4}) b_k$$

$$H_k^{(11)} = \{-k(k-1)nm \rho^{k-n-2} - kn(n+1)m \rho^{k-n-2}\} a_k$$

$$H_k^{(12)} = n^2 m^2 k \rho^{k-2n-3} b_k$$

$$H^{(13)} = 2R^2 k_t \{-n^2 m D_1(\rho) \rho^{-2}\}$$

$$H^{(14)} = 2R^2 k_t \{n D_1(\rho) \rho^{n-1} + n^2(2n+1)m^2 D_1(\rho) \rho^{-(n+3)} - nm D_2(\rho) \rho^{-(n+3)}\}$$

$$H^{(15)} = 2R^2 k_t \{D_2(\rho) \rho^{-2} - n(2n+1)m D_1(\rho) \rho^{-2} - n(n+2)D_3(\rho) \rho^{-2(n+2)} - n^3 m^2 D_2(\rho) \rho^{-2(n+2)}\}$$

$$H^{(16)} = 2R^2 k_t \{(n+2)D_3(\rho) \rho^{-(n+3)} + n^2 m D_2(\rho) \rho^{-(n+3)} + n^2 m^2 D_3(\rho) \rho^{-(3n+5)}\}$$

$$H^{(17)} = 2R^2 k_t \{-nm D_3(\rho) \rho^{-2(n+2)}\}$$

$$H^{(18)} = \frac{qR^2}{4\lambda_\tau} 2Rk_t \{-n(2n+1)m D_5(\rho) \rho^{n-1}\}$$

$$H^{(19)} = \frac{qR^2}{4\lambda_\tau} 2Rk_t \{(2n+1)D_5(\rho) \rho^{2n} - n^2 m D_4(\rho) \rho^{-2} + n^2(3n+2)m^2 D_5(\rho) \rho^{-2}\}$$

$$H^{(20)} = \frac{qR^2}{4\lambda_\tau} 2Rk_t \{n D_4(\rho) \rho^{n-1} - n(3n+2)m D_5(\rho) \rho^{n-1} - nm D_6(\rho) \rho^{-(n+3)} + n^2(2n+1)m^2 D_4(\rho) \rho^{-(n+3)}\}$$

$$H^{(21)} = \frac{qR^2}{4\lambda_\tau} 2Rk_t \{D_6(\rho) \rho^{-2} - n(2n+1)m D_4(\rho) \rho^{-2} - n(n+2)m D_7(\rho) \rho^{-2(n+2)} - n^3 m^2 D_6(\rho) \rho^{-2(n+2)}\}$$

$$H^{(22)} = \frac{qR^2}{4\lambda_\tau} 2Rk_t \{(n+2)D_7(\rho) \rho^{-(n+3)} + n^2 m D_6(\rho) \rho^{-(n+3)} + n^2 m^2 D_7(\rho) \rho^{-(3n+5)} - mn(2n+3)D_8(\rho) \rho^{-(3n+5)}\}$$

$$H^{(23)} = \frac{qR^2}{4\lambda_\tau} 2Rk_t \{(2n+3)D_8(\rho) \rho^{-2(n+2)} - nm D_7(\rho) \rho^{-2(n+2)} + n^2(n+2)m^2 D_8(\rho) \rho^{-2(2n+3)}\}$$

$$H^{(24)} = \frac{qR^2}{4\lambda_\tau} 2Rk_t \{-n(n+2)m D_8(\rho) \rho^{-(3n+5)}\}$$

$$\dots\dots\dots(29)$$

上記係数のうち $H_k^{(1)}$ から $H_k^{(12)}$ までは熱源 q に関する項と, 両境界の温度に関する項の両方を含むものであり, $H^{(13)}$ から $H^{(17)}$ までは両境界の温度だけに関する項で, $H^{(18)}$ から $H^{(24)}$ までは熱源だけに関する項になっている*。

次に外側境界断熱の場合には, 温度関数の境界条件は式(10)の代わりに

* 熱量 q と境界温度の関係が与えられないと, 応力成分の式表示の上では無次元表示はできない。

$$\left. \begin{aligned} \tau &= R\tau_i & (\rho=1 \text{ に対し}) \\ \partial\tau/\partial\rho &= 0 & (\rho=\rho_0 \text{ に対し}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(30)$$

上の条件のもとに温度関数を求めると次式になる.

$$\begin{aligned} \bar{\tau} &= \tau_i R + (qR^2/4\lambda_\tau) \{ (1-\rho^2) + m^2(1-\rho^{-2n}) + 2(\rho_0^2 - nm^2\rho_0^{-2n}) \ln \rho \} \\ &+ \frac{qR^2 m}{2\lambda_\tau} \left[-\rho^{-n+1} + \frac{1}{(n+1)(\rho_0^{2(n+1)}+1)} [\{ n+1 - (n-1)\rho_0^2 \} \rho^{n+1} + \rho_0^2 \{ (n+1)\rho_0^{2n} \right. \\ &\left. + (n-1) \} \rho^{-(n+1)}] \right] \cos(n+1)\theta \dots\dots\dots(31) \end{aligned}$$

以下前述の両境界一定温度の場合と同様な手続きによって, 応力成分を求めると次式のようにになる.

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_\tau \sigma_{\rho\rho}}{qR^2 k_i} &= \frac{1}{8H} \left[2 \sum_{-\infty}^{\infty} \{ (2H_k^{(1)} - H_k^{(5)}) \cos(k+2n+1)\theta - H_k^{(6)} \cos(k+n+2)\theta \right. \\ &+ (2H_k^{(2)} - H_k^{(7)}) \cos(k+n)\theta - H_k^{(8)} \cos(k+1)\theta + (2H_k^{(3)} - H_k^{(9)}) \\ &\times \cos(k-1)\theta - H_k^{(10)} \cos(k-n)\theta + (2H_k^{(4)} - H_k^{(11)}) \cos(k-n-2)\theta \\ &- H_k^{(12)} \cos(k-2n-1)\theta \} - \{ (H^{(18)} + H^{(24)}) \cos 3(n+1)\theta + (H^{(19)} + H^{(23)}) \\ &\times \cos 2(n+1)\theta + (H^{(20)} + H^{(22)}) \cos(n+1)\theta + H^{(21)} \} \dots\dots\dots(32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_\tau \sigma_{\theta\theta}}{qR^2 k_i} &= \frac{1}{8H} \left[2 \sum_{-\infty}^{\infty} \{ (2H_k^{(1)} + H_k^{(5)}) \cos(k+2n+1)\theta + H_k^{(6)} \cos(k+n+2)\theta \right. \\ &+ (2H_k^{(2)} + H_k^{(7)}) \cos(k+n)\theta + H_k^{(8)} \cos(k+1)\theta + (2H_k^{(3)} + H_k^{(9)}) \cos(k-1)\theta \\ &+ H_k^{(10)} \cos(k-n)\theta + (2H_k^{(4)} + H_k^{(11)}) \cos(k-n-2)\theta + H_k^{(12)} \cos(k-2n-1)\theta \} \\ &+ \{ (H^{(18)} + H^{(24)}) \cos 3(n+1)\theta + (H^{(19)} + H^{(23)}) \cos 2(n+1)\theta + (H^{(20)} + H^{(22)}) \\ &\times \cos(n+1)\theta + H^{(21)} \} - 1/4 \{ (1-\rho^2) + m^2(1-\rho^{-2n}) + 2(\rho_0^2 - nm^2\rho_0^{-2n}) \ln \rho \} \\ &- \frac{m}{2} \left[-\rho^{-n+1} + \frac{1}{(n+1)(\rho_0^{2(n+1)}+1)} [\{ n+1 - (n-1)\rho_0^2 \} \rho^{n+1} + \rho_0^2 \{ (n+1)\rho_0^{2n} \right. \\ &\left. + (n-1) \} \rho^{-(n+1)}] \right] \cos(n+1)\theta \dots\dots\dots(33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_\tau \sigma_{\theta\theta}}{qR^2 k_i} &= \frac{1}{8H} \left[2 \sum_{-\infty}^{\infty} \{ H_k^{(5)} \sin(k+2n+1)\theta + H_k^{(6)} \sin(k+n+2)\theta + H_k^{(7)} \sin(k+n)\theta \right. \\ &+ H_k^{(8)} \sin(k+1)\theta + H_k^{(9)} \sin(k-1)\theta + H_k^{(10)} \sin(k-n)\theta + H_k^{(11)} \sin(k-n-2)\theta \\ &+ H_k^{(12)} \sin(k-2n-1)\theta \} + \{ (H^{(18)} - H^{(24)}) \sin 3(n+1)\theta + (H^{(19)} - H^{(23)}) \\ &\times \sin 2(n+1)\theta + (H^{(20)} - H^{(22)}) \sin(n+1)\theta \} \dots\dots\dots(34) \end{aligned}$$

なお, $H_k^{(n)}$ の形式的意味は式 (29) と同一であるが, その中に含まれる a_k, b_k の係数値は P_i, E_i, D_i の内容が両境界一定温度の場合と全部異なってくるため当然異なった値になる*. しかしこの場合には, 定常状態であるためには内部熱発生量は全部内側境界より冷却されることから, 熱応力成分に影響をもつ q と温度分布の式が関係づけられるため, 応力成分表示中の係数は q に関してまとめられるから応力成分の無次元表示が可能になる.

4. 数値計算結果

数値計算は近似円形領域において, 辺中央がほぼ直線となるすみを丸めた正多角形穴を有する場合について行なった. このとき式 (17) の m, n は次の値をとる**.

- (i) 正三角形穴: $m=0.25, n=2, e^0=1, \rho_0=e^1=2.718282, K=0.100, K'=0.454$
- (ii) 正四角形穴: $m=0.133, n=3$ (2種類), $e^0=1, \rho_0=e^{0.4}$ および $\rho_0=e^1, K=0.145,$
 $K'=0.739$ (図4および8に対し), $K'=0.416$ (図5に対し)
- (iii) 正六角形穴: $m=1/20, n=5, e^0=1, \rho_0=e^1, K=0.338, K'=0.386$
- (iv) 正八角形穴: $m=1/50, n=7, e^0=1, \rho_0=e^1, K=0.366, K'=0.375$

* この場合には当然式 (29) の $H^{(13)}$ から $H^{(17)}$ までの項は存在しない. また P_i, E_i, D_i の内容記載は省略する.

** たとえば三角形穴の場合, この n, m の値のときに辺中点の曲率半径が無大になる. 他の形状においても目視的にはすみ以外は直線となる. なお e^0 はく面上の内側境界の半径, ρ_0 は外側境界の半径を表す.

以上の多角形穴について, 温度分布および応力成分の数値計算を行なった. 一様な熱発生があり両境界一定温度の場合の式 (25)~(27) の応力成分は, 数値計算のさい両境界温度に関する項 $\bar{\sigma}_{ik}$ (温度分布については $\bar{\tau}$) と, 熱源に関する項 $\bar{\sigma}_{ik}$ (温度分布については $\bar{\tau}$) に分離されるから, そのおのおのについて無次元化表示した $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ および $\bar{\sigma}_{\theta r}$ を, 図3~7に示す, 温度分布については正三角形穴の場合だけを図1, 2に示す. 外側境界断熱の場合には熱応力に関係ある温度分布は熱源 q と関係づけられるから, 応力成分は分離されずに一つの無次元化表示になるが, 正四角形穴 ($b=e^{0.4}$

の場合) について $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{\theta r}$, $\sigma_{r\theta}$ の分布図を図8に示す.

5. 結 言

重複連結領域の二次元熱応力問題の一つとして, 最近重要視されてきた内部熱発生のある領域の熱応力のうち, 限られた範囲のすみ曲率半径をもつすみを丸めた近似多角形穴をもつ近似円形領域の場合を, 複素応力関数法により解いた. そのさい, 最大応力 $\sigma_{\theta\theta}$ は内側穴周辺で発生するが, 単位円等角写像により内側境界条件は厳密に合わせてあるから問題はない. 本解析法はかなり膨大な計算量になるが*, 摂動法利用により解決し, 応力関数 φ , ψ の級数中の係数 a_k , b_k の収束については a_k , b_k とも約 50~140 項まで採用し

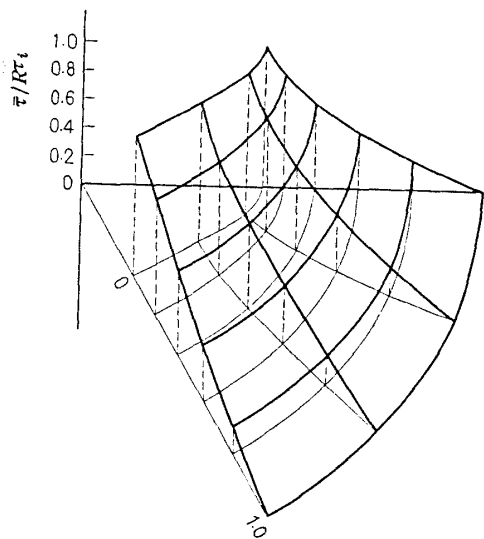


図1 三角形穴をもつ円形領域の温度分布 $\bar{\tau}$

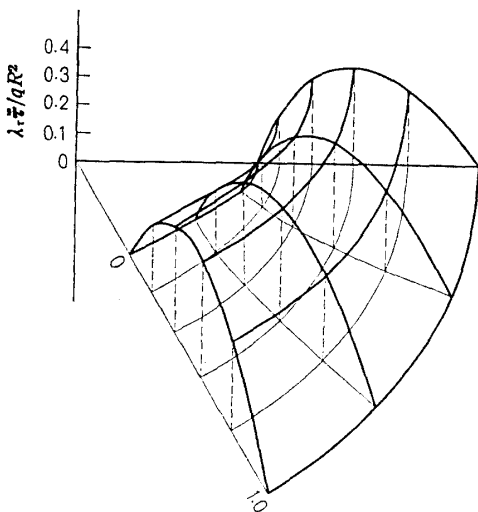
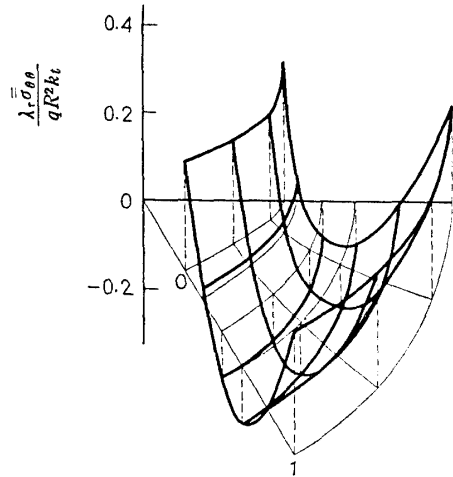
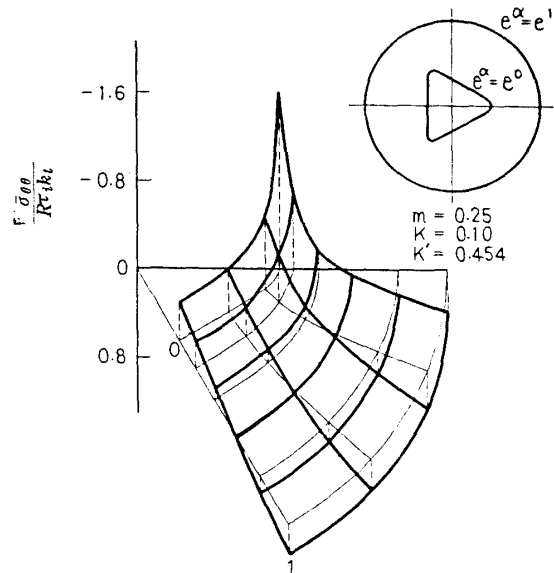


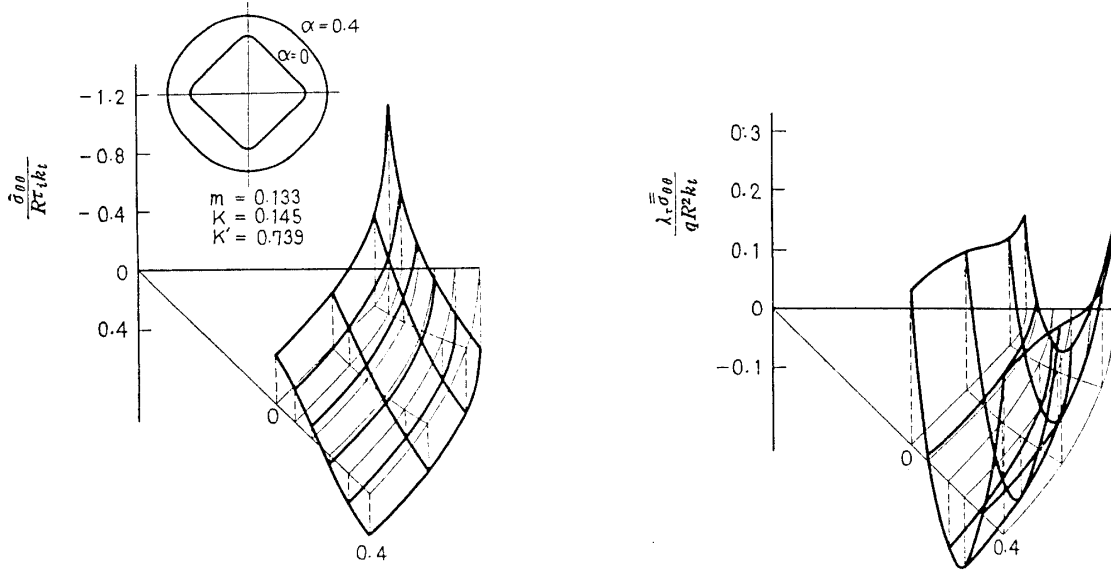
図2 三角形穴をもつ円形領域の温度分布 $\bar{\tau}$



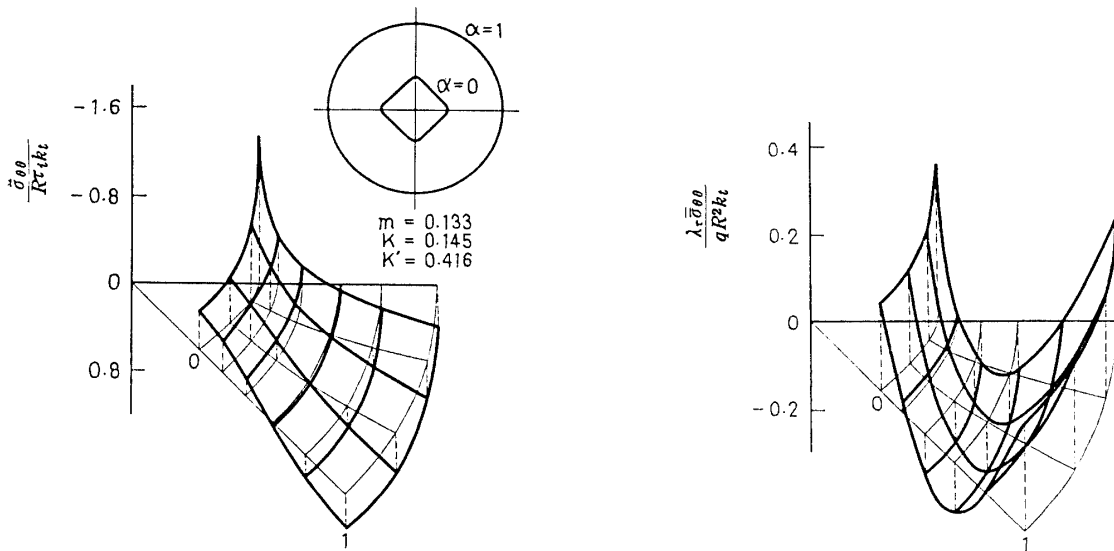
両境界一定温度, 熱発生 q

図3 三角形穴の $\sigma_{\theta\theta}$ の分布

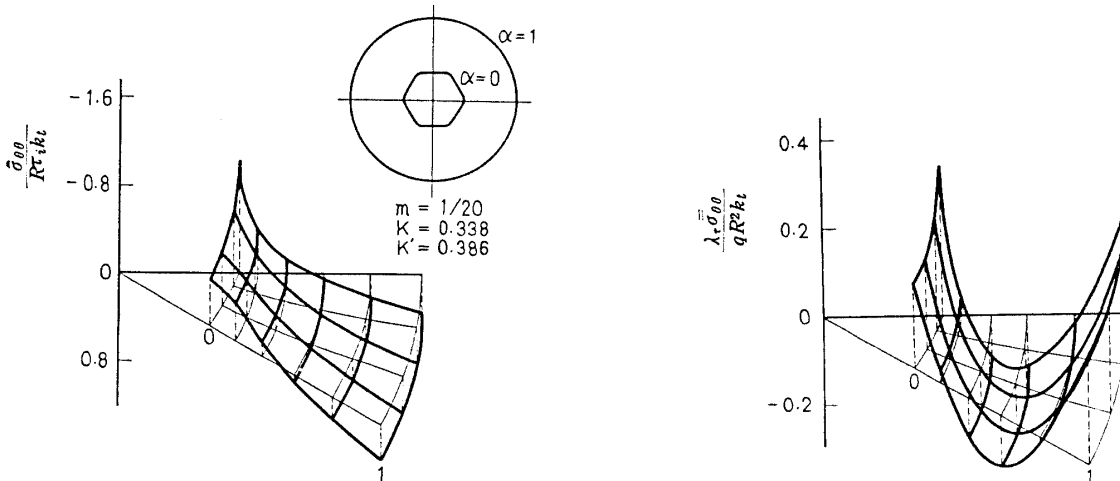
* 数値計算は京都大学 F A COM 230-60 大形電子計算機による.



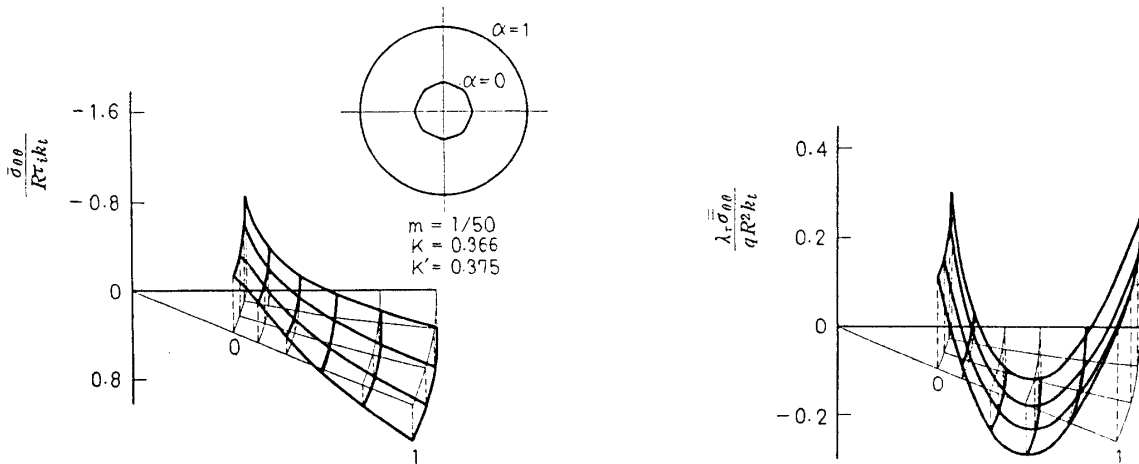
両境界一定温度，熱発生 q
 図 4 四角形穴の $\sigma_{\theta\theta}$ の分布



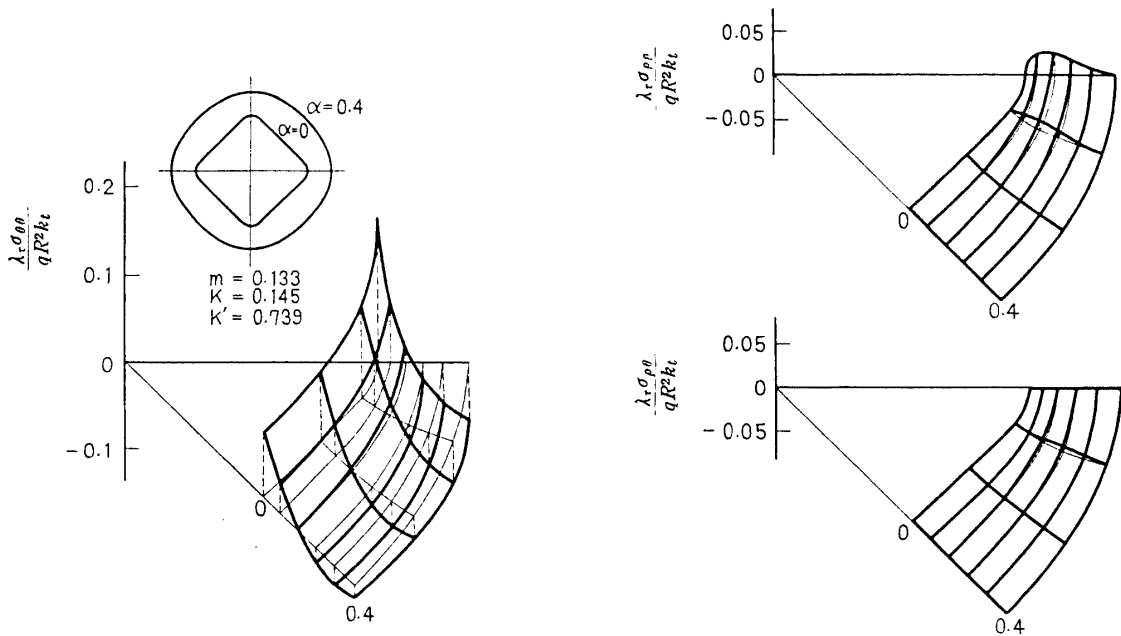
両境界一定温度，熱発生 q
 図 5 四角形穴の $\sigma_{\theta\theta}$ の分布



両境界一定温度，熱発生 q
 図 6 六角形穴の $\sigma_{\theta\theta}$ の分布



両境界一定温度, 熱発生 q
 図 7 八角形穴の σ_{00} の分布



外側断熱境界, 熱発生 q
 図 8 四角形穴の応力分布

た. このことの可否は自由境界の条件が満足されているかどうかで吟味することができるわけであるが, いちばん精度の悪い断熱境界の場合でも, 自由境界上の $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{\rho\rho}$ の値は本報告の数値計算例の場合に 10^{-6} 程度であったから, 適当であったと考えてよい. いずれにせよ前報と異なり熱発生のある場合は, 解析の手数は加速的にめんどろになるが, さいわいに大形電算機利用が可能になったため, 時間的にはそれほどでもなかった. なお簡単に大形電算機が利用できるようになった現在, 摂動法利用による解析法は見直されるべき手段と思われる.

文 献

- (1) 竹内・ほか 2 名, 機械学会論文集, 34-259 (昭 43-3), 403.
- (2) Y. Takeuti & T. Sekiya, *Z. AMM*, 48-4 (1968), 237.
- (3) Y. Takeuti & N. Sumi, *Int. J. Engng. Sci.*, 6-9 (1968), 539.
- (4) Y. Takeuti, *Z. AMM*, 45-4 (1965), 177.
- (5) 竹内, 機械学会論文集, 32-242 (昭 41-10), 1470.
- (6) B.E. Gatewood, *Phil. Mag.*, 7-32 (1941), 282.
- (7) N.I. Muskhelishvili (J.R.M. Radok 訳), *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, (1962), P. Noordhoff.
- (8) 竹内・山田, 機械学会論文集, 35-271 (昭 44-3), 541.