

## 中学との接続を重視した高等学校の幾何教育に関する研究（第 3 次） －三角比の指導に焦点を当てて－

A Study on Geometry Teaching at Senior High School which attach  
importance to connection of Junior High School (the third)  
－ focus on Teaching of Trigonometry －

熊倉啓之  
Hiroyuki KUMAKURA

（平成18年10月2日受理）

### 1. はじめに

日本数学教育学会教育課程委員会では、「新しい時代の算数・数学教育を目指して－算数・数学科学習指導要領改訂についての要望」（2006）において、算数・数学科における現行学習指導要領の課題を分析し、次期学習指導要領改訂案を検討している。この中で、小・中・高等学校全体を通しての重要な視点として、「算数・数学科における内容のスパイラル方式の必要性」を挙げている。現行の学習指導要領では、内容の厳選という立場から、小中、あるいは中高でスパイラル方式で指導していた内容の多くが、一方の学校種で削除されてしまった。このことに対する問題点を指摘し、次期学習指導要領では改善したいという主張である。

また、中央教育審議会初等中等教育分科会教育課程部会における「審議経過報告」（2006）にも、次のような記述がある。

「算数・数学や理科については、教育内容が積み上げ型になっているが、小・中・高等学校を通じての内容面・能力面での系統性を重視する必要がある。その際、学問的な系統性だけでなく、発達や学年の段階に応じた反復（スパイラル）の中で確実に定着させることができるよう教育内容の工夫を行うことが必要である。」

これらの記述から、教育におけるスパイラル方式の重要性が読み取れる。

「スパイラル方式による指導」を行っていくに際しては、指導内容を単元単位で追加・修正するだけでなく、それぞれの指導内容について、学習の「接続」を意識して指導方法を改善することにより、内容に関する理解を深め、概念を獲得させていくことが重要であろう。高等学校における幾何教育を対象とした本研究において、「中学との接続」を重視する理由はここにある。

### 2. 研究のねらい

現行の高等学校における幾何教育について、その指導上の問題点を分析し、中学との接続部分を重視するという視点から、高等学校における望ましい幾何教育のあり方を追究することが、本研究のねらいである。

現行の学習指導要領に基づく高校の幾何に関する主な内容として、次のものがあげられる。

- (1) 数学Ⅰ・図形と計量
- (2) 数学A・平面幾何
- (3) 数学Ⅱ・図形と方程式
- (4) 数学B・ベクトル
- (5) 数学Ⅲ・積分の応用
- (6) 数学C・いろいろな曲線

これまでに筆者は、(3)、(4)について研究を進めた(2006a, 2005)。本稿では、(1)図形と計量に焦点をあてるものとする。(1)についてはこれまでの研究成果(2000)もあるが、今回はさらにそれを深めたものである。

なお、以下で対象とする三角比の指導内容は、幾何の内容である「鋭角の三角比」「鈍角の三角比」「正弦定理・余弦定理・面積公式等」とし、「三角関数の性質やグラフ」「加法定理」「三角関数の合成」等の関数の内容は対象外とする。

### 3. 三角比の指導の変遷

戦後の三角比の指導の変遷は表1の通りである。

各期における指導内容の主な特徴は、次の通りである。

I期では、中学で「鋭角の三角比」のみを扱い、高校の解析Ⅰおよび幾何で「鈍角の三角比」を、さらに解析Ⅱおよび幾何で「正弦法則(定理)・余弦法則(定理)等」を扱っている。

中学における指導について、学習指導要領には以下のような記述がある。

「直角三角形では、その一角と一辺とがわかっていると、三角比の表を利用して、他の辺の長さを求めることができる。また、二辺がわかっているならば、その角も求められる。」

また、高校の解析Ⅱでは、用語として次の「正接法則」を扱っている。

$$\frac{b-c}{b+c} = \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B-C}{2}, \quad \frac{c-a}{c+a} = \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C-A}{2}, \quad \frac{a-b}{a+b} = \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A-B}{2}$$

さらには、同じ解析Ⅱで「ヘロンの公式」を用語として扱っており、現行よりもかなり進んだ内容を扱っていたことがわかる。

II期では、高校での扱いが変わり、必修科目の数学Ⅰの中で、鈍角を含めた「一般角の三角比」を扱い、選択科目の数学ⅡBの中で、「正弦定理・余弦定理等」を扱っている。1956年および1960年の学習指導要領では、数学Ⅰで「コタンジェント」を用語として扱っている。一方で「正接法則」については削除された。また、数学ⅡBでは、ベクトルの内容と一緒に扱っているのが特徴である。

III期では、中学での「鋭角の三角比」が高校に移行し、高校の必修科目の数学Ⅰの中で、「鈍角の三角比」「正弦定理・余弦定理等」と一緒に扱い、さらには三角関数の学習内容と合わせて、解析領域として位置づけている点の特徴である。なお、用語「コタンジェント」は、削除された。

IV期では、数学Ⅰの学習内容が、図形領域に「平面図形と式」と並べて位置づけられた。三角関数に関する学習内容は、選択科目の基礎解析に移行した。

V期では、IV期と比べて大きな変化はないが、「ヘロンの公式」は扱わない等の軽減が図られている。

VI期では、VI期と比べて大きな変化はない。

表1 三角比の指導の変遷

指導年度	科目	必・選	タイトル	主な特徴
I 1951(S26)~	中3 解析I 解析II 幾何	必修 選択 選択 選択	計量（鋭角の三角比） 関数の概念を用いること 三角関数を用いること 直線図形の性質を用いること	中学で鋭角の三角比を扱い、高校で鈍角の三角比、および正弦定理・余弦定理等を扱う。
(II) 1956(S31)~	数学I 数学IIB	必修 選択	三角関数 三角関数とベクトル	中学で鋭角の三角比を扱い、数学Iで一般角（鈍角も含めて）の三角比を、数学IIBで正弦定理・余弦定理等を扱う。※
II 1958(S33)~ 1960(S35)~	中3 数学I 数学IIB	必修 必修 選択	計量（鋭角の三角比） 関数とそのグラフ 三角関数とベクトル	
III 1973(S48)~	数学I	必修	解析・三角関数	三角関数の内容と合わせて、すべての内容を扱う。
IV 1982(S57)~	数学I	必修	図形・三角比	三角関数の内容は、基礎解析（選択）に移行する。
V 1992(H4)~	数学I	必修	図形と計量	IVと比べて大きな変化はない。
VI 2003(H15)~	数学I	必修	図形と計量	IV, Vと比べて大きな変化はない。

※(II)期では、数学Iで、鈍角の三角比、および正弦定理・余弦定理等を扱い、数学IIで、関数としての三角関数の内容を扱った。

三角比の指導内容である「鋭角の三角比」「鈍角の三角比」「正弦定理・余弦定理等」を、どの学年で学習するかについて各段期ごとにまとめると、表2の通りである。

表2 三角比の指導内容と指導学年

	鋭角の三角比	鈍角の三角比	正弦定理・余弦定理等
I	中3	解析I, (幾何)	解析II, 幾何
II	中3	数学I (高1)	数学IIB (高2)
III	数学I (高1)		
IV	数学I (高1)		
V	数学I (高1)		
VI	数学I (高1)		

#### 4. 三角比を学ぶ意義

高校生が三角比を学ぶ意義は何であろうか。これについて、筆者は次のように考える(熊倉, 2006b)。

これまで求めることのできなかった三角形の辺の長さや角の大きさ等を求めることができ、そのことを利用して、測量等に活用することができる。

1970年告示の学習指導要領には、三角比に関連するものとして次の記述がある。

「正弦、余弦および正接の意味を理解させ、三角形の辺と角との間の基本的な関係を考察できるようにする。また、三角関数の意味とその周期性を理解させる。」

この記述から、そのねらいが関数の学習にあることが読み取れる。教科書の記述も、三角関数に必要な概念として、三角比を導入している。

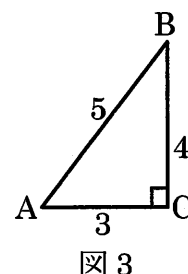
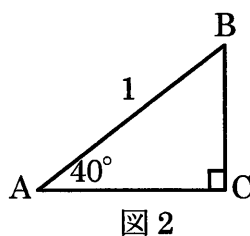
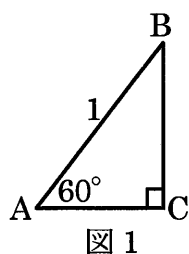
一方、現行の学習指導要領には、三角比に関して次の記述がある。

「直角三角形における三角比の意味、それを鈍角まで拡張する意義及び図形の計量の基本的な性質について理解し、角の大きさなどを用いた計量の考えの有用性を認識するとともに、それらを具体的な事象の考察に活用できるようにする。」

これらの記述から、現在は、三角比の学習のねらいが、「関数」と明確に区別されて「図形の計量」にあることがわかる。

それでは、なぜサイン、コサイン、タンジェントの用語を導入する必要があるのか。

図1のような特別な直角三角形であれば、中学までに学習した内容で、BC、ACの長さを表すことができる。一方、図2のような場合は、サインやコサインを使うことによって、はじめてBC、ACの長さを正確に表現することができる。



また、図3のような3辺の長さがわかっている直角三角形の場合に、三角比の表を利用すれば、3つの角のおよその大きさを求めることができる。

さらに、正弦定理や余弦定理等を利用することによって、直角三角形に限らず任意の三角形について、辺の長さや角の大きさ、面積を求めることができる。また、様々な平面図形や立体図形についても、三角形に分割して考えることにより、図形の計量が可能になる。そして、これらの性質を利用して、現実事象の測量等の場面に応用できる。

以上が、三角比を導入する意義といえよう。

上記の主張は、三角比の誕生の歴史という観点からも説明される。

サイン、コサインをはじめて活用したのは、ヒッパルコス(紀元前190~120)とされている(カツツ, 2005)。ヒッパルコスは、天文学の問題を解決するために、半径を固定した円において、中心角と弦の長さの関係を表にした。

具体的には、円の半径を  $r$ 、中心角を  $2\alpha$  とすると、弦の長さは、 $2r\sin\alpha$  となる。サイン (正弦) という言い方もここに起源がある。すなわち、サインは、辺の長さの比ではなく、半弦の長さを表していたことがわかる。ちなみに、弦ではなく半弦の表を始めて作成したのは、インドの数学者アリアバタ (476~550?) と言われている。インドの弦を表す言葉がアラビア語に訳され、さらにラテン語に訳されたときに、誤って sinus (胸) と訳してしまったために、現在は、英語の sinus (湾曲) から sine と呼ぶようになったとのことである (片野善一郎, 2003)。

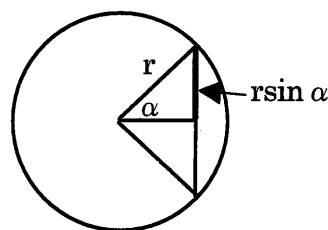


図 4

### 5. 三角比に関する指導内容の分析

三角比の指導内容に関して、次の観点から分析を行った。

- ・現在使用されている教科書
- ・過去に使用されていた教科書
- ・現在、海外で使用されている教科書
- ・これまでの、三角比の指導に関する実践研究

#### (1) 現在の教科書から

教科書は、数学 I の教科書を出している主な会社のうち、内容の程度の一番高いと考えられる 1 冊ずつを選択した。調査・分析した教科書は、次の 7 冊である。

啓林館 (H14検定), 第一学習社 (H14検定), 旺文社 (H14検定), 実教出版 (H14検定), 東京書籍 (H14検定), 数研出版 (H14検定), 桐原出版 (H14検定)

これらの教科書について、「三角比を学ぶ意義」という観点から、指導の流れや、鋭角・鈍角の三角比の導入、正弦定理・余弦定理の意義に関する記述や問題の有無等について、特徴的なことを調べた。その結果は表 3 の通りである。

表 3 三角比の教科書分析

指導の流れ	以下の流れ<全社> ①鋭角の三角比 (タンジェント→サイン・コサイン) ②三角比の相互関係 ③鈍角の三角比 ④正弦定理・余弦定理・面積公式 ⑤測量・図形の計量等への利用 ※1社だけが、①で、サイン→コサイン→タンジェントの流れであった。
鋭角の三角比の導入	三角比を、直角三角形の 2 辺の比で定義<全社> 測量場面で導入 (相似な直角三角形の 2 辺の比は一定である) <6 社>
鈍角の三角比の導入	鈍角の三角比を、半径 $r$ の半円によって定義<6 社> ※1社だけが、半直線によって定義
正弦定理・余弦定理の意義	正弦定理の意義が明確に記述、あるいは意義がわかる問題がある。<4 社> 余弦定理の意義が明確に記述、あるいは意義がわかる問題がある。<全社>

教科書によって、多少のばらつきはあるものの、概ねいずれの教科書も同様の扱いをしていることがわかる。その中で、正弦定理については、その意義が記述されず、また意義がわかるような問題もない教科書が3社あった。正弦定理・余弦定理の意義を、中学で学んだ決定条件と関連付けて記述してある教科書は1社だけで、しかもそれは本文ではなく補充ページ（省略してもよいページ）であった。

その他に特質すべき点として、以下が挙げられる。

① タンジェントやサイン、コサインのおよその値を、次のような図5・6を使って求める例が、1社（第一学習社）だけあった。

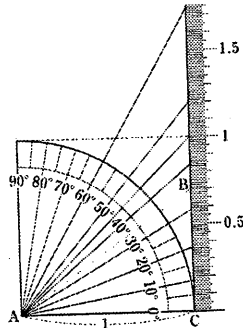


図5

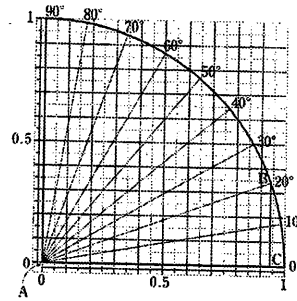


図6

② 正弦定理の証明に関して、多くは、外接円を利用して証明していたが、1社（第一学習社）だけが、面積公式を利用して次のように扱っていた。

$$S = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}bc \sin A \text{ から, } a \sin B = b \sin A \text{ よって, } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \text{ が成り立つ。}$$

同様に考えて、 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$  が成り立つことが示される。

③ 正弦定理に関する補足として、次の表現をしていた教科書が1社（旺文社）だけあった。

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$$

## (2) 過去の教科書から

3. で述べた指導の変遷におけるI～Vの各期のうち、特に指導学年が現行と異なるI期、II期について、使用された教科書をもとに指導内容について分析した。分析した教科書は、表4の通りである。

表4 分析した教科書

段階	分析した教科書
I 1951(S26)～	<p>&lt;中学3年&gt;啓林館(S28 検定), 学校図書(S29 検定), 二葉(S26・32 検定), 三省堂(S28 検定), 東京書籍(S27 検定)</p> <p>&lt;高校・解析I&gt; 好学社(S28 検定), 池田教科書(S29 発行)</p> <p>&lt;高校・解析II&gt; 好学社(S26 検定), 大日本図書(S26 検定)</p> <p>&lt;高校・幾何&gt; 昇龍堂(S27 検定), 三省堂(S29 検定)</p>

II	
1958(S33)～	<中学3年>教育出版(S36 検定), 実教出版(S36 発行), 東京書籍(S36 検定)
1956(S31)～	<高校・数学I>数研出版(S32 発行), 大日本図書(S30 検定)

教科書の分析の観点としては、4.と同様に「三角比を学ぶ意義」という観点から、導入部分や定理の意義等を中心に、本文の記述や扱っている問題の種類等に注目した。調査・分析した結果は次の通りである。

### I 期について

まず、中学3年の教科書について、以下のような特徴を挙げることができる。

ア. 三角比の導入では、いずれも測量の場면을積極的に扱っている。例えば、窓から室内に指す日差しの長さについて調べる活動を扱った問題（二葉）があったのは興味深い（図7）。

イ. 三角比の値を、教科書巻末の表を用いるのではなく、三角形をかいてその辺の長さを測ることにより求める活動が、いずれの教科書にもあった。

ウ. 三角比の表を利用して、例えば、 $\sin 12^\circ 30'$ の値を補間法により求める活動が、いずれの教科書にもあった。

エ. 2社（学校図書、二葉）の教科書では、面積公式も扱っていた。

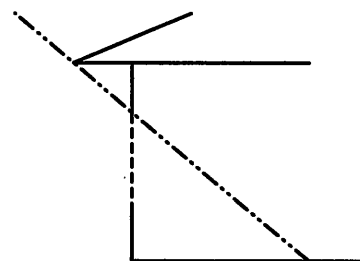


図7

次に、高校の解析I・II、幾何の教科書について、以下のような特徴を挙げることができる。

オ. 鈍角の三角比の定義は、解析Iでは、一般角に拡張した三角比として、半径rの円を用いている。一方、幾何の教科書（昇龍堂）に、補角の三角比により次のように定義しているものがあった。

$$\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha), \quad \cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha), \quad \tan \alpha = -\tan(180^\circ - \alpha)$$

このような定義をする前提として、鈍角三角形の場合にも、鋭角三角形の場合と同じように、面積公式が成り立つようにするためと説明されている。

カ. 解析II、幾何のいずれの教科書でも、「三角形を解く」という場面を通して、正弦定理・余弦定理の意義がわかるような問題を数多く扱っている。

### II 期について

まず、中学3年の教科書について、以下のような特徴を挙げることができる。

ア. 全体的には、I期の中学の教科書と大きな変化はない。しかし、調べたいずれの教科書も、三角形の面積公式を扱っていた。特に、同じ教科書会社で、I期で扱っていなかったがII期で扱っているものもあった。すべての教科書を調べたわけではないので、はっきりしたことは言えないが、三角形の面積公式を扱う教科書が増えたことが推測される。

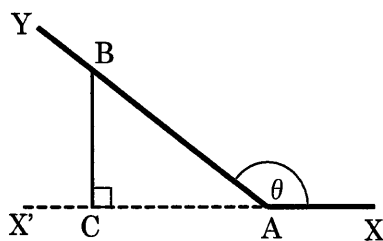
次に、高校の数学Iの教科書について、以下のような特徴を挙げることができる。

イ. 鈍角の三角比の定義については、以下のように、負の長さを用いて行っていたものがあった（大日本図書）。

ACの符号を負とすることにする、

$$\sin \theta = \frac{CB}{AB}, \quad \cos \theta = \frac{AC}{AB},$$

$$\tan \theta = \frac{CB}{AC} \quad (\theta \neq 90^\circ)$$



ウ. 正弦定理・余弦定理の意義に関する内容については、I期の解析II, 幾何の教科書と比べて大きな変化はない。調べた教科書の範囲の中では、「三角形を解く」以外の場面で、測量に関する問題が少し増えている。

### (3) 海外の教科書から

次のA~Cの3冊の教科書について調査・分析した。

A. SMP INTERACT for GCSE MATHEMATICS Higher

B. MATEMATICS A TEXTBOOK FOR CLASS IX・X

C. MATEMATIIKAN TAITO 3 Geometria

Aは、イギリスの一般教育証明書(GCE)のための試験細目に即した教科書である。

Bは、インドの第9・10学年(14・15歳)用の教科書である。

Cは、フィンランドの高校生用の幾何分野の教科書である。

この3冊を取り上げたのは、1989年に国家カリキュラムを作成し、その後の数学教育改革の動向が注目されているイギリス、最近数学教育で注目されるようになったインド、フィンランドで使用されているそれぞれの教科書に着目したからである。

#### A SMP INTERACT for GCSE MATHEMATICS Higher から

大きな流れとして、まず単元「The tangent function」について扱い、その後まったく別の内容を扱った後に、単元「Sine and cosine」を扱っている。

タンジェントの導入では、次のような活動を行っている。

- ① 図8のような底辺が10cm, 1つの内角が $35^\circ$ である直角三角形を実際にかき、対辺の長さを測れ。
- ② ①で、底辺の長さを5cmとしたときの直角三角形を同じようにかいて、対辺の長さを測れ。
- ③ さらに、底辺の長さを、1cm, 2cm, 3cm, …としたときの直角三角形をかき、対辺の長さを測れ。

その後、上の問題の解決として、

$$\text{対辺} = \text{底辺} \times 0.7$$

というルールが使えることを述べ、これを変形して、

$$\frac{\text{対辺}}{\text{底辺}} = 0.7$$

となることから、この値をタンジェントと呼び、 $\tan 35^\circ = 0.7$ と表すことが記述されている。

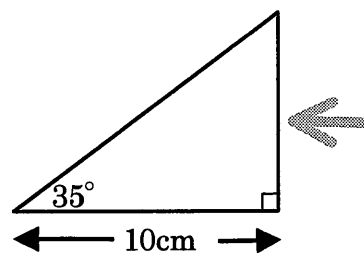


図8



上記のタンジェントの導入の活動は、タンジェントが直角三角形の辺の長さを求めるために利用されることを、生徒に実感させることができるであろう。

一方で、 $\tan 35^\circ = 0.7$ としているので、 $\tan 35^\circ$  の値が無理数であり、それゆえに「tan」という新しい記号を導入するという意義は、実感することが難しいと言える。

サイン、コサインの導入についても、タンジェントとほぼ同様である。

なお、その後の三角比に関する扱いは、「Trigonometric graphs」で、鈍角の三角比を含む一般角の三角比を定義しているが、正弦定理・余弦定理・面積公式等については扱っていない。

#### B MATHEMATICS A TEXTBOOK FOR CLASS IX·X から

まず、9学年用の教科書で、「Trigonometry (三角法)」という単元を設けて、ここで三角比に関する内容を扱っている。この単元の最初に、次のような説明文があるのは、注目に値する。

The word 'trigonometry' is derived from a combination of three Greek words 'tri', 'gon', 'metron', 'Tri' means three, 'gon' means sides and 'metron' means 'a measure'. Thus, trigonometry deals with the measurement of the sides (and angle) of a triangle.

さらには、三角法を知ることによって、天文学や地理学、航海、物理学、工学などに役立つという記述もある。

しかし、内容に入ると、形式的に三角比を直角三角形の2辺の比で定義し、形式的なくつかの例と練習問題があるに過ぎず、測量への利用問題などはここでは見当たらなかった。

次に、10学年用の教科書では、同じように「Trigonometry」および「Height and Distances」という単元で、9学年に引き続く三角比の内容を扱っている。前者の単元では、三角比の相互関係を、後者の単元では、測量等の利用問題を扱っていた。しかし、ここでの利用問題のほとんどは、 $30^\circ$  あるいは $45^\circ$ 、 $60^\circ$  などの特別な角しか扱っていなかった。

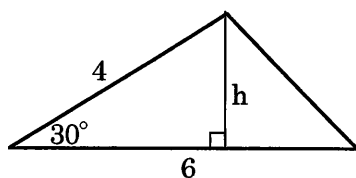
なお、インドでは、10学年の後に上級中等学校2年間(16, 17才)があるが、そこでの三角比に関する内容がどこまで扱われているかは不明である。

#### C MATEMATIHKAN TAITO 3 Geometria から

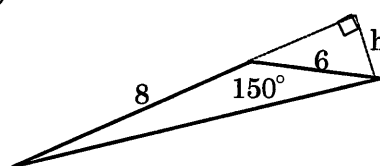
三角比の導入は中学で扱うが、その扱い方については、中学の教科書が手元がないので不明である。高校の教科書では、まず鈍角の三角比を扱っている。ここでの定義の仕方は、単位円を利用する。次に、面積公式を扱っているが、ここでの導入の課題(復習問題)は、次のように三平方の定理で解ける問題であり、有効な導入といえる。

次の三角形の面積を求めよ。

a)



b)



次に正弦定理，余弦定理を扱っている。ここでは，日本の教科書にもあったが，正弦定理の証明を，次のように面積公式を使って証明している。

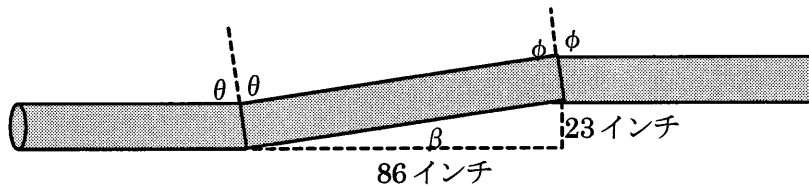
$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C \text{ の両辺を } abc \text{ で割ると，}$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \text{ これを変形して， } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

また，正弦定理や余弦定理の利用問題のほとんどが， $30^\circ$ ， $45^\circ$ ， $60^\circ$  等以外の特別でない角の三角形であった点も特徴として挙げられる。

なお，教科書ではないが，アメリカの全米数学教師協議会（NCTM）が公表した「学校数学におけるカリキュラムと評価のスタンダード」についても調査した（筑波大学数学教育学研究室，2001）。これによると，第9学年から12学年のためのスタンダードの幾何に関する記述で，期待することとして「長さや角の大きさを決めるために三角法を使う。」とある。さらに，「直角三角形の三角法は，ある範囲の実践的な問題を解くのに有用である。」として，次のような問題を紹介している。

ある建設工が，2本の木の根のつながりを避けるために地下の管のルートをつけなおす必要がある。彼女は管の通路を83インチの距離で23インチ上げ，次いで元の管に平行に続ける必要がある。これを完成するために，彼女はどんな角で切るべきか？



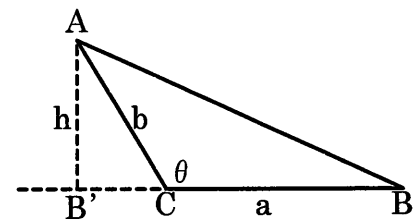
三角比の有用性を実感させる1つの教材として，参考になる課題である。

#### (4) 三角比の指導に関する実践研究から

日本数学教育学会学会誌，および数学教育論文発表会論文集等から，三角比の指導に関する実践研究を調査・分析した。

磯脇（1981）は，鈍角の三角比の定義を，三角形の面積公式を統一する，という視点から指導する実践を行った。サインだけではなく，コサインについても，図9のように2つの三角形に分けて考え，鋭角三角形でも鈍角三角形でも，面積を表す式が同じになるように定義した。サインの定義については，生徒にとって，鈍角に拡張する意味がよくわかったものと考えられる。一方で，コサインの定義については，必ずしも拡張の意味が容易に理解できたかどうかは疑問が残る。

小西（1985）は，農業科の生徒に対して，三角比に対する興味・関心を高めるための指導として，三角比にまつわる歴史のエピソードを紹介したり，実際に正四角錐を作らせて，



$$S = \frac{1}{2}BB'h - \frac{1}{2}CB'h \text{ (鈍角)}$$

$$= \frac{1}{2}BB'h + \frac{1}{2}bc \cos \theta \cdot h \text{ (鋭角)}$$

図9

太陽の影を利用して、正四角錐の高さを測定させる活動を行った。特に、三角比が誕生した歴史上のエピソードは、三角比を学ぶ意義に直結するものであり、有効であったと考えられる。

高木（1989）は、正弦定理や余弦定理の応用として、これらの学習が一通り終わった段階で、パソコンを利用して、測量場面をシミュレーションする活動を行った。測量等の活動は、正弦定理、余弦定理を学ぶ意義を実感させる上で、有効であったと考えられる。しかも、パソコンを利用することにより、生徒は容易にいくつかの課題に取り組むことができたと言える。

長岡（2003）は、三角比を苦手とする生徒の多い要因のひとつとして、指導する内容の順序に問題があると考え、鋭角の三角比→鋭角三角形における面積公式・正弦定理・余弦定理→ $90^\circ$ の三角比→鈍角の三角比→…の順で指導実践を行った。三角比を学ぶ意義を実感させる意味で、この指導順序は有効である。基本的に筆者も賛成であり、同様の実践も行っている（2000）。

吉岡（2004）は、正弦定理を導くために、生徒に三角形の外接円の半径の求め方を考えさせる活動を行っている。定理を、生徒自らが発見し導く活動として評価できる。

平岡他（2005）は、昭和18年発行の中等学校「数学（第二類）」を参考にして、「三角形を解く」という視点から、正弦定理・余弦定理・面積公式等を導くような授業構成を提案している。「三角形を解く」という視点は、三角比を学ぶ意義を実感させる意味からも、有効であると考えられる。

また筆者（2000）は、車の回転半径などの具体的な事象を取り上げて、三角比を学ぶ意義を実感させる指導を積み重ねてきた。

## 6. 三角比の指導上の問題点

5. での調査・分析した結果から、現行の三角比の指導上の問題点として、次の4点を挙げるができる。

### (1) サイン、コサイン、タンジェントの導入の意義が明確に記述されていない。

7社中6社の教科書が、タンジェントから導入しているが、そのうちの多くが導入として測量の場面を取り上げている。しかし、これは、相似な三角形の辺の比が一定であることを確認することが主なねらいであり、タンジェントを導入する意義には必ずしも直接つながっていない。少なくとも‘tan’という新しい記号を用いる必要性は直接的には感じとれないであろう。

イギリスの教科書のように、例えば図10の場合でBCのおよその長さを問うことは有効である。またインドの教科書のように、導入の説明文で、三角比の有用性について説明することもまた有効といえよう。しかし、これらでさえも、記号の導入の必要性には直接触れていない。図10の場合であれば、BCの正確な長さを問うことで、はじめて記号導入の必要性が意識される。このような活動を扱っている教科書は、残念ながら見当たらなかった。

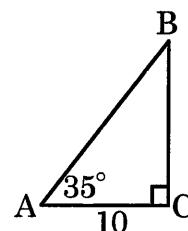


図 10

### (2) 鈍角の三角比の導入の意義が明確に記述されていない。

鈍角の三角比の導入部分については、いずれの教科書も、「三角比を鈍角まで拡張してみよう」といった記述のみで、座標を用いて導入している。しかも、1社（第一学習社）を除いて、半円を用いている。1社は、円を座標平面上で扱うのは数学Ⅱであるという配慮から、半円ではなく半直線を用いている（図11）が、本質的には変わらない。この座標を用いた定義は、三角関数において、定義域を一般角に拡張して定義することにつながるという点で意味はある。

しかし、三角関数が未習であるこの段階の生徒にとって、このように定義する必然性は理解できないであろう。まして、数学Ⅱ・三角関数を選択しない生徒にとっては、ほとんど意味を成さないといえる。それでは、この段階で、三角比を鈍角まで拡張する意味は何か。それは、正弦・余弦定理、面積公式を鈍角三角形でも成立させるため、と考えてよいであろう。しかし、現行の教科書の記述や指導順序から、それを読み取ることは困難である。

(3) 正弦定理や余弦定理の導入の指導において、定理の意義が記述されていない。

たとえば余弦定理について、多くの教科書は、いきなり「 $\triangle ABC$ について、次の余弦定理が成り立つ」として、その定理と証明の記述があり、次に定理の利用例とその練習問題がある。その後、正弦・余弦定理の応用として「三角形を解く」場面で、ようやく定理の意義が見えてくることとなる。しかしこれでは、定理を覚え、その適用問題に習熟することに精一杯で、少なくとも導入の段階では、定理の意義を実感することは難しいといえる。

また、余弦定理は、中学での学習内容である「三平方の定理」の拡張であるが、このことに触れている教科書は、7社中2社（実教出版、桐原書店）だけであった。

さらには、余弦定理の式として、1社（旺文社）を除いて、次のように3つの式が併記してある。

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

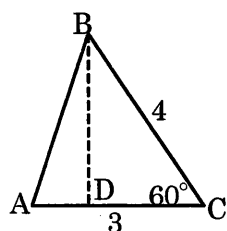
しかし、定理の意味を考えず、形式的に  $a, b, c, A, B, C$  に数値を当てはめようとしている生徒の姿を見かけることも少なくない。「2辺とその挟む角から、残りの一辺の長さを求める式」という本質をとらえるには、1つの式だけでも十分であると考ええる。

(4) 正弦・余弦定理、面積公式の利用問題は、 $30^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $60^\circ$  等の特別な角を利用するものばかりである。

正弦・余弦定理を利用し、一般の三角形のいろいろな辺の長さや角の大きさを求める活動を通して、定理の意義が実感できる。しかし、ほとんどの問題は、 $30^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $60^\circ$  等の特別な角を利用するものばかりで、フィンランドの教科書のような特別でない角の三角比を扱った問題はほとんど見当たらなかった。

特別な角の場合は、中学の範囲で解決できる。例えば、次の問題は、補助線を引いて三平方の定理を利用することで解決できる。

ABの長さは？



垂線 BD をひくと、 $BD = 2\sqrt{3}$ 、 $CD = 2$ 、 $AD = 1$

$\triangle ADB$  に三平方の定理を適用して、

$$AB^2 = (2\sqrt{3})^2 + 1^2 = 13,$$

よって  $AB = \sqrt{13}$  ▲

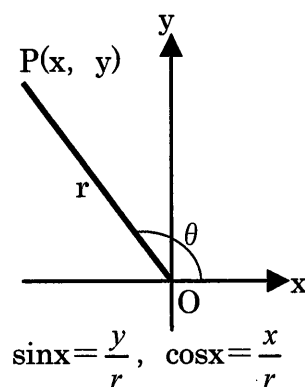


図 11

したがって、上のような問題では、本質的には、三角比を利用して正弦・余弦定理を用いる意義は実感できないといえるであろう。

### 7. 三角比の指導の改善点

これまで述べてきたことから、三角比の指導の改善点について、次の4点を挙げることができる。

(1) 三角比を導入する意義が実感できるように、サイン、コサイン、タンジェントを長さで定義する。

4.で述べたように、サイン、コサイン、タンジェントを導入する意義は、これまで正確に表現することのできなかった長さを表現するためである。

そこで、サイン、コサイン、タンジェントを長さで定義することが有効であると考え。このとき、まずは図12, 13のような三角形を提示して、それぞれ、ACとBCの長さを問う。図12の場合は中学までの学習内容で答えられる問題であり、図13の場合は答えられない問題である。そして、図13におけるAC, BCの長さが無理数であり、正確に表現できないことから、新たな記号を導入して、

$$AC = \sin 40^\circ, \quad BC = \cos 40^\circ$$

と表すことを指導するとよいであろう。

その上で、角 $40^\circ$ を一般化してタンジェントも含めて、次の図14, 15のように定義すればよい。

この定義により、斜辺が1でない直角三角形の場合にも、長さを正確に表現することができる。例えば、斜辺の長さを $k$ とすると(図16)、 $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ で相似比が $k$ であるから、

$$DE = k \sin \theta, \quad AE = k \cos \theta$$

と表されることがわかる。

これらの結果を通して、任意の直角三角形において、辺の長さを三角比で正確に表すことができることを強調することが重要である。

なお、上記のように長さで定義する場合、「三角比」という用語は必ずしも適切とはいえず、無理に使わなくてよいであろう。

(2) 正弦定理・余弦定理を学ぶ意義が実感できるような導入課題を提示する。

いくつかの辺の長さや角の大きさがわかっている三角形で、残りの辺の長さや角の大きさを求めるのに正弦定理・余弦定理が有用である、ということがわかるような導入が望ましい。

たとえば、余弦定理であれば、中学との接続を意識して、次のような導入課題が考えられる。

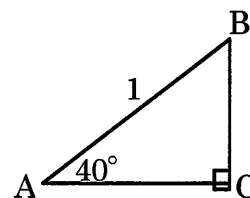
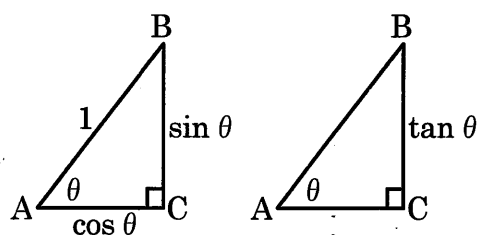


図 13



$$\sin \theta = BC$$

$$\cos \theta = AC$$

図 14

$$\tan \theta = BC$$

図 15

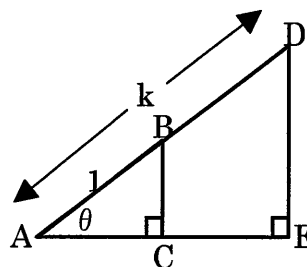


図 16

＜課題Ⅰ＞ 次の三角形の AB の長さ  $x$  を求めよ。

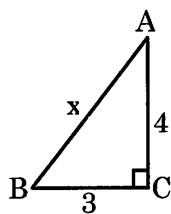


図 17

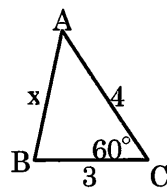


図 18

図17では中学で学習した三平方の定理で簡単に求められるが、図18では簡単に求められない。しかし、前述したように補助線をどこかに引くことで、中学の範囲で求めることができる。図18の課題解決の後に、 $\angle C$ の大きさを $50^\circ$ とか $40^\circ$ に変えたらどうなるかを問う。すると、同じような補助線を引きながら、必然的にサイン、コサインを利用する必要が生じる。一般に、 $\angle C = \theta$ として同じような課題を考えると、余弦定理が導かれる。

正弦定理の導入においても、次のような類似の導入課題が考えられよう。

＜課題Ⅱ＞ 次の三角形の AC の長さ  $x$  を求めよ。

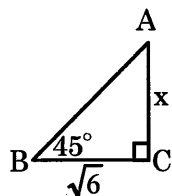


図 19

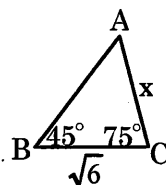


図 20

余弦定理の場合と同様に、中学で学習した内容との関連を図りながら、指導していくことが有効である。このとき、図20の求め方をもとにすれば、正弦定理の証明は、頂点Cから垂線を引き、垂線を2通りの表し方で表すことで示される。

なお、正弦定理については、旺文社の教科書にあるように、 $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$ の形を示すことは、定理の美しさを印象付ける意味から効果的であろう。

(3) 鈍角への三角比の拡張は、鋭角三角形の正弦定理・余弦定理等の指導後に行い、補角の三角比により定義する。

6.で述べたように、現行の教科書の鈍角の定義は、その必要性を感じられない。そこで、指導順序を変更し、長岡・熊倉の主張するように、鋭角の三角比→鋭角の三角比の相互関係→鋭角三角形の正弦定理・余弦定理・面積公式→鈍角の三角比→鈍角の三角比の相互関係→鈍角三角形の正弦定理・余弦定理・面積公式→測量等への三角比の利用の順に指導することが望ましいと考える。

また、鈍角の三角比は、過去の幾何の教科書のように、「鈍角三角形でも、正弦定理・余弦定理・面積公式が同じように成立する」ように定義するとよい。例えば、鈍角のサインは、面積公式から次のように定義する(図21)。

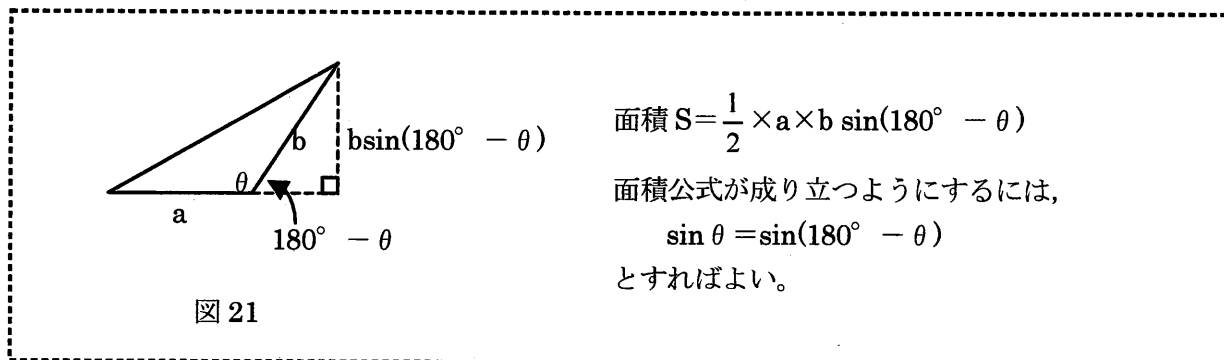


図 21

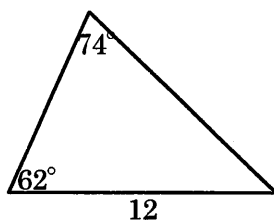
同様にして、鈍角のコサインは、余弦定理から定義できる。まとめると、鈍角の三角比は、次のように補角の三角比で定義される。

$$\sin \theta = \sin(180^\circ - \theta), \cos \theta = -\cos(180^\circ - \theta), \tan \theta = -\tan(180^\circ - \theta)$$

(4) 正弦定理・余弦定理・面積公式に関する応用問題は、30°、45°、60°等の特別な角ではない三角比を用いて、必要に応じてテクノロジーを活用する。

6. で指摘したように、30°、45°、60°等の特別な角の三角比の場合は、中学の範囲で解決できてしまうため、三角比を利用する意義が必ずしも実感できない。そこで、特別でない角の三角比を用いる問題も提示するとよいであろう。例えば、フィンランドの教科書にある次のような問題である。

<課題Ⅲ> 次の三角形の面積を求めよ。



このとき、計算が面倒であれば必要に応じて電卓等を活用することも有効であろう。

## 8. 今後の課題

今後の課題として、次の点が挙げられる。

(1) 本稿で述べた三角比の指導の改善点に基づいた授業実践を、筆者は前任校で実践し、一定の評価を得ている。今後も、できればさらに他の学校で授業を実践し、その妥当性や指導の効果を評価したい。

(2) 本稿では、三角比の指導に焦点を当てたが、高等学校の幾何教育の内容として、他にも数学A・平面図形、数学C・2次曲線などがある。これらについても、指導上の問題点と改善点を明らかにし、高校における幾何教育の改善を図りたい。

## 参考・引用文献

- G. P. Dikshit 他. 2005. MATHEMATICS Textbook for Class X. Saraswati Printing Press  
 Gary L. Musser 他. 2003. Mathematics For Elementary Teachers. John Wiley & Sons, Inc  
 The School Mathematics Project. Interact for GCSE Mathematic Higher. 2003. CAMBRIDGE.

## UNIVERSITY PRESS

平岡賢治他. 2005. 数学的活動の視点からの「三角比, 三角関数」の授業構成への提案. 第38回数学教育論文発表会論文集.

磯脇一男. 1981. 三角比の鈍角への拡張の指導. 日本数学教育学会誌第63巻第11号.

片野善一郎. 2003. 数学用語と記号ものがたり. 裳華房

小西洋子. 1985. 農業科における三角比の指導について. 日本数学教育学会誌第67巻第5号

熊倉啓之. 2000. 学ぶ意義を実感させる数学の指導に関する研究—三角比の指導を通して—. 日本数学教育学会誌第82巻第11号.

熊倉啓之. 2005. 中学との接続を重視した高等学校の幾何教育に関する研究—ベクトルの指導に焦点を当てて—. 静岡大学教育学部研究報告第36号.

熊倉啓之. 2006a. 中学との接続を重視した高等学校の幾何教育に関する研究(第2次)—図形と方程式の指導に焦点を当てて—. 静岡大学教育学部研究報告第37号.

熊倉啓之. 2006b. 学ぶ意義を実感させる三角比の指導に関する研究. 第39回数学教育論文発表会論文集.

Markku Halmetoja 他. 2005. Matematiikan Taito 3 Geometria. WSOY

文部科学省. 1999. 高等学校学習指導要領解説—数学編—. 実教出版.

日本数学教育学会教育課程委員会. 2006. 新しい時代の算数・数学教育を目指して. 日本数学教育学会

高木綱一. 1989. パソコンを利用した正弦定理・余弦定理の指導. 日本数学教育学会誌第71巻第1号

筑波大学数学教育学研究室. 2001. 新世紀をひらく学校数学—学校数学のための原則とスタンダード. 前田印刷.

中央教育審議会初等中等教育分科会教育課程部会. 2006. 審議経過報告.

[www.mext.go.jp/b\\_menu/shingi/chukyo/chukyo3/siryu/004/06021401/002\\_1.pdf](http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo3/siryu/004/06021401/002_1.pdf)

ヴィクターJ・カッツ. 2005. 数学の歴史. 共立出版

吉岡淳. 2004. 「授業研究に学ぶ高校新数学科の在り方」(長崎栄三他編著) 数学の学習指導に生きる授業研究. 明治図書.

平成14年検定済高等学校教科書「数学Ⅰ」. 東京書籍001, 実教出版004, 啓林館007, 数研出版010, 旺文社016, 第一学習社017, 桐原書店020

過去の学習指導要領: 昭和26年告示数学科編(試案)改訂版, 昭和31年告示高等学校数学科編改訂版, 昭和33年告示中学校, 昭和35年告示高等学校, 昭和44年告示中学校, 昭和45年告示高等学校, 昭和52年告示中学校, 昭和53年告示高等学校, 平成元年告示中学校・高等学校, 平成10年告示中学校・高等学校

過去の中学校数学検定教科書: 昭和26年検定済「中学数学3下」. 二葉, 昭和27年検定済「新しい数学3下」. 東京書籍, 昭和28年検定済「中学生の数学Ⅲ」. 啓林館, 昭和28年検定済「新中等数学3下」. 三省堂, 昭和29年検定済「中学校数学3」. 学校図書, 昭和32年検定済「中学数学3幾何編」. 二葉, 昭和36年検定済「中学数学3」. 教育出版, 昭和36年検定済「中学数学3」. 実教出版, 昭和36年検定済「新しい数学3」. 東京書籍

過去の高等学校数学検定教科書: 昭和26年検定済「解析Ⅱ」. 大日本図書, 昭和26年検定済「解析Ⅱ」. 好学社, 昭和27年検定済「幾何」. 昇龍堂, 昭和28年検定済「解析Ⅰ」. 好学社, 昭和29年検定済「解析Ⅰ」. 池田教科書, 昭和29年検定済「解析Ⅱ」. 三省堂, 昭和30年検定済「数学Ⅰ・幾何編」. 大日本図書, 昭和32年検定済「数学Ⅰ・幾何編」. 数研出版