

端面を加熱された短円柱鋼塊の熱応力*

野田直剛**, 竹内洋一郎***, 堀井洋之介****
Naotake NODA, Yoitiro TAKEUTI, Younosuke HORII

1. 緒 言

三次元熱弾性論に基づく有限領域の熱応力問題は、比較的研究されている。例えば、小泉は表面温度が与えられた短円柱の熱応力⁽¹⁾を、Valentin and Carey は熱発生を有する有限円柱の熱応力⁽²⁾を、野田らは有限中空円筒の熱応力⁽³⁾と軸方向に非対称加熱を受ける有限円柱の熱応力⁽⁴⁾を、菅野らは側面に帯状熱発生のある有限円柱の熱応力⁽⁵⁾を解析している。しかしこれらの研究は比較的簡単な熱的条件のもとに解析しており、複雑な熱的条件を持つ実際問題への適用はそのままでは困難である。そこで本研究は三次元熱弾性論の実際問題への適用例として、加熱炉で加熱される短円柱鋼塊の非定常熱応力を取扱った。

鋼塊を加熱炉にて加熱する場合、炉内の温度分布、温度経過、伝熱条件により、鋼塊各部の温度上昇が異なるため、熱応力が発生し、鑄込鋼塊の残留応力と関連し鋼塊の割れの原因ともなりうる。そのため鋼塊の熱応力を知ることは重要であり、さきに松永ら⁽⁶⁾、松永⁽⁷⁾は片端面を加熱された短円柱鋼塊の熱応力を実験と差分法を用いた理論解析を行い貴重な結果を得ている。この差分法は比較的メッシュ間隔が大きく、熱応力変化が大きいところでは十分に精度よく熱応力が求まっていないようである。そこで本研究は、円柱の上下端面、側面における周囲媒質温度、熱伝達率がそれぞれ異なる場合の端面が加熱される短円柱鋼塊の理論解析を行い解析解を得た。なお、材料定数の温度依存性は考慮しないものとする。

2. 解 析

2.1 温度 図1に示されるような、初期温度 T_0 、側面及び上下両端面にそれぞれ異なる熱放散条件（異なる熱伝達率、および異なる周囲媒質温度）が与えられた、半径 a 、長さ $2l$ の短円柱について考える。こ

のとき温度場の満足すべき基礎方程式、境界条件、初期条件は次式で与えられる。

$$\Delta_1 \bar{T} = \partial \bar{T} / \partial t' \dots\dots\dots (1)$$

$$\rho = \rho_0 \text{ で } \partial \bar{T} / \partial \rho + B_1 \bar{T} = B_1 \dots\dots\dots (2)$$

$$\zeta = 1 \text{ で } \partial \bar{T} / \partial \zeta + B_2 \bar{T} = B_2 \bar{T}_2 \dots\dots\dots (3)$$

$$\zeta = -1 \text{ で } \partial \bar{T} / \partial \zeta - B_3 \bar{T} = -B_3 \bar{T}_3 \dots\dots\dots (4)$$

$$t' = 0 \text{ で } \bar{T} = 0 \dots\dots\dots (5)$$

ここで、

$$\rho = r/l, \quad \zeta = z/l, \quad t' = \kappa t/l^2, \quad \rho_0 = a/l$$

$$\beta_i = \alpha_i l / \lambda, \quad \bar{T}_i = (T_i - T_0) / (T_1 - T_0) \quad (i=1, 2, 3)$$

$$\bar{T}(\rho, \zeta, t') = (T - T_0) / (T_1 - T_0)$$

$$\Delta_1 = \partial^2 / \partial \rho^2 + (1/\rho) \partial / \partial \rho + \partial^2 / \partial \zeta^2$$

であり、 κ , λ , α_i , t' , B_i , T_i はそれぞれ熱拡散率、熱伝導率、熱伝達率、フーリエ数、ビオ数、周囲媒質の温度であり、添字1は側面、添字2は上端面、添字3は下端面を表す。つぎに \bar{T} を定常解 \bar{T}_s と非定常解 \bar{T}_u に分けると、それぞれの基礎方程式、境界条件

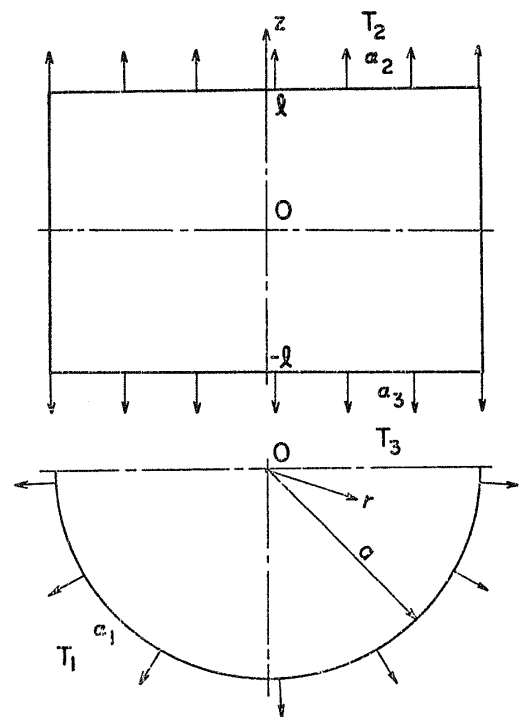


図1 各境界上で異なった熱的境界条件を有する円柱鋼塊

* 昭和 53 年 11 月 22 日 関西支部第 239 回講演会において講演、原稿受付 昭和 54 年 3 月 22 日。
** 正員、静岡大学工学部 (〒432 浜松市城北 3-5-1)。
*** 正員、大阪府立大学工学部。
**** 学生員、静岡大学工学部。

は, 次式となる.

$$\Delta_1 \bar{T}_s = 0 \dots\dots\dots (6)$$

$$\rho = \rho_0 \text{ で } \partial \bar{T}_s / \partial \rho + B_1 \bar{T}_s = B_1 \dots\dots\dots (7)$$

$$\zeta = 1 \text{ で } \partial \bar{T}_s / \partial \zeta + B_2 \bar{T}_s = B_2 \bar{T}_2 \dots\dots\dots (8)$$

$$\zeta = -1 \text{ で } \partial \bar{T}_s / \partial \zeta - B_3 \bar{T}_s = -B_3 \bar{T}_3 \dots\dots\dots (9)$$

$$\Delta_1 \bar{T}_u = \partial \bar{T}_u / \partial t' \dots\dots\dots (10)$$

$$\rho = \rho_0 \text{ で } \partial \bar{T}_u / \partial \rho + B_1 \bar{T}_u = 0 \dots\dots\dots (11)$$

$$\zeta = 1 \text{ で } \partial \bar{T}_u / \partial \zeta + B_2 \bar{T}_u = 0 \dots\dots\dots (12)$$

$$\zeta = -1 \text{ で } \partial \bar{T}_u / \partial \zeta - B_3 \bar{T}_u = 0 \dots\dots\dots (13)$$

初期条件は

$$t' = 0 \text{ で } \bar{T}_s + \bar{T}_u = 0 \dots\dots\dots (14)$$

式(6)を境界条件式(7)~(9)を満足するように解くと, 定常解は次式となる.

$$\bar{T}_s = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} E_s C_s J_0(\gamma_s \rho) (\cosh_1 \gamma_s \zeta + A_s \sinh \gamma_s \zeta) \dots\dots\dots (15)$$

ここで,

$$E_s = 2\gamma_s J_1(\gamma_s \rho_0) / [\rho_0(\gamma_s^2 + B_1^2) \{J_0(\gamma_s \rho_0)\}^2]$$

$$C_s = \{B_2(\bar{T}_2 - 1)(\gamma_s \cosh \gamma_s + B_3 \sinh \gamma_s) + \beta_3(\bar{T}_3 - 1)(\gamma_s \cosh \gamma_s + B_2 \sinh \gamma_s)\} / \{(\gamma_s^2 + B_2 B_3) \sinh 2\gamma_s + (B_2 + B_3)\gamma_s \cosh 2\gamma_s\}$$

$$A_s = \{B_2(\bar{T}_2 - 1)(\gamma_s \sinh \gamma_s + B_3 \cosh \gamma_s) - B_3(\bar{T}_3 - 1)(\gamma_s \sinh \gamma_s + B_2 \cosh \gamma_s)\} / \{B_2(\bar{T}_2 - 1)(\gamma_s \cosh \gamma_s + B_3 \sinh \gamma_s) + B_3(\bar{T}_3 - 1)(\gamma_s \cosh \gamma_s + B_2 \sinh \gamma_s)\}$$

γ_s は方程式

$$\rho_0 \gamma_s J_1(\gamma_s \rho_0) - B_1 \rho_0 J_0(\gamma_s \rho_0) = 0$$

の正根である.

次に非定常解を求める. 式(10)を境界条件式(11)~(13), 初期条件(14)を満足するように解くと,

$$\bar{T}_u = - \sum_{s=1}^{\infty} E_s J_0(\gamma_s \rho) \sum_{k=1}^{\infty} D_{sk} Z(\beta_k \zeta) e^{-(\gamma_s^2 + \beta_k^2)t'} \dots\dots\dots (16)$$

ここで,

$$Z(\beta_k \zeta) = \cos \beta_k \zeta + (\beta_k \sin \beta_k - B_2 \cos \beta_k) \sin \beta_k \zeta / (\beta_k \cos \beta_k + B_2 \sin \beta_k)$$

$$D_{sk} = 2[C_s(\gamma_s \cos \beta_k \sinh \gamma_s + \beta_k \sin \beta_k \cosh \gamma_s) / (\gamma_s^2 + \beta_k^2) + C_s A_s (\gamma_s \sin \beta_k \cosh \gamma_s - \beta_k \cos \beta_k \sinh \gamma_s) (\beta_k \sin \beta_k - B_2 \cos \beta_k) / \{(\beta_k \cos \beta_k + B_2 \sin \beta_k)(\gamma_s^2 + \beta_k^2)\}]$$

$$+ \sin \beta_k / \beta_k \int_{-1}^1 Z^2(\beta_k \zeta) d\zeta$$

β_k は方程式

$$\tan 2\beta_k = \beta_k (B_2 + B_3) / (\beta_k^2 - B_2 B_3)$$

の正根である. したがって, 求める温度分布は次式となる.

$$\bar{T} = \bar{T}_s + \bar{T}_u = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} E_s J_0(\gamma_s \rho) \left[C_s (\cosh \gamma_s \zeta + A_s \sinh \gamma_s \zeta) - \sum_{k=1}^{\infty} D_{sk} Z(\beta_k \zeta) e^{-(\gamma_s^2 + \beta_k^2)t'} \right] \dots\dots\dots (17)$$

2.2 熱応力 式(17)の軸対称な温度場により生ずる熱応力を解析するため, 次式の微分方程式を満足する熱弾性変位ポテンシャル Φ とラブの変位関数 L を導入する.

$$\Delta \Phi = (1 + \nu) \alpha_t T / (1 - \nu) \dots\dots\dots (18)$$

$$\Delta \Delta L = 0 \dots\dots\dots (19)$$

ただし, α_t, ν はそれぞれ線膨張係数, ポアソン比,

$$\Delta = \partial^2 / \partial r^2 + (1/r) \partial / \partial r + \partial^2 / \partial z^2$$

である. ここで,

$$\bar{\Phi} = (1 - \nu) \Phi / \{(1 + \nu) \alpha_t t^2 (T_1 - T_0)\}, \quad \bar{L} = (1 - \nu) L / \{(1 + \nu) \alpha_t t^3 (T_1 - T_0)\}$$

とおけば, $\bar{\Phi}$ と \bar{L} の基礎式は次式で与えられる.

$$\Delta_1 \bar{\Phi} = \bar{T} \dots\dots\dots (18')$$

$$\Delta_1 \Delta_1 \bar{L} = 0 \dots\dots\dots (19')$$

また, 無次元の応力成分は次式で与えられる.

$$\widehat{\rho} = \sigma_{rr} / 2GK = \partial^2 \bar{\Phi} / \partial \rho^2 - \Delta_1 \bar{\Phi} + \partial \{ \nu \Delta_1 \bar{L} - \partial^2 \bar{L} / \partial \rho^2 \} / \partial \zeta \dots\dots\dots (20)$$

$$\widehat{\theta} = \sigma_{\theta\theta} / 2GK = (1/\rho) \partial \bar{\Phi} / \partial \rho - \Delta_1 \bar{\Phi} + \partial \{ \nu \Delta_1 \bar{L} - (1/\rho) \partial \bar{L} / \partial \rho \} / \partial \zeta \dots\dots\dots (21)$$

$$\widehat{\zeta} = \sigma_{zz} / 2GK = \partial^2 \bar{\Phi} / \partial \zeta^2 - \Delta_1 \bar{\Phi} + \partial \{ (2 - \nu) \Delta_1 \bar{L} - \partial^2 \bar{L} / \partial \zeta^2 \} / \partial \zeta \dots\dots\dots (22)$$

$$\widehat{\rho\zeta} = \sigma_{rz}/2GK = \partial^2 \Phi / \partial \rho \partial \zeta + \partial \{ (1-\nu) \Delta_1 \bar{L} - \partial^2 \bar{L} / \partial \zeta^2 \} / \partial \rho \quad \dots\dots\dots (23)$$

ここで、 G は横弾性係数、 $K = (1+\nu)\alpha_t(T_1 - T_0)/(1-\nu)$ である。外力の作用しない境界条件は次式で与えられる。

$$\rho = \rho_0 \text{ で } \widehat{\rho\rho} = 0 \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$\rho = \rho_0 \text{ で } \widehat{\rho\zeta} = 0 \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$\zeta = \pm 1 \text{ で } \widehat{\zeta\zeta} = 0 \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$\zeta = \pm 1 \text{ で } \widehat{\rho\zeta} = 0 \quad \dots\dots\dots (27)$$

式 (18') の特解は式 (17) を考慮して次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} = & \rho^2/4 + \sum_{s=1}^{\infty} E_s J_0(\gamma_s \rho) \left[C_s(\zeta \sinh \gamma_s \zeta + A_s \zeta \cosh \gamma_s \zeta) / 2\gamma_s \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^{\infty} D_{sk} Z(\beta_k \zeta) e^{-(\gamma_s^2 + \beta_k^2)\zeta} / (\gamma_s^2 + \beta_k^2) \right] \quad \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

本問題に適する \bar{L} として次式を採用する。

$$\begin{aligned} \bar{L} = & F_1 \rho^2 \zeta / 4 + F_2 \zeta^3 / 6 - F_3 [\nu \rho^4 / 32 (1+\nu) + (1-\nu) \rho^2 \zeta^2 / 4 (1+\nu) + (\nu-2) \zeta^4 / 12 (1+\nu)] \\ & + \sum_{s=1}^{\infty} J_0(\gamma_s \rho) [U_{1s} \cosh \gamma_s \zeta + U_{2s} \zeta \sinh \gamma_s \zeta / 2\gamma_s + U_{3s} \sinh \gamma_s \zeta + U_{4s} \zeta \cosh \gamma_s \zeta / 2\gamma_s] \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} J_0(\mu_m \rho) [V_{1m} \cosh \mu_m \zeta + V_{2m} \zeta \sinh \mu_m \zeta / 2\mu_m + V_{3m} \sinh \mu_m \zeta + V_{4m} \zeta \cosh \mu_m \zeta / 2\mu_m] \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sin \alpha_n \zeta [P_{1n} I_0(\alpha_n \rho) + P_{2n} \rho I_1(\alpha_n \rho) / 2\alpha_n] + \sum_{j=1}^{\infty} \cos \omega_j \zeta [Q_{1j} I_0(\omega_j \rho) + Q_{2j} \rho I_1(\omega_j \rho) / 2\omega_j] \\ & \quad \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

ここで、 μ_m は方程式 $J_1(\mu_m \rho) = 0$ の正根、 $\alpha_n = n\pi$ 、 $\omega_j = (2j-1)\pi/2$ であり、 $F_1 \sim F_3$ 、 $U_{1s} \sim U_{4s}$ 、 $V_{1m} \sim V_{4m}$ 、 P_{1n} 、 P_{2n} 、 Q_{1j} 、 Q_{2j} は未知定数であり、境界条件から決定される。式 (28)、(29) を式 (20)~(23) に代入することにより各応力成分を得る。

$$\begin{aligned} \widehat{\rho\rho} = & -1/2 + F_1(\nu-1/2) + \nu F_2 + F_3 \zeta + \sum_{s=1}^{\infty} J_0(\gamma_s \rho) \left[-E_s \left\{ C_s \left\{ \cosh \gamma_s \zeta + \gamma_s \zeta \sinh \gamma_s \zeta / 2 \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + A_s (\sinh \gamma_s \zeta + \gamma_s \zeta \cosh \gamma_s \zeta / 2) \right\} - \sum_{k=1}^{\infty} D_{sk} \beta_k^2 Z(\beta_k \zeta) e^{-(\gamma_s^2 + \beta_k^2)\zeta} / (\gamma_s^2 + \beta_k^2) \right\} \\ & + \{U_{1s} \gamma_s^3 + (\nu+1/2) U_{2s} \gamma_s\} \sinh \gamma_s \zeta + U_{2s} \gamma_s^2 \zeta \cosh \gamma_s \zeta / 2 + \{U_{3s} \gamma_s^3 + (\nu+1/2) U_{4s} \gamma_s\} \cosh \gamma_s \zeta \\ & \left. + U_{4s} \gamma_s^2 \zeta \sinh \gamma_s \zeta / 2 \right] + \sum_{s=1}^{\infty} J_1(\gamma_s \rho) \left[E_s \left\{ C_s (\gamma_s \zeta \sinh \gamma_s \zeta + A_s \gamma_s \zeta \cosh \gamma_s \zeta) / 2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{k=1}^{\infty} D_{sk} \gamma_s^2 Z(\beta_k \zeta) e^{-(\gamma_s^2 + \beta_k^2)\zeta} / (\gamma_s^2 + \beta_k^2) \right\} - \{U_{1s} \gamma_s^3 + \gamma_s U_{2s} / 2\} \sinh \gamma_s \zeta \right. \\ & \left. - U_{2s} \gamma_s^2 \zeta \cosh \gamma_s \zeta / 2 - \{U_{3s} \gamma_s^3 + \gamma_s U_{4s} / 2\} \cosh \gamma_s \zeta - U_{4s} \gamma_s^2 \zeta \sinh \gamma_s \zeta / 2 \right] / \gamma_s \rho \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} J_0(\mu_m \rho) [\{V_{1m} \mu_m^3 + (\nu+1/2) V_{2m} \mu_m\} \sinh \mu_m \zeta + V_{2m} \mu_m^2 \zeta \cosh \mu_m \zeta / 2 \\ & + \{V_{3m} \mu_m^3 + (\nu+1/2) V_{4m} \mu_m\} \cosh \mu_m \zeta + V_{4m} \mu_m^2 \zeta \sinh \mu_m \zeta / 2] - \sum_{m=1}^{\infty} J_1(\mu_m \rho) / \mu_m \rho \\ & \times [\{V_{1m} \mu_m^3 + V_{2m} \mu_m / 2\} \sinh \mu_m \zeta + V_{2m} \mu_m^2 \zeta \cosh \mu_m \zeta / 2 + \{V_{3m} \mu_m^3 + V_{4m} \mu_m / 2\} \cosh \mu_m \zeta \\ & + V_{4m} \mu_m^2 \zeta \sinh \mu_m \zeta / 2] + \sum_{n=1}^{\infty} [\{(\nu-1/2) \alpha_n P_{2n} - P_{1n} \alpha_n^3\} I_0(\alpha_n \rho) + \{\alpha_n^2 P_{1n} / \rho \\ & - \alpha_n^2 \rho P_{2n} / 2\} I_1(\alpha_n \rho)] \cos \alpha_n \zeta - \sum_{j=1}^{\infty} [\{(\nu-1/2) \omega_j Q_{2j} - Q_{1j} \omega_j^3\} I_0(\omega_j \rho) \\ & + \{\omega_j^2 Q_{1j} / \rho - \omega_j^2 \rho Q_{2j} / 2\} I_1(\omega_j \rho)] \sin \omega_j \zeta \quad \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \widehat{\theta} = & -1/2 + F_1(\nu - 1/2) + \nu F_2 + F_3\zeta + \sum_{s=1}^{\infty} J_0(\gamma_s \rho) \left[-E_s \left\{ C_s(\cosh \gamma_s \zeta + A_s \sinh \gamma_s \zeta) \right. \right. \\
 & \left. \left. - \sum_{k=1}^{\infty} D_{Sk} Z(\beta_k \zeta) e^{-(\gamma_s^2 + \beta_k^2) \zeta'} \right\} + \nu U_{2s} \gamma_s \sinh \gamma_s \zeta + \nu U_{4s} \gamma_s \cosh \gamma_s \zeta \right] \\
 & + \sum_{s=1}^{\infty} J_1(\gamma_s \rho) / \rho \left[-E_s \left\{ C_s(\zeta \sinh \gamma_s \zeta + A_s \zeta \cosh \gamma_s \zeta) / 2 \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sum_{k=1}^{\infty} D_{Sk} \gamma_s Z(\beta_k \zeta) e^{-(\gamma_s^2 + \beta_k^2) \zeta'} / (\gamma_s^2 + \beta_k^2) \right\} + \{U_{1s} \gamma_s^2 + U_{2s} / 2\} \sinh \gamma_s \zeta \right. \\
 & \left. + U_{2s} \gamma_s \zeta \cosh \gamma_s \zeta / 2 + \{U_{3s} \gamma_s^2 + U_{4s} / 2\} \cosh \gamma_s \zeta + U_{4s} \gamma_s \zeta \sinh \gamma_s \zeta / 2 \right] \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} J_0(\mu_m \rho) [\nu V_{2m} \mu_m \sinh \mu_m \zeta + \nu V_{4m} \mu_m \cosh \mu_m \zeta] \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} J_1(\mu_m \rho) / \rho [\{V_{1m} \mu_m^2 + V_{2m} / 2\} \sinh \mu_m \zeta + V_{2m} \mu_m \zeta \cosh \mu_m \zeta / 2 + \{V_{3m} \mu_m^2 + V_{4m} / 2\} \cosh \mu_m \zeta \\
 & + V_{4m} \mu_m \zeta \sinh \mu_m \zeta] + \sum_{n=1}^{\infty} [(\nu - 1/2) \alpha_n P_{2n} I_0(\alpha_n \rho) - P_{1n} \alpha_n^2 I_1(\alpha_n \rho) / \rho] \cos \alpha_n \zeta \\
 & - \sum_{j=1}^{\infty} [(\nu - 1/2) \omega_j Q_{2j} I_0(\omega_j \rho) - Q_{1j} \omega_j^2 I_1(\omega_j \rho) / \rho] \sin \omega_j \zeta \dots \dots \dots (31)
 \end{aligned}$$

ただし, $\zeta, \widehat{\rho}\zeta$ は簡素化のために省略する. 式 (30) を式 (24) に代入すれば,

$$\begin{aligned}
 & \cos \alpha_n \zeta, \quad \sin \omega_j \zeta, \quad \cosh \gamma_s \zeta, \quad \gamma_s \zeta \sinh \gamma_s \zeta, \quad \sinh \gamma_s \zeta, \quad \gamma_s \zeta \cosh \gamma_s \zeta, \quad \cos \beta_k \zeta \\
 & \sin \beta_k \zeta, \quad \cosh \mu_m \zeta, \quad \mu_m \zeta \sinh \mu_m \zeta, \quad \sinh \mu_m \zeta, \quad \mu_m \zeta \cosh \mu_m \zeta
 \end{aligned}$$

の関数となり, 任意の ζ に関して式 (24) が成立するために $-1 \leq \zeta \leq 1$ の範囲で

$$\cosh \gamma_s \zeta, \quad \gamma_s \zeta \sinh \gamma_s \zeta, \quad \cos \beta_k \zeta, \quad \cosh \mu_m \zeta, \quad \mu_m \zeta \sinh \mu_m \zeta$$

を, $\cos \alpha_n \zeta$ で, $-1 \leq \zeta \leq 1$ の範囲で

$$\sinh \gamma_s \zeta, \quad \gamma_s \zeta \cosh \gamma_s \zeta, \quad \sin \beta_k \zeta, \quad \sinh \mu_m \zeta, \quad \mu_m \zeta \cosh \mu_m \zeta$$

を, $\sin \omega_j \zeta$ でフーリエ級数に展開する.

$$\cos \beta_k \zeta = H_{cn}(\beta_k, 0) + \sum_{n=1}^{\infty} H_{cn}(\beta_k, \alpha_n) \cos \alpha_n \zeta \dots \dots \dots (32)$$

$$\cosh g \zeta = H_{ch}(g, 0) + \sum_{n=1}^{\infty} H_{ch}(g, \alpha_n) \cos \alpha_n \zeta \dots \dots \dots (33)$$

$$g \zeta \sinh g \zeta = H_{cs_h}(g, 0) + \sum_{n=1}^{\infty} H_{cs_h}(g, \alpha_n) \cos \alpha_n \zeta \dots \dots \dots (34)$$

$$\sin \beta_k \zeta = \sum_{j=1}^{\infty} M_{Sn}(\beta_k, \omega_j) \sin \omega_j \zeta \dots \dots \dots (35)$$

$$\sinh g \zeta = \sum_{j=1}^{\infty} M_{Sh}(g, \omega_j) \sin \omega_j \zeta \dots \dots \dots (36)$$

$$g \zeta \cosh g \zeta = \sum_{j=1}^{\infty} M_{\zeta ch}(g, \omega_j) \sin \omega_j \zeta \dots \dots \dots (37)$$

$$\zeta = \sum_{j=1}^{\infty} M_{\zeta}(\omega_j) \sin \zeta \dots \dots \dots (38)$$

ここで, g は γ_s または μ_m であり, また $H_{cn}(\beta_k, 0)$, $H_{cn}(\beta_k, \alpha_n)$, $M_{Sn}(\beta_k, \omega_j)$ ……等は展開係数であり, それぞれ次式で与えられる.

$$H_{cn}(\beta_k, 0) = \sin \beta_k / \beta_k, \quad H_{cn}(\beta_k, \alpha_n) = 2\beta_k \sin \beta_k (-1)^n / (\beta_k^2 - \alpha_n^2)$$

$$H_{ch}(g, 0) = \sinh g / g, \quad H_{ch}(g, \alpha_n) = 2g \sinh g (-1)^n / (g^2 + \alpha_n^2)$$

$$H_{cs_h}(g, 0) = \cosh g - \sinh g / g$$

$$H_{\zeta S_n}(g, \alpha_n) = 2g (-1)^n \{g \cosh g (g^2 + \alpha_n^2) - (g^2 - \alpha_n^2) \sinh g\} / (g^2 + \alpha_n^2)^2$$

$$M_{Sn}(\beta_k, \omega_j) = -2\beta_k \cos \beta_k (-1)^{j+1} / (\beta_k^2 - \omega_j^2)$$

$$M_{Sh}(g, \omega_j) = 2g \cosh g (-1)^{j+1} / (g^2 + \omega_j^2)$$

$$M_{\zeta ch}(g, \omega_j) = 2g (-1)^{j+1} \{g \sinh g (g^2 + \omega_j^2) - (g^2 - \omega_j^2) \cosh g\} / (g^2 + \omega_j^2)^2$$

$$M_{\zeta}(\omega_j) = 2(-1)^{j+1} / \omega_j^2$$

式 (32)~(38) を式 (24) に代入し, 定数項, $\cos \alpha_n \zeta$ および $\sin \omega_j \zeta$ の各係数を 0 に等置すれば次の 3 個の方程式を得る.

$$\begin{aligned}
& -1/2 + F_1(\nu - 1/2) + F_2\nu + \sum_{S=1}^{\infty} J_0(\gamma_S \rho_0) \left[-E_S \left[C_S \{ H_{ch}(\gamma_S, 0) + H_{csh}(\gamma_S, 0) \} / 2 \right] \right. \\
& \quad - \sum_{k=1}^{\infty} D_{Sk} \beta_k^2 H_{cn}(\beta_k, 0) e^{-\langle r_S^2 + \beta_k^2 \rangle t'} / (\gamma_S^2 + \beta_k^2) \left. \right] + \{ U_{3S} \gamma_S^3 + (\nu + 1/2) U_{4S} \gamma_S \} H_{ch}(\gamma_S, 0) \\
& \quad + U_{4S} \gamma_S H_{csh}(\gamma_S, 0) / 2 \left. \right] + \sum_{S=1}^{\infty} J_1(\gamma_S \rho_0) / \gamma_S \rho_0 \left[E_S \left\{ C_S H_{csh}(\gamma_S, 0) / 2 \right. \right. \\
& \quad + \sum_{k=1}^{\infty} D_{Sk} \gamma_S^2 H_{cn}(\beta_k, 0) e^{-\langle r_S^2 + \beta_k^2 \rangle t'} / (\gamma_S^2 + \beta_k^2) \left. \right\} - \{ U_{3S} \gamma_S^3 + U_{4S} \gamma_S / 2 \} H_{ch}(\gamma_S, 0) \\
& \quad - U_{4S} \gamma_S H_{csh}(\gamma_S, 0) / 2 \left. \right] + \sum_{m=1}^{\infty} J_0(\mu_m \rho_0) \left[\{ V_{3m} \mu_m^3 + (\nu + 1/2) V_{4m} \mu_m \} H_{ch}(\mu_m, 0) \right. \\
& \quad + V_{4m} \mu_m H_{csh}(\mu_m, 0) / 2 \left. \right] = 0 \dots\dots\dots (39)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{S=1}^{\infty} J_0(\gamma_S \rho_0) \left[-E_S \left[C_S \{ H_{ch}(\gamma_S, \alpha_n) + H_{csh}(\gamma_S, \alpha_n) \} / 2 \right] \right. \\
& \quad - \sum_{k=1}^{\infty} D_{Sk} \beta_k^2 H_{cn}(\beta_k, \alpha_n) e^{-\langle r_S^2 + \beta_k^2 \rangle t'} / (\gamma_S^2 + \beta_k^2) \left. \right] + \{ U_{3S} \gamma_S^3 + (\nu + 1/2) U_{4S} \gamma_S \} H_{ch}(\gamma_S, \alpha_n) \\
& \quad + U_{4S} \gamma_S H_{csh}(\gamma_S, \alpha_n) / 2 \left. \right] + \sum_{S=1}^{\infty} J_1(\gamma_S \rho_0) / \gamma_S \rho_0 \left[E_S \left\{ C_S H_{csh}(\gamma_S, \alpha_n) / 2 \right. \right. \\
& \quad + \sum_{k=1}^{\infty} D_{Sk} \gamma_S^2 H_{cn}(\beta_k, \alpha_n) e^{-\langle r_S^2 + \beta_k^2 \rangle t'} / (\gamma_S^2 + \beta_k^2) \left. \right\} - \{ U_{3S} \gamma_S^3 + U_{4S} \gamma_S / 2 \} H_{ch}(\gamma_S, \alpha_n) \\
& \quad - U_{4S} \gamma_S H_{csh}(\gamma_S, \alpha_n) / 2 \left. \right] + \sum_{m=1}^{\infty} J_0(\mu_m \rho_0) \left[\{ V_{3m} \mu_m^3 + (\nu + 1/2) V_{4m} \mu_m \} H_{ch}(\mu_m, \alpha_n) \right. \\
& \quad + V_{4m} \mu_m H_{csh}(\mu_m, \alpha_n) / 2 \left. \right] + \{ (\nu - 1/2) \alpha_n P_{2n} - P_{1n} \alpha_n^3 \} I_0(\alpha_n \rho_0) \\
& \quad + \{ P_{1n} \alpha_n^2 / \rho_0 - P_{2n} \alpha_n^2 \rho_0 / 2 \} I_1(\alpha_n \rho_0) = 0 \dots\dots\dots (40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& F_3 M_{\zeta}(\omega_j) + \sum_{S=1}^{\infty} J_0(\gamma_S \rho_0) \left[-E_S \left[A_S C_S \{ M_{Sh}(\gamma_S, \omega_j) + M_{\zeta ch}(\gamma_S, \omega_j) \} / 2 \right] \right. \\
& \quad - \sum_{k=1}^{\infty} D_{Sk} \beta_k^2 M_{Sn}(\beta_k, \omega_j) \left. \left(\beta_k \sin \beta_k - B_2 \cos \beta_k \right) e^{-\langle r_S^2 + \beta_k^2 \rangle t'} / \{ (\gamma_S^2 + \beta_k^2) (\beta_k \cos \beta_k \right. \right. \\
& \quad + B_2 \sin \beta_k) \} \left. \right] + U_{1S} \gamma_S^3 + (\nu + 1/2) U_{2S} \gamma_S \left. \right\} M_{Sh}(\gamma_S, \omega_j) + U_{2S} \gamma_S M_{\zeta ch}(\gamma_S, \omega_j) / 2 \left. \right] \\
& \quad + \sum_{S=1}^{\infty} J_1(\gamma_S \rho_0) / \gamma_S \rho_0 \left[E_S \left[A_S C_S M_{\zeta ch}(\gamma_S, \omega_j) / 2 + \sum_{k=1}^{\infty} D_{Sk} \gamma_S^2 M_{Sn}(\beta_k, \omega_j) \left(\beta_k \sin \beta_k \right. \right. \right. \\
& \quad - B_2 \cos \beta_k \left. \left. \right) e^{-\langle r_S^2 + \beta_k^2 \rangle t'} / \{ (\gamma_S^2 + \beta_k^2) (\beta_k \cos \beta_k + B_2 \sin \beta_k) \} \right. \left. \right] \\
& \quad - \{ U_{1S} \gamma_S^3 + U_{2S} \gamma_S / 2 \} M_{Sh}(\gamma_S, \omega_j) - U_{2S} \gamma_S M_{\zeta ch}(\gamma_S, \omega_j) / 2 \left. \right] + \sum_{m=1}^{\infty} J_0(\mu_m \rho_0) \\
& \quad \times \left[\{ V_{1m} \mu_m^3 + (\nu + 1/2) V_{2m} \mu_m \} M_{Sh}(\mu_m, \omega_j) + V_{2m} \mu_m M_{\zeta ch}(\mu_m, \omega_j) / 2 \right. \\
& \quad - \{ (\nu - 1/2) \omega_j Q_{2j} - Q_{1j} \omega_j^3 \} I_0(\omega_j \rho_0) - \{ Q_{1j} \omega_j^2 \rho_0 - Q_{2j} \omega_j^2 \rho_0 / 2 \} I_1(\omega_j \rho_0) \left. \right] = 0 \dots\dots\dots (41)
\end{aligned}$$

同様に式 (25) より, $-1 < \zeta < 1$ の範囲で $\cosh \gamma_S \zeta$, $\gamma_S \zeta \sinh \gamma_S \zeta$, $\cos \beta_k \zeta$ を $\cos \omega_j \zeta$ で, $-1 < \zeta < 1$ の範囲で $\sinh \gamma_S \zeta$, $\gamma_S \zeta \cosh \gamma_S \zeta$, $\sin \beta_k \zeta$ を $\sin \alpha_n \zeta$ に関してフーリエ展開すれば 2 個の方程式が得られ, 式 (26) より, $0 \leq \rho \leq \rho_0$ の範囲で $I_0(\alpha_n \rho)$, $\alpha_n \rho I_1(\alpha_n \rho)$, $I_0(\omega_j \rho)$, $\omega_j \rho I_1(\omega_j \rho)$ を $J_0(\mu_m \rho)$ に関してベッセル展開し, また $J_0(\gamma_S \rho)$ の係数を 0 に等置すれば 6 個の方程式を得る. さらに式 (27) より, $J_1(\gamma_S \rho)$, $J_1(\mu_m \rho)$ の係数を 0 に等置すれば 4 個の方程式を得る. 以上の方程式より, $U_{1S} \sim U_{4S}$ が決定される, 残りの未知係数は方程式の代入を繰返すことにより, P_{1n} , Q_{1j} , F_3 に関する 3 個の方程式に帰着される.

$$p_{1n} + p_{2n} P_{1n} + \sum_{N=1}^{\infty} p_{3N} P_{1N} = 0 \dots\dots\dots (42)$$

$$q_{1j} + q_{2j} Q_{1j} + q_{3j} F_3 + \sum_{i=1}^{\infty} q_{4i} Q_{1i} = 0 \dots\dots\dots (43)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \{ q_{5j} Q_{1j} + q_{6j} \} = 0 \dots\dots\dots (44)$$

ただし, $p_{1n} \sim p_{3N}$, $q_{1j} \sim q_{6j}$ は既知の定数である. この方程式を解けば, 未知係数はすべて決定され, 各応力成分が得られる.

3. 数値計算結果と考察

松永らの実験⁽⁶⁾及び松永の差分解⁽⁷⁾と本解析を比較検討するため, 表 1 に示す材料定数に対し, 数値計算を実行し, 図 2 から図 7 にその結果を示す. 表 1-1 は実験⁽⁶⁾との比較, 表 1-2 は差分解⁽⁷⁾との比較のために用いた材料定数値である. 図 2 に温度の時間変化, 図 3 に下端面における応力分布の時間変化を示す. いずれも, 実線が実験値, 破線が本解析値を示す. 図 2 において, 1 ~ 3 は図中の測定点 1 ~ 3 を示す. ま

た, 実験値と解析値は比較的近似している. 図3において, 1st 及び 2nd は1回め, 2回めの実験値を示している. 本解析値と実験値を比較すれば, 1分後は近似しているが, その他の時刻においては, 1回めと2回めの実験値の間に入っている. また, 図4にこの場合の上端面の応力分布を示す. この場合, 最大応力は2分後に中心に生ずる圧縮の半径応力と円周応力である. 差分解析⁽⁷⁾と本解析を比較するため, 図5に温度分布を, 図6と図7に応力分布を示す. いずれも, 実

線が本解析値, 破線は差分解析の値である. 応力分布において, 初期の時刻では両者の傾向は近似しているが, 時間が経過すると, 差分解析では境界条件をあまり精度よく満足していないことがわかる.

次に熱応力に及ぼす各材料定数の影響を調べるため, 表2に示す材料定数に対し数値計算を行なった. 表2-1の材料定数に対するフーリエ数(t')=0.1のときの各応力成分 $\rho\rho$, $\theta\theta$, $\zeta\zeta$ を図8~10に示す. 最大応力は上端面の中心に生ずる圧縮の半径応力と円周応力である. 最大応力が生ずる $\zeta=1$ 上の応力の時間変化を図11に示す. $t'=0.1$ を少し経過したとこ

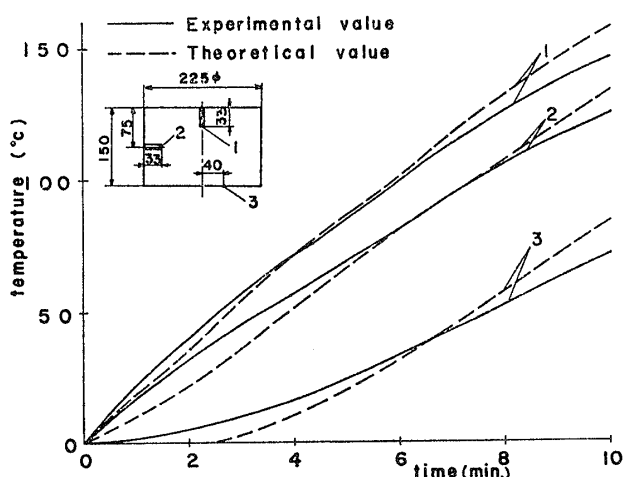


図2 温度の時間変化

表1 材料定数

	1-1	1-2
G kg/mm ²	8077	6923
α_t 1/°C	11.3×10^{-6}	13.5×10^{-6}
ν	0.3	0.3
λ kcal/mh°C	30	30
κ m ² /h	0.041	0.041
$2l$ mm	150	300
$2a$ mm	225	435
T_0 °C	10	20
T_1 °C	850	1642
\bar{T}_1	1.0	1.0
\bar{T}_2	1.0	1.0
\bar{T}_3	0.0	1.0
B_1	0.065	0.091
B_2	0.169	0.150
B_3	0.0	0.1

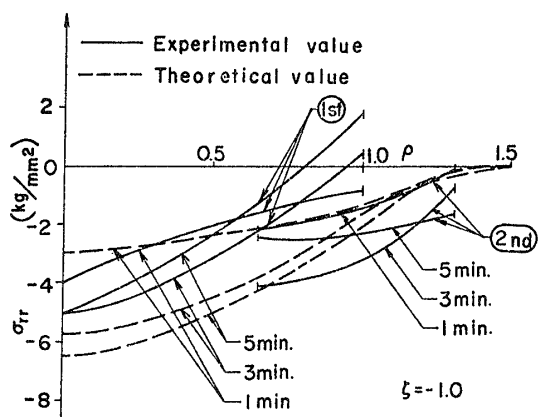


図3 下端面における半径応力分布

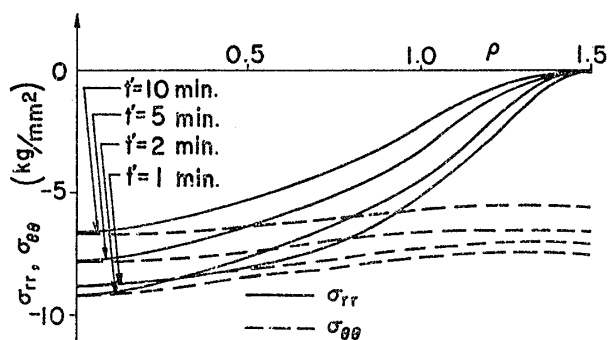


図4 上端面における半径応力と円周応力分布

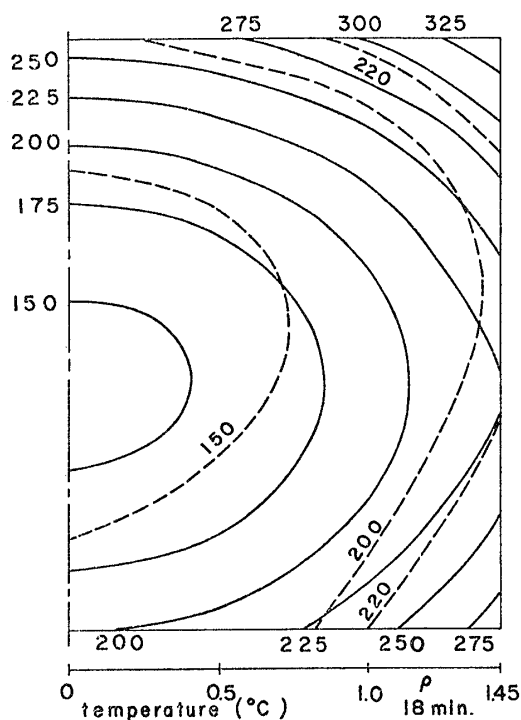


図5 温度分布

ろで最大応力となるのがわかる。次に周囲の伝熱条件を種々に変化させた場合(表 2-2~表 2-10)の応力成分を図 13 と図 15 に示す。図 12 には表 2-2 の場合の $\zeta=1$ 上の半径応力と円周応力分布を示す。図 13 はビオ数を一定にして周囲媒質温度を変化させた場合

(表 2-2~表 2-6) の最大応力が生ずる上端面中心での応力の時間変化を示す。上端面中心の半径応力と円周応力は周囲媒質温度の増加とともに大きくなり、また $\nu=0.1$ の近くで最大となることがわかる。図 14 に周囲媒質温度を一定にした場合(表 2-10)の上端面の半径応力と円周応力分布を示す。図 15 に周囲媒質温度を一定にして、ビオ数を変化させた場合(表 2-6~表 2-10)の最大応力が生ずる上端面中心での応力の時間変化を示す。応力はビオ数の増加とともに大きくなり、 $\nu=0.1$ の近くで最大となることがわかる。

数値計算において、

表 2 材料定数

	ρ_0	T_1	T_2	T_3	B_1	B_2	B_3
2-1	1.0	1.0	1.5	0.5	0.1	0.15	0.05
2-2	1.0	1.0	2.0	2.0	0.1	0.1	0.1
2-3	1.0	1.0	2.0	1.0	0.1	0.1	0.1
2-4	1.0	1.0	0.5	0.5	0.1	0.1	0.1
2-5	1.0	1.0	1.0	0.5	0.1	0.1	0.1
2-6	1.0	1.0	1.0	1.0	0.1	0.1	0.1
2-7	1.0	1.0	1.0	1.0	0.1	0.5	0.1
2-8	1.0	1.0	1.0	1.0	0.1	0.5	0.5
2-9	1.0	1.0	1.0	1.0	0.1	1.0	0.1
2-10	1.0	1.0	1.0	1.0	0.1	1.0	0.5

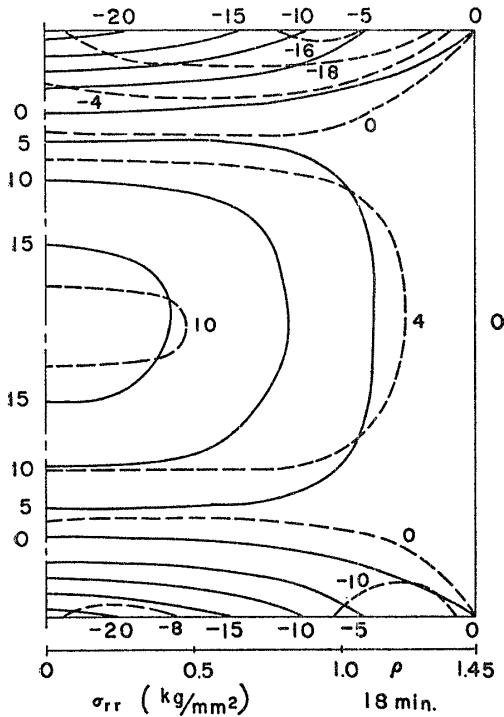


図 6 半径応力分布

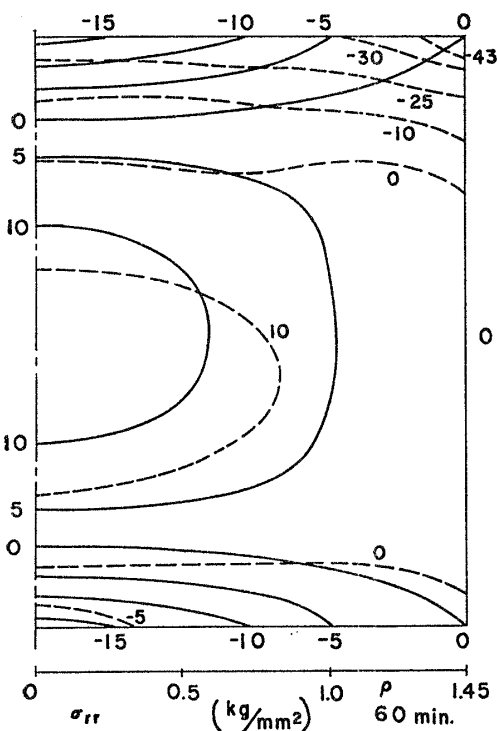


図 7 半径応力分布

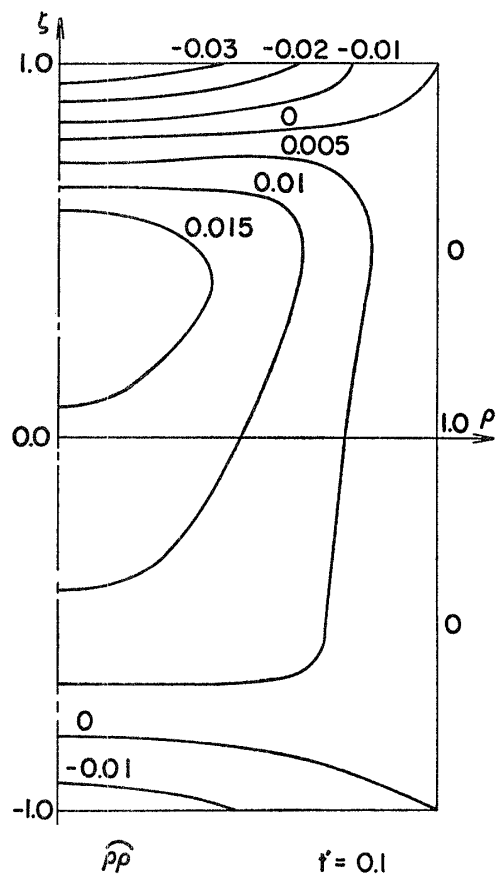


図 8 半径応力分布

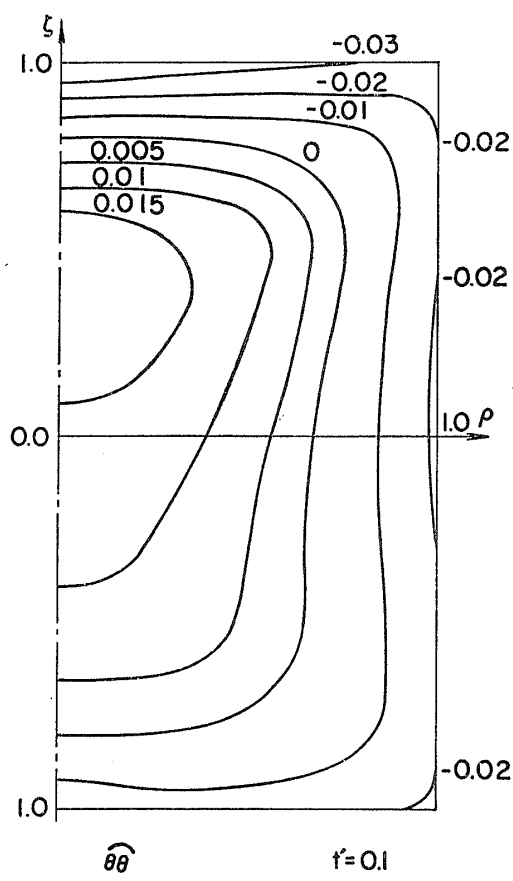


図 9 円周応力分布

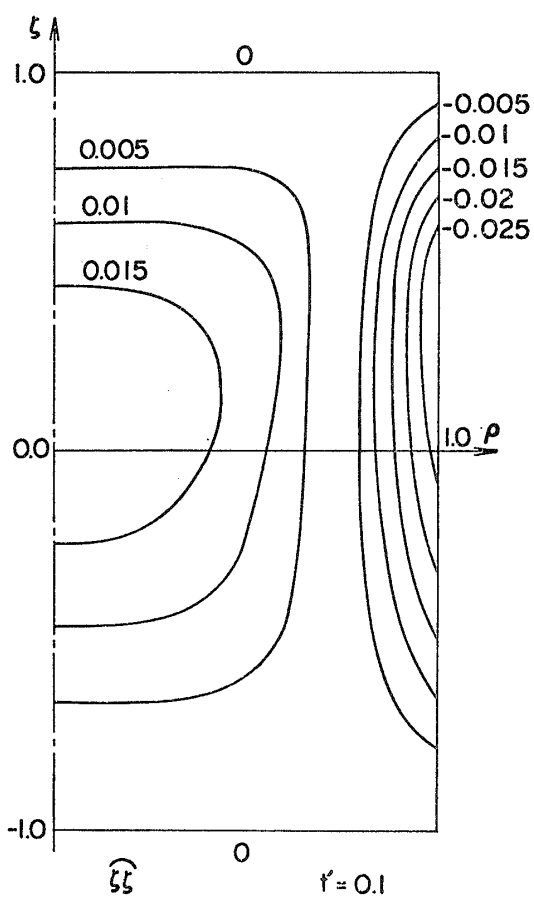


図 10 軸応力分布

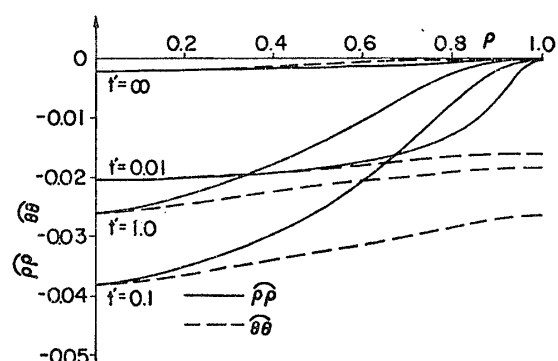


図 11 上端面における半径応力と円周応力分布

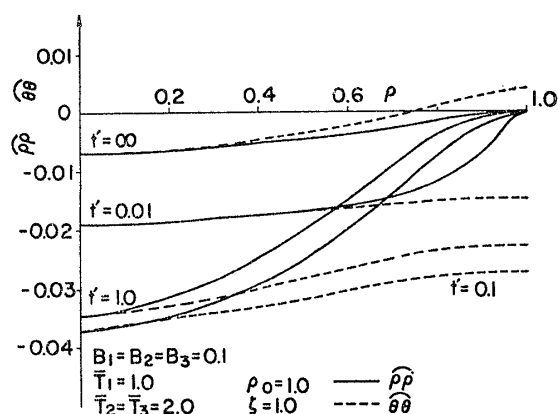


図 12 上端面における半径応力と円周応力分布

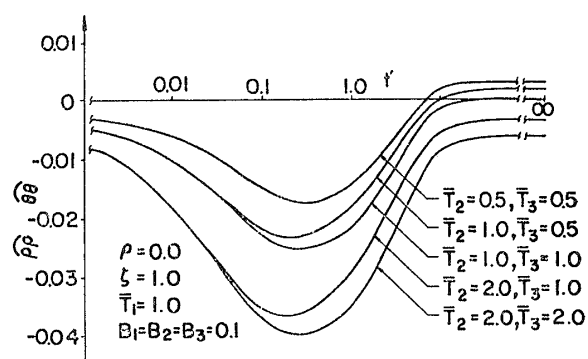


図 13 上端面中心における半径応力と円周応力の時間変化

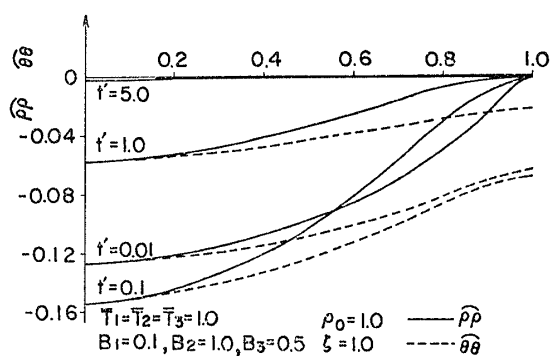


図 14 上端面における半径応力と円周応力分布

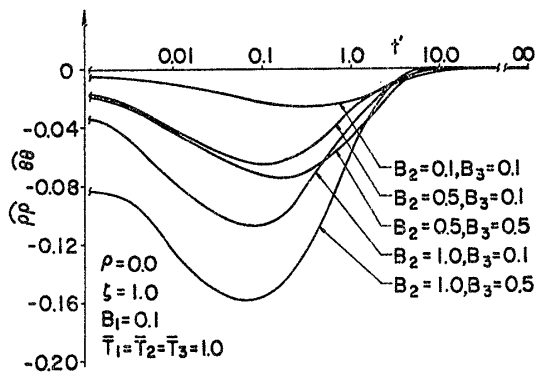


図 15 上端面中心における半径応力と円周応力の時間変化

$$\sum_{s=1}^{\infty}, \sum_{k=1}^{\infty}, \sum_{m=1}^{\infty}, \sum_{n=1}^{\infty}, \sum_{j=1}^{\infty}$$

を

$$\sum_{s=1}^{20}, \sum_{k=1}^{20}, \sum_{m=1}^{20}, \sum_{n=1}^{15}, \sum_{j=1}^{15}$$

で近似して計算を実行した。解の精度はフーリエ数、伝熱の条件、境界上の位置により異なるが、 $t'=\infty$ 、表 2-1 のとき、零でなければならぬ境界上の各応力成分は最大応力に対し、最大残余応力は、

$$(\hat{\rho\rho})_{\rho=\rho_0}=8\%, \quad (\hat{\rho\zeta})_{\rho=\rho_0}=0.8 \times 10^{-3}\%$$

$$(\hat{\zeta\zeta})_{\zeta=\pm 1}=8\%, \quad (\hat{\rho\zeta})_{\zeta=\pm 1}=0.9 \times 10^{-3}\%$$

程度の値を持つ。よって境界条件はほぼ満足していると考えられる。

4. 結 論

周囲媒質から加熱される短円柱鋼塊の非定常熱応力の理論解析を行って、松永ら⁽⁶⁾の実験値、松永⁽⁷⁾の差分解析と比較検討し、各種伝熱条件に対し数値計算を行い次の結論を得た。

(1) 本解析結果は松永の実験値と比較的一致し、松永らの差分解析とも短い時間内では比較的一致した。また、本解析値は時間がかかり経過しても境界条件を満足した。

(2) ビオ数を一定にした場合、周囲媒質温度の増加にもなるとともに応力は大きくなり、また $t'=0.1$ の近くの加熱面中心で最大の圧縮応力が生ずる。

(3) 周囲媒質温度を一定にした場合、ビオ数の増加にもなるとともに応力は大きくなり、また $t'=0.1$ の近くの加熱面中心で最大の圧縮応力が生ずる。

文 献

- (1) 小泉, 機論, 30-218 (昭 39-10), 1183.
- (2) Valentin, R. A. and Carey, J. J., *Nucl. Engng. & Design*, 12-3 (1970-6), 277.
- (3) 野田・ほか 2 名, 機論, 43-365 (昭 52-1), 38.
- (4) Noda, N. and Takeuti, Y., *Theoretical and Applied Mechanics*, 25 (1977), 637.
- (5) 菅野・ほか 2 名, 機論, 45-390, A (昭 54-2), 161.
- (6) 松永・ほか 2 名, 住友金属, 19-2 (昭 42-4), 156.
- (7) 松永, 機論, 32-240 (昭 41-8), 1223.

討 論

〔質問〕 関根英樹 (東北大学工学部)

(1) 図 15 に関して「応力はビオ数の増加とともに大きくなり…」とあるが図においてフーリエ数 t' が大きい場合逆の傾向が見られる。この t' が大きい場合の傾向は正しいと考えてよろしいのか。

(2) コンピュータによるぼう大な数値計算を要する仕事であり、解の精度を上げることはかなり難しい問題と思う。各無限級数の収束性についてご検討されていたならお教え願いたい。

〔回答〕 (1) これは最大応力が生じるフーリエ数 t' について論じたものであり、解の精度内で正しいと考える。

(2) 各無限級数の収束性はフーリエ数、伝熱の条件、位置により異なり、すべての場合について収束性を検討することは膨大な計算を要するので、境界条件が本文中程度になるように各無限級数の上限を定めた。

〔質問〕 菅野良弘 (大阪府立大学工学部)

鋼塊を加熱炉にて加熱する場合に鋼塊内に生じる温度、熱応力を三次元熱弾性論の立場から解析された有益なご研究に敬意を表す。

(1) 式 (25), (27) のせん断応力 $\rho\zeta$ に関する境界条件式から未知係数に関する条件式を得る際に用いられた展開式が開区間で満足されていることを考慮しても、この短円柱のコーナ $\rho=\rho_0$, $\zeta=\pm 1$ におけるせん断応力 = 0 の条件は満足されているか。

(2) 有限板の第 3 種熱的境界条件のもとでの温度、熱応力を差分法で解析した質問者の経験によると、領域内に約 150 の格子点をとって解析された温度、熱応力と約 60 の格子点をとって得た温度、熱応力は、それぞれ厳密解と約 2% および 5% 程度の誤差をもって一致したが、図 5, 6 において差分解析と本解析解との差が相当大きいのは差分解析のメッシュのあらかし以外に何か問題点はないか。

(3) 既報の差分解との比較という観点から用いられたと思うが, 表1の1-2場合において T_1 を 1642°C と大きな温度に設定されているが, この温度の鋼塊の降伏応力を考えると図7の応力分布を有する鋼塊には塑性域は生じていないか.

[回答] (1) 本文中に述べたように, 最大応力に対し $(\hat{\rho}\zeta)_{\zeta=\pm\zeta_1} = 0.9 \times 10^{-3}\%$ の値を持つ. この値は $0 \leq \rho \leq 1$ の範囲の一番精度の悪い値であるので,

$(\hat{\rho}\zeta)_{\rho=1, \zeta=\pm\zeta_1} = 0$ の条件は満足していると考えられる.

(2) 質問者の差分解の形状, 境界条件等の詳細が不明なのでなんともいえないが, 本解析と比較した差分解の熱的条件が複雑であるから, メッシュの粗さが, 誤差の第一義的な原因と思われる.

(3) 図7の応力分布からして塑性域は生じていないと考える.