

加熱された剛体円環がはめ込まれた
横等方性無限円柱の非定常熱応力*芦田 文博*¹, 野田 直剛*²Transient Thermal Stresses in a Transversely Isotropic Infinite
Circular Cylinder Inserted into a Rigid Heated Circular Ring

Fumihiko ASHIDA and Naotake NODA

The present paper is concerned with transient thermal stresses in a transversely isotropic infinite circular cylinder inserted into a short rigid heated circular ring. This subject is a mixed boundary value problem, and may be formulated in terms of a dual-integral equation which is reduced to a simultaneous algebraic equation applying the Neumann series. The radial, hoop and axial stresses have singularities at the end of the contacted short circular ring on the cylindrical surface. The factors are defined to evaluate the singularities of the stresses, and the relations among these factors can be derived. Numerical calculations of thermal stresses were carried out for a graphite which possesses transverse isotropy, and compared with those derived under isotropic conditions.

Key Words: Elasticity, Thermal Stress, Transverse Isotropy, Transient State, Contact Problem

1. 緒 言

温度変化によって拘束を受ける構造部材の接触問題は圧延ロールや軸受など、数多く見受けられる。これらの部材は拘束端近傍において応力集中を受けて損傷することがあり、安全性の観点から重要な問題となっている。そこで、著者らは等方性体の非定常接触熱応力問題として、剛体円環になめらかにはめ込まれた無限円柱⁽¹⁾と有限円柱⁽²⁾、および剛体円環に固着された無限円柱⁽³⁾の解析を行っている。一方、近年の技術革新によって異方性工業材料が数多く実用化されている。そのため、異方性体の接触熱応力問題の解析が行われているが、平面接触の定常熱応力問題⁽⁴⁾⁻⁽⁷⁾に限定されている。

そこで、本報は曲面接触の非定常熱応力問題の研究の一環として、異方性体の一種である横等方性体を対象に、加熱された剛体円環になめらかにはめ込まれた横等方性無限円柱の軸対称非定常熱応力問題を解析した。応力解析には横等方性体に関するポテンシャル関数法を適用した。本題は力学的境界条件より得られる

連立積分方程式を解かなければならないが、ノイマン級数を用いることによって無限連立一次方程式を解く問題に帰着させ、解を求めた。半径応力、円周応力および軸応力は接触端で特異性を示すので、その特異性を評価する係数を導入し、そしてこれらの係数間の関係を示した。最後に横等方性体として黒鉛を例に、応力とその係数の数値計算を実行し、等方性体のそれらと比較して横等方性の影響について調査した。

2. 解 析

2.1 温度場の解析 図1に示すように、半径 a の横等方性無限円柱に幅 $2b$ の加熱された剛体円環がはめ込まれ、円柱の表面から熱放散のある問題を考える。この場合の熱伝導方程式は次式となる。

$$\Delta_1 T + \lambda^2 T_{,zz} = x_r^{-1} T_{,t} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $\Delta_1 = \partial^2/\partial r^2 + r^{-1}\partial/\partial r$ 、 $\lambda^2 = \lambda_z/\lambda_r$ で λ_z と λ_r は軸方向と半径方向の熱伝導率、 T は温度、 t は時間、 x_r は温度伝導率、 $T_{,x} \equiv \partial T/\partial x$ である。

初期条件と境界条件は

$$t=0 \quad \text{で} \quad T=0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$r=a \quad \text{で} \quad T_{,r} + h_r T = Q_0 q(z)/\lambda_r \quad \dots\dots\dots (3)$$

と表される。ここで、 h_r は円柱表面の相対熱伝達率、 Q_0 は単位時間・単位面積当たりの一定な発熱量であ

* 昭和62年7月14日 東海支部三重地方講演会において講演、原稿受付 昭和61年12月25日。

*¹ 正員、津山工業高等専門学校 (〒708 津山市沼624-1)。

*² 正員、静岡大学工学部 (〒432 浜松市城北3-5-1)。

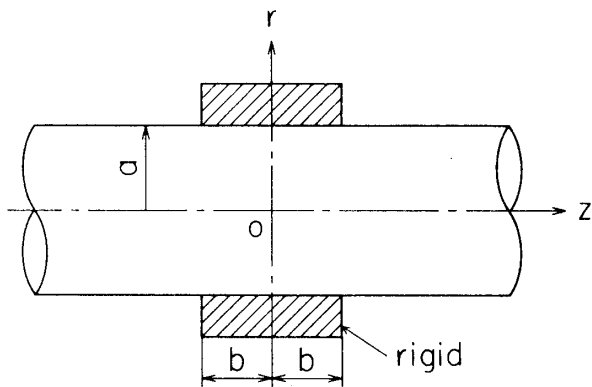


図 1 加熱された剛体円環がはめ込まれた横等方性無限円柱

る。ただし、 $q(z) = q(-z)$ とする。

式(2)と(3)を満足する式(1)の解は、Laplace 変換を適用すると容易に求めることができ、

$$T = \int_0^\infty \left[T_0 \frac{I_0(p\lambda r)}{I_0(p\lambda a)} - \sum_{m=1}^\infty T_m J_0(\beta_m \lambda r) \right] \times \cos(pz) dp \quad \dots\dots\dots (4)$$

によって表される。ここで、 $J_n(r)$ と $I_n(r)$ はそれぞれ n 次のベッセル関数と変形ベッセル関数であり、

$$\left. \begin{aligned} T_0 &= \frac{Q_0 \bar{q}(p)}{\lambda r \{h_r + p\lambda J_1(p\lambda a)/I_0(p\lambda a)\}} \\ T_m &= \frac{2Q_0 \bar{q}(p) \beta_m^2 \exp\{-\alpha r \lambda^2 (p^2 + \beta_m^2)t\}}{a \lambda r (p^2 + \beta_m^2) (\beta_m^2 \lambda^2 + h_r^2) J_0(\beta_m \lambda a)} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

また、 β_m は次式を満足する第 m 番目の根である。

$$\beta \lambda J_1(\beta \lambda a) - h_r J_0(\beta \lambda a) = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

ただし、式(5)において $\bar{q}(p)$ は次のとおりである。

$$\bar{q}(p) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty q(z) \cos(pz) dz \quad \dots\dots\dots (7)$$

2.2 熱応力の解析 熱応力の解析には横等方性体に関するポテンシャル関数法を適用する。変位と熱応力は変位ポテンシャル関数 Ω, χ, ϕ_1 および ϕ_2 によって、次式のように表される⁽⁸⁾。

$$\left. \begin{aligned} u_r &= (\Omega + \phi_1 + \phi_2),_r \\ u_z &= (\chi + k_1 \phi_1 + k_2 \phi_2),_z \\ \sigma_{rr} &= c_{11}(\Omega + \phi_1 + \phi_2),_{rr} + c_{12}(\Omega + \phi_1 + \phi_2),_{r/r} \\ &\quad + c_{13}(\chi + k_1 \phi_1 + k_2 \phi_2),_{zz} - \bar{\beta}_1 T \\ \sigma_{\theta\theta} &= c_{12}(\Omega + \phi_1 + \phi_2),_{rr} + c_{11}(\Omega + \phi_1 + \phi_2),_{r/r} \\ &\quad + c_{13}(\chi + k_1 \phi_1 + k_2 \phi_2),_{zz} - \bar{\beta}_1 T \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zz} &= c_{13}(\Omega + \phi_1 + \phi_2),_{rr} + c_{13}(\Omega + \phi_1 + \phi_2),_{r/r} \\ &\quad + c_{33}(\chi + k_1 \phi_1 + k_2 \phi_2),_{zz} - \bar{\beta}_3 T \\ \sigma_{rz} &= c_{44}[\Omega + \chi + (1 + k_1)\phi_1 + (1 + k_2)\phi_2],_{rz} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

ただし、 c_{ij} と $\bar{\beta}_i$ は横等方性体の材料定数である。また、変位ポテンシャル関数 Ω, χ, ϕ_1 および ϕ_2 は

$$\left. \begin{aligned} c_{11} \Delta_1 \Omega + c_{44} \Omega,_{zz} + (c_{13} + c_{44}) \chi,_{zz} &= \bar{\beta}_1 T \\ (c_{13} + c_{44}) \Delta_1 \Omega + c_{44} \Delta_1 \chi + c_{33} \chi,_{zz} &= \bar{\beta}_3 T \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (10)$$

$$\Delta_1 \phi_i + \mu_i \phi_i,_{zz} = 0, \quad (i=1, 2) \quad \dots\dots\dots (11)$$

を満足しなければならない。ここで、 μ_1 と μ_2 は

$$c_{11} c_{44} \mu^2 + (c_{13}^2 + 2c_{13} c_{44} - c_{11} c_{33}) \mu + c_{33} c_{44} = 0$$

を満足する 2 根である。また、 k_i は次のとおりである。

$$k_i = (c_{11} \mu_i - c_{44}) / (c_{13} + c_{44}), \quad (i=1, 2)$$

熱弾性変位ポテンシャル関数 Ω と χ を式(4)の温度の関数形を考慮して、

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= \int_0^\infty p^{-2} \left[D_0 \frac{I_0(p\lambda r)}{I_0(p\lambda a)} - \sum_{m=1}^\infty D_m J_0(\beta_m \lambda r) \right] \\ &\quad \times \cos(pz) dp \\ \chi &= \int_0^\infty p^{-2} \left[F_0 \frac{I_0(p\lambda r)}{I_0(p\lambda a)} - \sum_{m=1}^\infty F_m J_0(\beta_m \lambda r) \right] \\ &\quad \times \cos(pz) dp \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

とおく。式(12)を式(10)に代入すると、 D_0, F_0, D_m および F_m は

$$\left. \begin{aligned} (D_0, F_0) &= \left[\left\{ \bar{\beta}_1 (c_{44} \lambda^2 - c_{33}) + \bar{\beta}_3 (c_{13} + c_{44}) \right\}, \right. \\ &\quad \left. \left\{ -\bar{\beta}_1 (c_{13} + c_{44}) \lambda^2 + \bar{\beta}_3 (c_{11} \lambda^2 - c_{44}) \right\} T_0 \right] \\ &\quad / \left\{ (c_{11} \lambda^2 - c_{44})(c_{44} \lambda^2 - c_{33}) + (c_{13} + c_{44})^2 \lambda^2 \right\} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\left. \begin{aligned} (D_m, F_m) &= \left[\left\{ -\bar{\beta}_1 (c_{44} \beta_m^2 \lambda^2 + c_{33} p^2) + \bar{\beta}_3 (c_{13} + c_{44}) p^2 \right\}, \right. \\ &\quad \left. \left\{ \bar{\beta}_1 (c_{13} + c_{44}) \beta_m^2 \lambda^2 - \bar{\beta}_3 (c_{11} \beta_m^2 \lambda^2 + c_{44} p^2) \right\} p^2 T_m \right] \\ &\quad / \left\{ (c_{11} \beta_m^2 \lambda^2 + c_{44} p^2)(c_{44} \beta_m^2 \lambda^2 + c_{33} p^2) \right. \\ &\quad \left. - (c_{13} + c_{44})^2 p^2 \beta_m^2 \lambda^2 \right\} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

と決定される。また、式(11)を満足する ϕ_i で、本題に適する関数形として、次式を採用する。

$$\left. \begin{aligned} \phi_i &= \int_0^\infty p^{-2} H_i \frac{I_0(p\sqrt{\mu_i} r)}{I_0(p\sqrt{\mu_i} a)} \cos(pz) dp \\ (i=1, 2) &\dots\dots\dots (15) \end{aligned} \right\}$$

ここで、 H_1 と H_2 は未定係数である。

式(4)、(12)および(15)を式(8)と(9)に代入すると、変位と熱応力は次式のように決定される。

$$u_r = \int_0^\infty p^{-1} \left[\sum_{i=1}^2 \sqrt{\mu_i} H_i \frac{I_1(p\sqrt{\mu_i} r)}{I_0(p\sqrt{\mu_i} a)} + \lambda D_0 \frac{I_1(p\lambda r)}{I_0(p\lambda a)} + \frac{\lambda}{p} \sum_{m=1}^\infty \beta_m D_m J_1(\beta_m \lambda r) \right] \cos(pz) dp \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$u_z = - \int_0^\infty p^{-1} \left[\sum_{i=1}^2 k_i H_i \frac{I_0(p\sqrt{\mu_i} r)}{I_0(p\sqrt{\mu_i} a)} + F_0 \frac{I_0(p\lambda r)}{I_0(p\lambda a)} - \sum_{m=1}^\infty F_m J_0(\beta_m \lambda r) \right] \sin(pz) dp \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = & \int_0^\infty \left[\sum_{i=1}^2 \left\{ (c_{11}\mu_i - c_{13}k_i) \frac{I_0(p\sqrt{\mu_i}r)}{I_0(p\sqrt{\mu_i}a)} - \frac{(c_{11}-c_{12})\sqrt{\mu_i}I_1(p\sqrt{\mu_i}r)}{p r I_0(p\sqrt{\mu_i}a)} \right\} H_i \right. \\ & + (c_{11}\lambda^2 D_0 - c_{13}F_0 - \bar{\beta}_1 T_0) \frac{I_0(p\lambda r)}{I_0(p\lambda a)} - (c_{11}-c_{12})\lambda D_0 \frac{I_1(p\lambda r)}{p r I_0(p\lambda a)} \\ & \left. + \sum_{m=1}^\infty \left\{ \left(\frac{c_{11}\beta_m^2 \lambda^2}{p^2} D_m + c_{13}F_m + \bar{\beta}_1 T_m \right) J_0(\beta_m \lambda r) - (c_{11}-c_{12})\beta_m \lambda D_m \frac{J_1(\beta_m \lambda r)}{p^2 r} \right\} \right] \cos(pz) dp \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} = & \int_0^\infty \left[\sum_{i=1}^2 \left\{ (c_{12}\mu_i - c_{13}k_i) \frac{I_0(p\sqrt{\mu_i}r)}{I_0(p\sqrt{\mu_i}a)} + \frac{(c_{11}-c_{12})\sqrt{\mu_i}I_1(p\sqrt{\mu_i}r)}{p r I_0(p\sqrt{\mu_i}a)} \right\} H_i \right. \\ & + (c_{12}\lambda^2 D_0 - c_{13}F_0 - \bar{\beta}_1 T_0) \frac{I_0(p\lambda r)}{I_0(p\lambda a)} + (c_{11}-c_{12})\lambda D_0 \frac{I_1(p\lambda r)}{p r I_0(p\lambda a)} \\ & \left. + \sum_{m=1}^\infty \left\{ \left(\frac{c_{12}\beta_m^2 \lambda^2}{p^2} D_m + c_{13}F_m + \bar{\beta}_1 T_m \right) J_0(\beta_m \lambda r) + (c_{11}-c_{12})\beta_m \lambda D_m \frac{J_1(\beta_m \lambda r)}{p^2 r} \right\} \right] \cos(pz) dp \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} = & \int_0^\infty \left[\sum_{i=1}^2 (c_{13}\mu_i - c_{13}k_i) H_i \frac{I_0(p\sqrt{\mu_i}r)}{I_0(p\sqrt{\mu_i}a)} + (c_{13}\lambda^2 D_0 - c_{33}F_0 - \bar{\beta}_3 T_0) \frac{I_0(p\lambda r)}{I_0(p\lambda a)} \right. \\ & \left. + \sum_{m=1}^\infty \left\{ \frac{c_{13}\beta_m^2 \lambda^2}{p^2} D_m + c_{33}F_m + \bar{\beta}_3 T_m \right\} J_0(\beta_m \lambda r) \right] \cos(pz) dp \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rz} = & -c_{44} \int_0^\infty \left[\sum_{i=1}^2 \sqrt{\mu_i} (1+k_i) H_i \frac{I_1(p\sqrt{\mu_i}r)}{I_0(p\sqrt{\mu_i}a)} + \lambda (D_0 + F_0) \frac{I_1(p\lambda r)}{I_0(p\lambda a)} + \frac{\lambda}{p} \sum_{m=1}^\infty \beta_m (D_m + F_m) J_1(\beta_m \lambda r) \right] \sin(pz) dp \\ & \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

無限円柱に剛体円環が摩擦とはく離が起こらないようにはめ込まれた場合の力学的境界条件は

$$r = a \text{ で } u_r = 0 \quad (|z| \leq b), \quad \sigma_{rr} = 0 \quad (|z| > b) \dots\dots\dots (22)$$

$$r = a \text{ で } \sigma_{rz} = 0 \dots\dots\dots (23)$$

と表される。

式(21)を式(23)に代入すると、次式を得る。

$$H_2 = \frac{-I_0(p\sqrt{\mu_2}a)}{\sqrt{\mu_2}(1+k_2)I_1(p\sqrt{\mu_2}a)} \left[\sqrt{\mu_1}(1+k_1)H_1 \frac{I_1(p\sqrt{\mu_1}a)}{I_0(p\sqrt{\mu_1}a)} + \lambda(D_0 + F_0) \frac{I_1(p\lambda a)}{I_0(p\lambda a)} + \frac{h_r}{p} \sum_{m=1}^\infty (D_m + F_m) J_0(\beta_m \lambda a) \right] \dots\dots\dots (24)$$

式(16)と(18)を式(22)に代入して式変形すると、次式のような連立積分方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty M \cos(pz) dp = 0, \quad |z| > b \\ \int_0^\infty \overline{CC}2 M \cos(pz) dp = \int_0^\infty \overline{DD}2 \cos(pz) dp, \quad |z| \leq b \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

ここで、 M は未定係数で、

$$M = \overline{CC}1 H_1 + \overline{DD}1 \dots\dots\dots (26)$$

であり、また

$$\left. \begin{aligned} \overline{CC}1 &= c_{11}\mu_1 - c_{13}k_1 - \frac{(c_{11}\mu_2 - c_{13}k_2)\sqrt{\mu_1}(1+k_1)I_1(p\sqrt{\mu_1}a)I_0(p\sqrt{\mu_2}a)}{\sqrt{\mu_2}(1+k_2)I_0(p\sqrt{\mu_1}a)I_1(p\sqrt{\mu_2}a)} + \frac{(c_{11}-c_{12})\sqrt{\mu_1}(k_1-k_2)I_1(p\sqrt{\mu_1}a)}{pa(1+k_2)I_0(p\sqrt{\mu_1}a)} \\ \overline{DD}1 &= c_{11}\lambda^2 D_0 - c_{13}F_0 - \bar{\beta}_1 T_0 - \frac{\lambda I_1(p\lambda a)}{(1+k_2)I_0(p\lambda a)} \left\{ \frac{(c_{11}\mu_2 - c_{13}k_2)(D_0 + F_0)I_0(p\sqrt{\mu_2}a)}{\sqrt{\mu_2}I_1(p\sqrt{\mu_2}a)} \right. \\ & \quad \left. + \frac{(c_{11}-c_{12})(k_2 D_0 - F_0)}{pa} \right\} + \sum_{m=1}^\infty \left[\frac{c_{11}\beta_m^2 \lambda^2}{p^2} D_m + c_{13}F_m + \bar{\beta}_1 T_m \right. \\ & \quad \left. - \frac{h_r}{1+k_2} \left\{ \frac{(c_{11}\mu_2 - c_{13}k_2)(D_m + F_m)I_0(p\sqrt{\mu_2}a)}{p\sqrt{\mu_2}I_1(p\sqrt{\mu_2}a)} + \frac{(c_{11}-c_{12})(k_2 D_m - F_m)}{p^2 a} \right\} \right] J_0(\beta_m \lambda a) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

$$\left. \begin{aligned} \overline{CC}2 &= \frac{(k_1 - k_2)\sqrt{\mu_1}I_1(p\sqrt{\mu_1}a)}{p(1+k_2)I_0(p\sqrt{\mu_1}a)CC1} \\ \overline{DD}2 &= \overline{CC}2 \overline{DD}1 + \frac{\lambda}{1+k_2} \left\{ \frac{(k_2 D_0 - F_0)I_1(p\lambda a)}{p I_0(p\lambda a)} + \frac{h_r}{p^2} \sum_{m=1}^\infty (k_2 D_m - F_m) J_0(\beta_m \lambda a) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

式(25)の連立積分方程式を解くために、未定係数 M を第1式が恒等的に満足されるようにノイマン級数展開する。

$$M = \frac{b}{a} \sum_{n=0}^{\infty} f_n J_{2n}(pb) \dots\dots\dots (29)$$

ここで、 f_n は未定係数である。式(29)を式(25)の第2式に代入し、さらに

$$\cos(pz) = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon_l J_{2l}(pb) \cos(2l\bar{\theta}), \quad \left[\bar{\theta} = \text{Sin}^{-1}\left(\frac{z}{b}\right), \quad \varepsilon_l = \begin{cases} 1 & (l=0) \\ 2 & (l \geq 1) \end{cases} \right] \dots\dots\dots (30)$$

を適用し、すべての $\cos(2l\bar{\theta})$ について式が成立するものとする、次式を得る。

$$\frac{b}{a} \sum_{n=0}^{\infty} f_n \int_0^{\infty} \overline{CC2} J_{2n}(pb) J_{2l}(pb) dp = \int_0^{\infty} \overline{DD2} J_{2l}(pb) dp, \quad (l=0, 1, 2, \dots) \dots\dots\dots (31)$$

上式より、未定係数 f_n は決定され、式(29)、(26)および(24)から順次 M, H_1 および H_2 を求めることができる。

式(24)、(26)および(29)を式(18)~(20)に代入すると、円柱の側面における熱応力は次式によって表される。

$$[\sigma_{rr}]_{r=a} = \frac{H(b-|z|)}{a\sqrt{1-z^2/b^2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f_n T_{2n}\left(\frac{z}{b}\right) \dots\dots\dots (32)$$

$$[\sigma_{\theta\theta}]_{r=a} = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left[b \int_0^{p_0} \left(\frac{\overline{CC3}}{\overline{CC1}} - d_0 \right) J_{2n}(pb) \cos(pz) dp + b \sum_{k=1}^{\infty} d_k \int_{p_0}^{\infty} \frac{J_{2n}(pb) \cos(pz)}{p^k} dp \right. \\ \left. + \frac{H(b-|z|)}{\sqrt{1-z^2/b^2}} d_0 (-1)^n T_{2n}\left(\frac{z}{b}\right) \right] + \int_0^{\infty} \left(\overline{DD3} - \frac{\overline{CC3} \overline{DD1}}{\overline{CC1}} \right) \cos(pz) dp \dots\dots\dots (33)$$

$$[\sigma_{zz}]_{r=a} = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left[b \int_0^{p_0} \left(\frac{\overline{CC4}}{\overline{CC1}} - e_0 \right) J_{2n}(pb) \cos(pz) dp + b \sum_{k=1}^{\infty} e_k \int_{p_0}^{\infty} \frac{J_{2n}(pb) \cos(pz)}{p^k} dp \right. \\ \left. + \frac{H(b-|z|)}{\sqrt{1-z^2/b^2}} e_0 (-1)^n T_{2n}\left(\frac{z}{b}\right) \right] + \int_0^{\infty} \left(\overline{DD4} - \frac{\overline{CC4} \overline{DD1}}{\overline{CC1}} \right) \cos(pz) dp \dots\dots\dots (34)$$

ここで、 $H(z)$ はヘビサイドの単位関数、 $T_{2n}(z)$ はチェビシェフの多項式、

$$\overline{CC3} = c_{12}\mu_1 - c_{13}k_1 - \frac{(c_{12}\mu_2 - c_{13}k_2)\sqrt{\mu_1(1+k_1)}I_1(p\sqrt{\mu_1}a)I_0(p\sqrt{\mu_2}a)}{\sqrt{\mu_2(1+k_2)}I_0(p\sqrt{\mu_1}a)I_1(p\sqrt{\mu_2}a)} - \frac{(c_{11} - c_{12})(k_1 - k_2)\sqrt{\mu_1}I_1(p\sqrt{\mu_1}a)}{pa(1+k_2)I_0(p\sqrt{\mu_1}a)} \dots\dots\dots (35)$$

$$\overline{CC4} = c_{13}\mu_1 - c_{33}k_1 - \frac{(c_{13}\mu_2 - c_{33}k_2)\sqrt{\mu_1(1+k_1)}I_1(p\sqrt{\mu_1}a)I_0(p\sqrt{\mu_2}a)}{\sqrt{\mu_2(1+k_2)}I_0(p\sqrt{\mu_1}a)I_1(p\sqrt{\mu_2}a)} \dots\dots\dots (36)$$

であり、 d_k と e_k は次式のような漸近展開の係数である。

$$\frac{\overline{CC3}}{\overline{CC1}} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k p^{-k}, \quad \frac{\overline{CC4}}{\overline{CC1}} = \sum_{k=0}^{\infty} e_k p^{-k} \dots\dots\dots (37)$$

d_k と e_k の初項のみ示すと

$$(d_0, e_0) = \frac{\left\{ \sqrt{\mu_2(1+k_2)}(c_{12}\mu_1 - c_{13}k_1) - \sqrt{\mu_1(1+k_1)}(c_{12}\mu_2 - c_{13}k_2) \right\}, \left\{ \sqrt{\mu_2(1+k_2)}(c_{13}\mu_1 - c_{33}k_1) - \sqrt{\mu_1(1+k_1)}(c_{13}\mu_2 - c_{33}k_2) \right\}}{\sqrt{\mu_2(1+k_2)}(c_{11}\mu_1 - c_{13}k_1) - \sqrt{\mu_1(1+k_1)}(c_{11}\mu_2 - c_{13}k_2)} \dots\dots\dots (38)$$

である。また、 p_0 は漸近展開に必要な十分大きい値である。ただし、 $\overline{DD3}$ と $\overline{DD4}$ は都合上省略する。

式(32)~(34)から、応力は接触端において $-1/2$ のオーダーの特異性を示していることがわかる。そこで、応力の特異性を評価するために、次式によって定義される係数 $K_{rr}, K_{\theta\theta}$ および K_{zz} を導入する。

$$(K_{rr}, K_{\theta\theta}, K_{zz}) = \lim_{z \rightarrow b-0} \sqrt{2\left(1 - \frac{z}{b}\right)} (\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz})_{r=a} \dots\dots\dots (39)$$

式(32)~(34)を上式に代入すると

$$(K_{rr}, K_{\theta\theta}, K_{zz}) = (1, d_0, e_0) \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f_n \dots\dots\dots (40)$$

となり、

$$K_{rr} = K_{\theta\theta}/d_0 = K_{zz}/e_0 \dots\dots\dots (41)$$

のような関係式を得る。

3. 数 値 計 算

数値計算を実行するうえで便宜上、円柱の半径 a を代表長さにとり、かつ等方面の物性値を基準にして、次のような無次元量を導入する。

$$\rho = r/a, \quad \zeta = z/a, \quad t' = x_r t/a^2, \quad \zeta_0 = b/a, \\ B_i = ah_r, \quad \overline{T} = T/T_0, \quad \overline{u}_\rho = u_r/(a\alpha_r T_0), \\ (\overline{\rho\rho}, \overline{\theta\theta}, \overline{\zeta\zeta}) = (\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz})/(\alpha_r E_r T_0), \\ (\overline{K_{\rho\rho}}, \overline{K_{\theta\theta}}, \overline{K_{\zeta\zeta}}) = (K_{rr}, K_{\theta\theta}, K_{zz})/(\alpha_r E_r T_0), \\ E = E_z/E_r, \quad G = G_{rz}/E_r, \quad \alpha = \alpha_z/\alpha_r$$

ここで、 $T_0 = aQ_0/\lambda_r$ 、 E_r と E_z は縦弾性係数、 G_{rz} は横弾性係数、 α_r と α_z は線膨張率であり、添字は作用する方向を表す。

熱発生は

$$q(\xi) = H(\xi_0 - |\xi|)$$

とした。横等方性材料としては黒鉛を用いた。その材料定数は

$$\lambda_r = 1.172 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}, \lambda_z = 1.340 \text{ W/(m}\cdot\text{K)},$$

$$E_r = 10.4 \text{ GPa}, E_z = 11.8 \text{ GPa},$$

$$G_{rz} = 4.14 \text{ GPa}, \nu_{r\theta} = \nu_{rz} = 0.11,$$

$$\alpha_r = 3.9 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}, \alpha_z = 3.5 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$$

である。ここで、 $\nu_{r\theta}$ と ν_{rz} は $r\theta$ 面と rz 面のポアソン比である。また、黒鉛の横等方性の影響を調査するために、

$$\lambda^2 = E = \alpha = 1.0, \nu_{r\theta} = \nu_{rz} = 0.11$$

のような等方性体を導入した。また、円環の長さは

$$\xi_0 = 1.0$$

とした。

式(31)の数値計算において、無限項を有限項 N で打ち切って、未定係数 f_n を決定した。このときの $\widehat{K}_{\rho\rho}$ の収束性を表1に示す。この表より、 $N=10$ で $\widehat{K}_{\rho\rho}$ は十分に収束しているの、以下の数値計算では $N=10$ とした。また、式(33)と(34)中の $\int_0^{\rho_0}$ は \int_0^{50} とした。

図2に $B_i=1.0$ の場合の $(\widehat{T})_{\rho=1}$ の時間的変化を示す。また、図3~5に $B_i=1.0, t'=1.0$ の場合の $\widehat{\rho\rho}, \widehat{\theta\theta}$ および $\widehat{\xi\xi}$ の ρ に対する分布を示す。これらの図より、加熱域における黒鉛の $(\widehat{T})_{\rho=1}, \widehat{\rho\rho}$ および $\widehat{\theta\theta}$ は等方性

表1 $\widehat{K}_{\rho\rho}$ の収束性 ($B_i=0.1, \sum_{n=0}^{\infty} = \sum_{n=0}^N$)

N	t'			
	10^{-1}	10^0	10^1	10^2
5	-0.0322	-0.4154	-1.4487	-1.5637
10	-0.0323	-0.4166	-1.4531	-1.5684
15	-0.0323	-0.4169	-1.4541	-1.5694
20	-0.0323	-0.4170	-1.4544	-1.5698

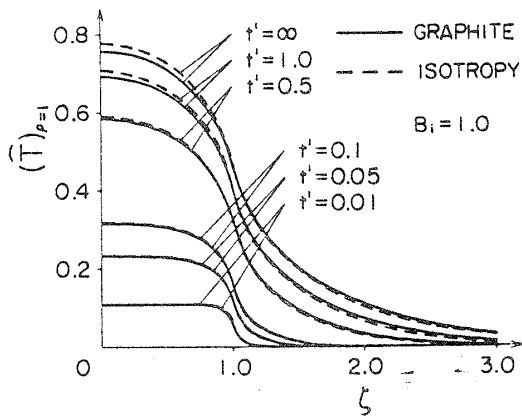


図2 境界上の温度の時間的変化

体のそれらより小さくなっている。また、黒鉛の $(\widehat{\xi\xi})_{\rho=1}$ は等方性体のそれより大きくなっている。これは黒鉛の熱導率が半径方向よりも軸方向のほうが大きいので、軸方向に熱が流れやすくなるためであると考えられる。 $(\widehat{\rho\rho}, \widehat{\theta\theta}, \widehat{\xi\xi})_{\rho=1}$ は $\xi \rightarrow b \rightarrow 0$ で $-\infty$ の特異性を示し、 $\xi \rightarrow b+0$ では有限の応力値を示している。

図6に $B_i=1.0$ の場合の $(\widehat{\rho\rho})_{\rho=1}$ の時間的変化を示す。この図より、 $\xi \rightarrow b \rightarrow 0$ における応力値はフーリエ数の大きいときには $-\infty$ であるが、フーリエ数の小

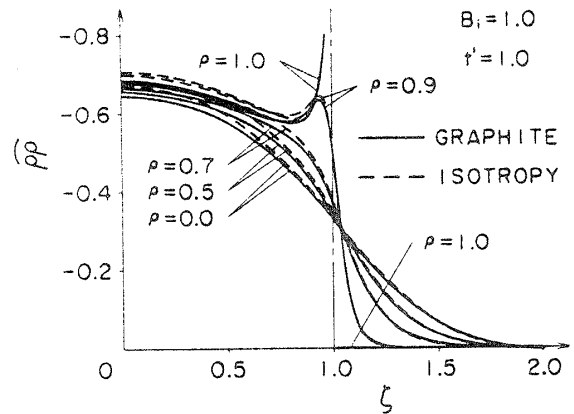


図3 半径応力分布

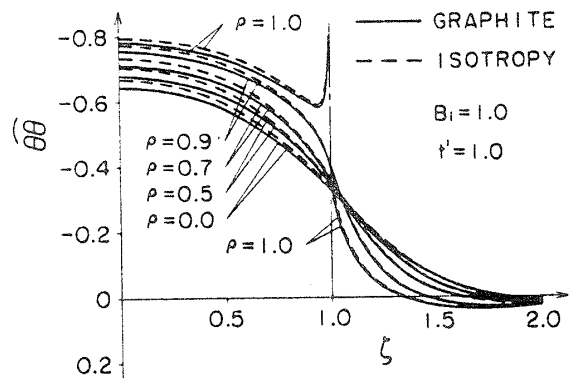


図4 円周応力分布

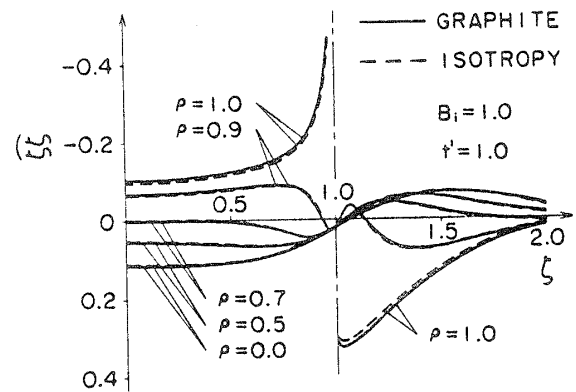


図5 軸応力分布

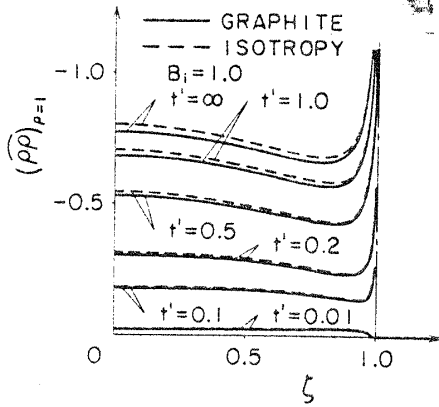


図 6 境界上の半径応力の時間的变化

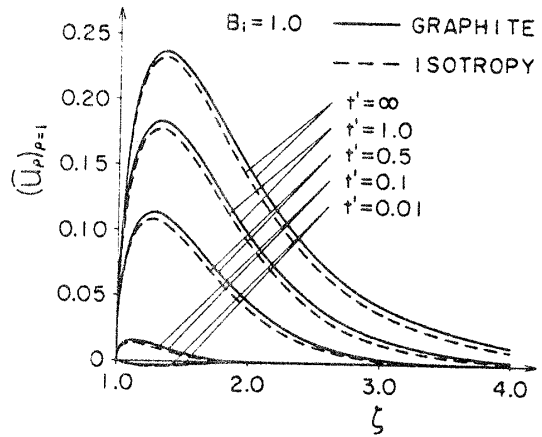


図 8 境界上の半径方向変位の時間的变化

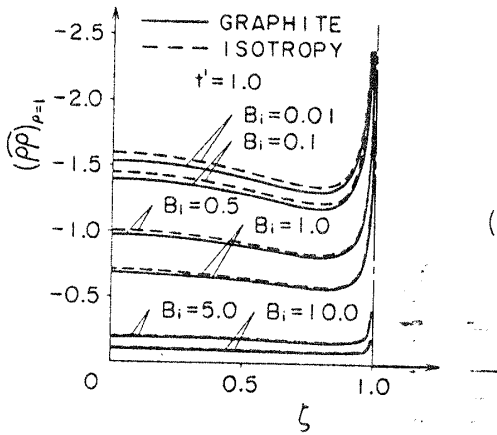


図 7 ビオ数が境界上の半径応力に与える影響

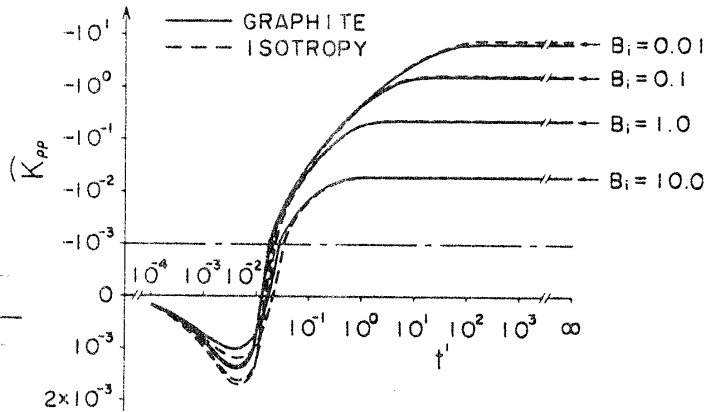


図 9 ビオ数が K_rho rho に与える影響

さいときには境界条件 $(u_\rho)_{\rho=1} = 0$ のために $+\infty$ である。図 7 にビオ数が $t' = 1.0$ のときの $(\rho\rho)_{\rho=1}$ に及ぼす影響について示す。この図より、ビオ数が小さくなるのに従って、圧縮の半径応力は大きくなっている。

図 8 に $B_i = 1.0$ の場合の $(u_\rho)_{\rho=1}$ の時間的变化を示す。この図より、 $(u_\rho)_{\rho=1}$ はフーリエ数が小さいところで収縮し、大きいところで膨張している。これは図 6 の $z \rightarrow z_0 = 0$ における $(\rho\rho)_{\rho=1}$ の符号の反転と対応している。また、黒鉛の $(u_\rho)_{\rho=1}$ は等方性体のそれより大きくなっている。

図 9 にビオ数をパラメータとしたときの $\widehat{K}_{\rho\rho}$ の時間的变化を示す。この図より、ビオ数が小さくなるのに従って $\widehat{K}_{\rho\rho}$ は大きくなっている。また、 $\widehat{K}_{\rho\rho}$ は加熱の初期段階では正の値を示し、時間の経過に伴って負の値に変化し、定常状態で最大値を示している。黒鉛の $\widehat{K}_{\rho\rho}$ は等方性体の $\widehat{K}_{\rho\rho}$ より小さくなっている。

4. 結 言

加熱された剛体円環が横等方性無限円柱にはめ込まれた場合の非定常熱応力問題の解析を行い、ある特定

の条件内で数値計算を実行したところ、以下のことが判明した。

(1) 半径応力、円周応力および軸応力は接触端において特異性を示す。

(2) 応力の特異性を評価するために、

$$\begin{aligned} & (\widehat{K}_{\rho\rho}, \widehat{K}_{\theta\theta}, \widehat{K}_{z z}) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0 = 0} \sqrt{2 \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)} (\rho\rho, \theta\theta, z z)_{\rho=1} \end{aligned}$$

のような係数を導入し、 $\widehat{K}_{\rho\rho} = \widehat{K}_{\theta\theta}/d_0 = \widehat{K}_{z z}/e_0$ の関係を得た。

(3) $\widehat{K}_{\rho\rho}$ は加熱の初期段階で正の値を示し、時間の経過に伴って負の値に変化して、定常状態で最大となる。

(4) ビオ数が小さいほど、 $\widehat{K}_{\rho\rho}$ の値は大きくなる。

(5) 黒鉛の $\widehat{K}_{\rho\rho}$ の値は等方性体のそれより小さい。

文 献

- (1) 野田・阿部, 機論, 49-444, A (昭58), 952.
 (2) 野田, 機論, 51-471, A (昭60), 2465.
 (3) 野田・小林, 機論, 52-481, A (昭61), 2194.
 (4) Savin, G. N. and Grilitskii, D. Y., *Prikladnaya Mekhanika*, 4-5 (1968), 1.
 (5) Clements, D. L. and Toy, G. D., *J. Elasticity*, 6-2 (1976), 137.
 (6) Grilitskii, D. Y. and Shelestovskii, B. G., *Prikladnaya Mekhanika*, 6-8 (1970), 3.
 (7) Loboda, V. V. and Tauchert, T. R., *J. Thermal Stresses*, 8-4 (1985), 365.
 (8) 野田・竹内・植村, 機論, 48-436, A (昭57), 1536.

討 論

〔質問〕 谷川 義信・大多尾 義弘

〔大阪府立大学工学部・大阪府立工業技術研究所〕
 横等方性体の接触熱応力問題を前報の等方性体の場合と同様見事に解析されたことに敬意を表す。次の点についてご教示願いたい。

(1) 本研究の拡張として軸方向に対称な有限円柱に対する問題も等方性体の場合と同様に、解析可能と考えてよいか。さらにより現実的な場合として、例えば有限円柱の片側端面付近に、あるいは半無限円柱に剛体円環がはめ込まれたような軸方向に非対称な場合に対する解析の見通しはどうか。

(2) 円環を剛体として扱っておられるが、実際問題として、円環を弾性体と考えた場合、その解析的手法およびその見通しについてどのようにお考えか。

〔回答〕 (1) 軸方向に対称な有限円柱に対する問題も等方性体の場合と同様に、解析可能であると思われる。軸方向に非対称な有限円柱あるいは半無限円柱の場合の解析は、式(25)に相当する積分方程式が解けるかどうかにかかっており、今後の研究課題とさせていただきます。

(2) 弾性体円環の場合についても解析可能であると考えられ、現在検討中である。