

509 面外せん断を考慮した逆対称アングルプライ積層圧電熱複合平板の動的解析

Dynamic Analysis of an Anti-symmetric Angle-ply Piezothermoelastic Plate Considering the Effect of Transverse Shear

○学 安達 亮太 (静岡大)
正 野田 直剛 (静岡大)

正 石原 正行 (静岡大)

Ryota ADACHI, Shizuoka University, 3-5-1, Johoku, Hamamatu, Shizuoka
Masayuki ISHIHARA, Shizuoka University
Naotake NODA, Shizuoka University

In this paper, we analyze the dynamics of piezothermoelastic laminate considering the effect of transverse shear. The analytical model is a rectangular laminate composed of fiber-reinforced laminates and piezoelectric layers. The model is assumed to be anti-symmetric angle-ply laminate with all edges simply supported. The behavior of the laminate is analyzed based on the first-order shear deformation theory. Closed solution of the deflection due to loads varying arbitrarily with time are obtained.

Key Words: Anti-symmetric Angle-ply, Transverse Shear, Piezothermoelasticity, Dynamic Analysis

1. 緒言

近年、宇宙構造物に用いられる材料として複合材料が注目を集めている。複合材料はアクチュエータやセンサを構造に埋め込むことが容易であり、振動制御の研究が活発に行われている。そこで複合材料の構造物の動的な挙動を調べる事は重要である。本研究では、動的負荷を受ける逆対称アングルプライ積層圧電熱複合平板の挙動について調査する。非定常動的負荷のもとで、面外せん断を考慮した積層平板の動的挙動について解析を行い、たわみの理論解を求めた。また数値計算を行い配向角の影響について調べた。

2. 理論

圧電熱複合平板の変形挙動を調べるために、四角形平板について考える。図1に示すような逆対称アングルプライ積層板を考える。積層平板は N 層からなり (N は偶数)、 $z=0$ に関して対称な k, k' 層だけが圧電材料であるとする。配向角は、図2のように $z=0$ に関して対称な i, i' 層で逆対称である。積層板の大きさ $a \times b$ 、厚さ h で四辺単純支持されているとする。また、負荷として初期条件を考慮した動的な外力、熱、電場を与える。

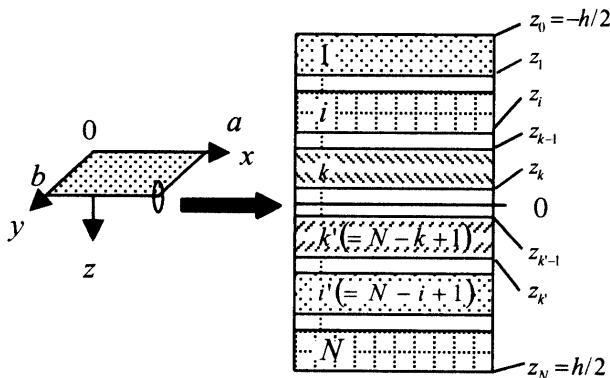


Fig.1 Geometry of the laminated plate

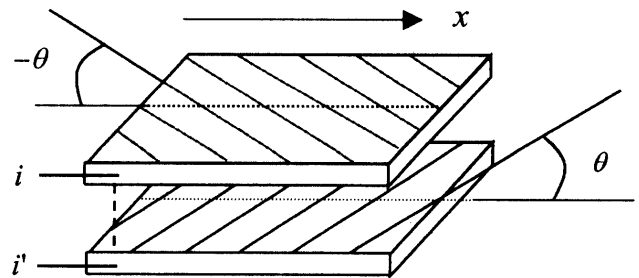


Fig.2 Anti-symmetric angle-ply laminate

解析は1次せん断理論に基づいた平板の曲げ問題として行う。合力 N_{ij} 、合モーメント M_{ij} は圧電熱弾性材料の構成式より、中立面変位 u^0, v^0, w^0 および回転 ψ_x, ψ_y を用いて次のように表される。

$$\begin{cases} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & B_{16} \\ 0 & 0 & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \\ - \begin{Bmatrix} N_x^E \\ N_y^E \\ N_{xy}^E \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & B_{16} \\ 0 & 0 & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \\ - \begin{Bmatrix} M_x^E \\ M_y^E \\ M_{xy}^E \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} M_x^T \\ M_y^T \\ M_{xy}^T \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{44} & S_{45} \\ S_{45} & S_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} Q_y^E \\ Q_x^E \end{Bmatrix} \end{cases} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx}^0 &= u_{,x}^0, \quad \varepsilon_{yy}^0 = v_{,y}^0, \quad \gamma_{xy}^0 = u_{,y}^0 + v_{,x}^0 \\ \kappa_x &= \psi_{,xx}, \quad \kappa_y = \psi_{,yy}, \quad \kappa_{xy} = \psi_{,xy} + \psi_{,yx} \\ S_{ij} &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} k_\alpha k_\beta (\bar{Q}_{ij}) dz \quad (\alpha = 6-i, \beta = 6-j; i, j = 4, 5) \end{aligned} \right\} (2)$$

ここで、 A_{ij} , B_{ij} , D_{ij} は弾性体の伸び、結合、曲げ剛性を表し、 N_{ij}^T , M_{ij}^T は温度分布による合力、合モーメント、 N_{ij}^E , M_{ij}^E は電場による合力、合モーメントを表わす。 k_α , k_β は修正係数。

平板の運動方程式は以下のようになる。

$$\left. \begin{aligned} N_{,xx} + N_{,yy} &= 0, \quad N_{,xy,x} + N_{,y,y} = 0 \\ Q_{,xx} + Q_{,yy} + q &= P w_{,tt}^0 \\ M_{,xx} + M_{,yy} - Q_x &= 0, \quad M_{,xy,x} + M_{,y,y} - Q_y = 0 \end{aligned} \right\} (3)$$

P は平板の慣性を表わし、 q は z 軸方向の力学的負荷とする。

四辺単純支持条件を満たすように次のように中立面変位、回転を仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \{u^0, \psi_x\} &= \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \{u_{mn}(t), \psi_{xmn}(t)\} \sin \alpha_m x \cos \beta_n y \\ \alpha_m &= \frac{m\pi}{a} \\ \{v^0, \psi_y\} &= \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \{v_{mn}(t), \psi_{ymn}(t)\} \cos \alpha_m x \sin \beta_n y \\ \beta_n &= \frac{n\pi}{b} \\ w^0 &= \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N w_{mn}(t) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \end{aligned} \right\} (4)$$

熱負荷、電気的負荷は積層板が十分に薄いものとして、板厚方向に線形分布するものとする。また面内は一様分布とし、力学的負荷 q とともにそれを 2 重 Fourier 級数展開する。

$$\begin{aligned} & (N_x^T, M_x^T, M_y^T, N_x^E, M_x^E, M_y^E, q) \\ &= \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N (H_{mn}(t) I_{mn}(t) J_{mn}(t) N_{mn}(t) O_{mn}(t) P_{mn}(t) q_{mn}(t)) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \\ & (N_x^T, N_y^T, M_x^E, N_x^E, N_y^E, M_y^E) \\ &= \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N (F_{mn}(t) G_{mn}(t) K_{mn}(t) L_{mn}(t) M_{mn}(t) Q_{mn}(t)) \cos \alpha_m x \cos \beta_n y \end{aligned} \quad (5)$$

式 (3) に式 (1), (2), (4), (5) を代入すると、次のような運動方程式が得られる。

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}_{mn}(t) + \mathbf{K}_{mn} \mathbf{x}_{mn}(t) = \mathbf{p}_{mn}(t) \quad (6)$$

ただし、

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & hP & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{mn}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{h} u_{mn}(t) \\ \frac{1}{h} v_{mn}(t) \\ \frac{1}{h} w_{mn}(t) \\ \psi_{xmn}(t) \\ \psi_{ymn}(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{mn} = \begin{bmatrix} ha_{1,mn} & ha_{2,mn} & 0 & b_{1,mn} & b_{2,mn} \\ ha_{1,2,mn} & ha_{2,2,mn} & 0 & b_{1,2,mn} & b_{2,2,mn} \\ 0 & 0 & h(S_{55}\alpha_m^2 + S_{44}\beta_n^2) & S_{55}\alpha_m & S_{44}\beta_n \\ b_{1,mn} & b_{2,mn} & S_{55}\alpha_m & \frac{1}{h} d_{11,mn} & \frac{1}{h} d_{12,mn} \\ b_{2,mn} & b_{2,2,mn} & S_{44}\beta_n & \frac{1}{h} d_{12,mn} & \frac{1}{h} d_{22,mn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_{mn}(t) = \begin{bmatrix} \alpha_m \{E_{mn}(t) + K_{mn}(t)\} - \beta_n \{G_{mn}(t) + M_{mn}(t)\} \\ \beta_n \{F_{mn}(t) + L_{mn}(t)\} - \alpha_m \{G_{mn}(t) + M_{mn}(t)\} \\ 0 \\ -\frac{1}{h} [\alpha_m \{H_{mn}(t) + N_{mn}(t)\} + \beta_n \{J_{mn}(t) + P_{mn}(t)\}] \\ -\frac{1}{h} [\beta_n \{I_{mn}(t) + O_{mn}(t)\} + \alpha_m \{K_{mn}(t) + M_{mn}(t)\}] \end{bmatrix} + q_{mn}(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

ここで \mathbf{K}_{mn} の各成分は平板の剛性より定まる定数である。

負荷に関して、時間に関する入力関数 $f(t)$ を定義し、

$$\mathbf{p}_{mn}(t) = f(t) \cdot \mathbf{p}_{mn}^0 \text{ と表す。}$$

非定常応答の初期条件を $\mathbf{x}_{mn}(0) = 0$, $\dot{\mathbf{x}}_{mn}(0) = 0$ とし、運動方程式 (6) を、Laplace 変換、逆 Laplace 変換を用いて解くことにより、解 $\mathbf{x}_{mn}(t)$ を得る。その一例として、 $w_{mn}(t)$ を次に示す。

$$\frac{w_{mn}(t)}{h} = \left[\int_0^t f(t-\tau) \mathbf{g}_{0,mn}(\tau) d\tau \right] \mathbf{p}_{mn}^0 \quad (8)$$

すなわち外力の時間関数のみによる成分と、系の特性のみによる成分とのたたみこみ積分の形で表わされる。ここで、 $\mathbf{g}_{0,mn}(\tau)$ は系の重み関数であり、

$$\mathbf{g}_{0,mn}(\tau) = \frac{1}{P \Delta_{r,mn} \omega_{mn}} \sin(\omega_{mn} \tau) \cdot [D_{mn,13}, D_{mn,23}, D_{mn,33}, D_{mn,34}, D_{mn,35}] \quad (9)$$

で定義される。ただし、 $\Delta_{r,mn}$ は \mathbf{K}_{mn} から第 3 行、第 3 列を取り除いてできる 4 次の正方形行列の行列式であり、固有振動数 ω_{mn}^2 は $\det(\omega_{mn}^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}_{mn}) = 0$ の方程式の解である。また、 $D_{mn,ij}$ は \mathbf{K}_{mn} の ij 余因子である。

3. 数値計算結果

ここでは $N = 10$, $k = 1$, $k' = 10$, すなわち圧電材 BaTiO₃ 2 層と Graphite/epoxy 8 層からなる $[p/-\theta/\theta/-\theta/\theta]_{anti-symmetric}$ なる圧電熱複合平板を考える。積層板の大きさを $a = b$ とし、圧電層の厚さは Graphite/epoxy 層の厚さの 2 倍とする。 $f(t) = H$ とし q_{11} に対する応答の時間平均の配向角による影響を示す。

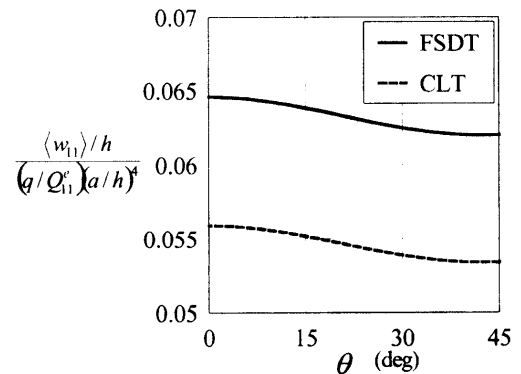


Fig.3 Mean deflection due to mechanical load for $a/h = 10$ ($q \neq 0, T_0 = 0, V = 0$)

4. 結言

積層板の板厚が相対的に大きい時はせん断変形を考慮しない場合と比べて、挙動に影響が出ることが分かった。力学的負荷を加えた時のステップ応答は配向角が 45 度付近でたわみが小さくなることが分かった。