

612 特性曲線法による一般化された熱弾性問題の二次元解析

Two-dimensional analysis of generalized thermoelasticity by the method of characteristics

○須見 尚文 (静岡大・教育), 野田 直剛 (静岡大・工)

Naobumi SUMI, Shizuoka University, Ooya 836, Shizuoka 422-8529

Naotake NODA, Shizuoka university, Jhohoku 3, Hamamatsu 432-8561

This paper is concerned with the two-dimensional thermal and thermal stress waves in finite elastic plates subjected to the impulsive heating. The formulation of the problem is based on the generalized theory of thermoelasticity, and the solutions are obtained by using the method of bicharacteristics and the explicit finite difference methods. Numerical calculations are carried out for finite elastic plates subjected to the local ramp-type heating on the surface of the plate.

Key Words : Thermal and Thermal Stress Waves, Generalized Thermoelasticity, Finite Elastic Plate, Bicharacteristic Method

1. 緒言

本論文では、超高速レーザなどの照射・吸収を受けて衝撃的に加熱を受ける有限平板に生じる熱波と熱応力波を、LordとShulmanによる一般化された熱弾性理論により定式化し、これを(従)特性曲線法と差分法を用いて数値解析する解法を示す。表面を局部的にランプ加熱される有限平板に対する数値計算を行うことにより、平板形状や加熱条件が二次元の熱波と熱応力波の伝ば挙動に及ぼす影響を明らかにする。

2. 解析

LordとShulmanによる一般化された熱弾性理論によれば、二次元動的熱応力問題に対する基礎式は

(1) 運動方程式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx,x} + \sigma_{zx,z} &= \rho U_{,t} \\ \sigma_{zx,x} + \sigma_{zz,z} &= \rho W_{,t} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

(2) 応力-ひずみ-温度の関係式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx,t} &= (\lambda + 2\mu)U_{,x} + \lambda W_{,z} - \beta T_{,t} \\ \sigma_{zz,t} &= \lambda U_{,x} + (\lambda + 2\mu)W_{,z} - \beta T_{,t} \\ \sigma_{zx,t} &= \mu(W_{,x} + U_{,z}) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

(3) 修正されたフーリエの法則

$$\left. \begin{aligned} \tau q_{x,t} + q_x &= -kT_{,x} \\ \tau q_{z,t} + q_z &= -kT_{,z} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(4) 熱エネルギーの釣り合い式

$$q_{x,x} + q_{z,z} + T_0\beta(U_{,x} + W_{,z}) + \rho c_v T_{,t} = Q \quad (4)$$

ただし、コンマ(,)に続く添字はその添字変数に関する偏微分を表す。また、 $\beta = (\lambda + 2\mu)\alpha$ である。

式(1)～(4)は応力($\sigma_{xx}, \sigma_{zz}, \sigma_{zx}$)、粒子速度(U, W)、温度(T)および熱流速(q_x, q_z)に関する8元連立1階偏微分方程式であり、双曲型である。基礎式が双曲型偏微分方程式で与えられる場合には従特性曲線法が有効である。この場合の特性曲面は、図1に示すように点(t_0, x_0, z_0)を頂点とする3種類の円すい面となる。これらの円すい面の母線が従特性曲線であり、 α をパラメータとすれば

$$\left. \begin{aligned} x - x_0 &= c_i(t - t_0) \cos \alpha \\ z - z_0 &= c_i(t - t_0) \sin \alpha \end{aligned} \right\}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5)$$

ここで、 $c_i, (i = 1 \sim 3)$ は

$$\left\{ \begin{aligned} c_1^2 \\ c_2^2 \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\kappa}{\tau} + c_L^2 + \delta c_L^2 \right) \pm \sqrt{\left(\frac{\kappa}{\tau} + c_L^2 + \delta c_L^2 \right)^2 - 4 \frac{\kappa c_L^2}{\tau}} \right] \quad (6)$$

$$c_3^2 = \mu/\rho \quad (7)$$

ただし、

$$\kappa = \frac{k}{\rho c_v}, \quad c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad \delta = \frac{\beta^2 T_0}{\rho c_v (\lambda + 2\mu)} \quad (8)$$

対応する常微分方程式としての従特性曲線方程式は、 $c_j, (j = 1, 2)$ に沿って

$$\begin{aligned} &\rho D_j \cos \alpha dU + \rho D_j \sin \alpha dW + \frac{D_j}{c_j} \cos^2 \alpha d\sigma_{xx} \\ &+ \left(\frac{D_j}{c_j} \beta - \rho c_v \tau c_j \right) dT + \tau \cos \alpha dq_x + \tau \sin \alpha dq_z \\ &+ \frac{D_j}{c_j} \sin^2 \alpha d\sigma_{zz} + \frac{D_j}{c_j} \sin 2\alpha d\sigma_{zx} = S_j(\alpha) dt \end{aligned} \quad (9)$$

c_3 に沿って

$$-\rho c_3 \sin \alpha dU + \rho c_3 \cos \alpha dW - \frac{1}{2} \sin 2\alpha d\sigma_{xx} + \frac{1}{2} \sin 2\alpha d\sigma_{zz} + \cos 2\alpha d\sigma_{zx} = S_3(\alpha) dt \quad (10)$$

ただし、

$$D_j = \frac{T_0 \beta}{\rho c_j^2 - (\lambda + 2\mu)} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} S_j(\alpha) = & \frac{D_j}{2} \sin \alpha \sin 2\alpha (\sigma_{xx,x} - \sigma_{zz,x}) \\ & - \frac{D_j}{2} \cos \alpha \sin 2\alpha (\sigma_{xx,z} - \sigma_{zz,z}) \\ & + D_j \cos \alpha \cos 2\alpha \sigma_{zx,x} - D_j \sin \alpha \cos 2\alpha \sigma_{zx,x} \\ & + \left[\frac{D_j}{c_j} \{ \lambda + (2\mu - \rho c_j^2) \cos^2 \alpha \} + T_0 \beta \tau c_j \right] U_{,x} \\ & + \left[\frac{D_j}{c_j} \{ \lambda + (2\mu - \rho c_j^2) \sin^2 \alpha \} + T_0 \beta \tau c_j \right] W_{,z} \\ & + \frac{D_j}{2c_j} \sin 2\alpha (2\mu - \rho c_j^2) (U_{,z} + W_{,x}) - \tau c_j Q \\ & - (D_j \beta - \rho c_v \tau c_j^2 + k) \cos \alpha T_{,x} + \tau c_j \sin^2 \alpha q_{x,x} \\ & - (D_j \beta - \rho c_v \tau c_j^2 + k) \sin \alpha T_{,z} + \tau c_j \cos^2 \alpha q_{z,z} \\ & - \frac{1}{2} \tau c_j \sin 2\alpha (q_{x,z} + q_{z,x}) - \cos \alpha q_x - \sin \alpha q_z \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3(\alpha) = & -c_3 \sin^3 \alpha d\sigma_{xx,x} + c_3 \cos^3 \alpha d\sigma_{zz,z} \\ & + c_3 \sin 2\alpha \left\{ \frac{1}{2} (\sin \alpha \sigma_{xx,z} - \cos \alpha \sigma_{zz,x}) \right. \\ & \left. + (\sin \alpha \sigma_{zx,x} - \cos \alpha \sigma_{zx,z}) \right\} \\ & - \frac{1}{2} \mu \sin 2\alpha (U_{,x} - W_{,z}) \\ & + \mu (\cos^2 \alpha U_{,z} - \sin^2 \alpha W_{,x}) \quad (13) \end{aligned}$$

3. 数値計算

数値計算のための差分方程式の誘導は以下の通りである。一般に、従特性曲線に沿って未知関数 $F(U, W, \sigma_{xx}, \sigma_{zz}, \sigma_{zx}, T, q_x, q_z)$ は常微分関係 $dF = S(\alpha) dt$ と表される。いま、時間増分を η として、 $\alpha = \alpha_i$ である従特性曲線に沿って $t = t_0 - \eta$ 平面上の点 i から $t = t_0$ 平面上の点 O まで積分すれば

$$\delta F = \frac{\eta}{2} [S^O + S_i] - (F_0 - F_i) + O(\eta^3) \quad (14)$$

ここで、 $\delta F = F^O - F_0$ 、すなわち関数 F の時間増分である。また、上添字 O 、下添字 $0, i$ はそれぞれ点 $O(t_0, x_0, z_0)$ 、点 $0(t_0 - \eta, x_0, z_0)$ 、点 $i(t_0 - \eta, x_i, z_i)$ における関数値を表す。このとき、 $\alpha_i = (i - 1)\pi/2, (i = 1 \sim 4)$ とする従特性曲線に沿って式(9),(10)を積分すれば12個の式が得られ、式(1)~(4)を時間軸に沿って点 0 から点 O まで積分すれば8個の式が得られる。これら合計20個の式

を連立させて、関数 S^O に含まれる未知関数の偏導関数 $F_{,x}^O, F_{,z}^O$ を消去し、 $O(\eta^3)$ の高次の微小項を省略すれば、点 $O(t_0, x_0, z_0)$ における未知量は $t = t_0 - \eta$ 平面上の隣接する格子点での既知量より差分方程式の解として求められる。

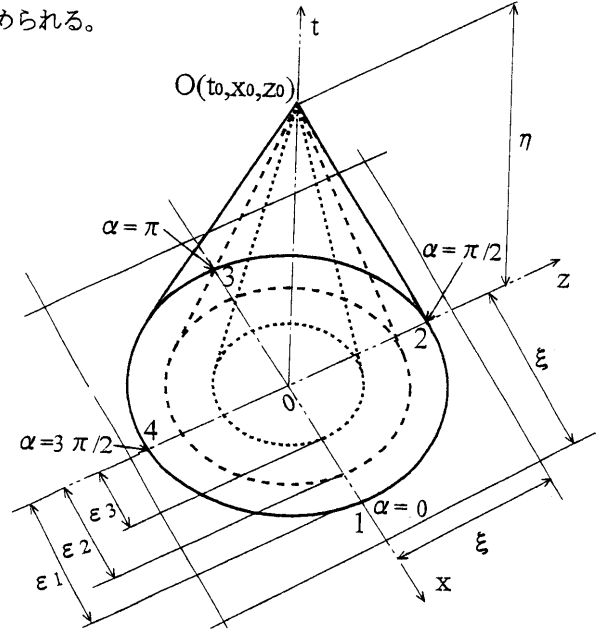


Fig.1 Characteristic cones for the problems

数値計算例として、6061アルミニウム合金の物性値を用い、表面上の $|x| \leq c$ を局部的にランプ加熱される幅 $2a$ 、厚さ b の有限平板(図2)の熱波と熱応力波を求めた。図3に $x^* = 0, 2$ 上の各点 z^* での σ_{zz} の時間的変動を示す。

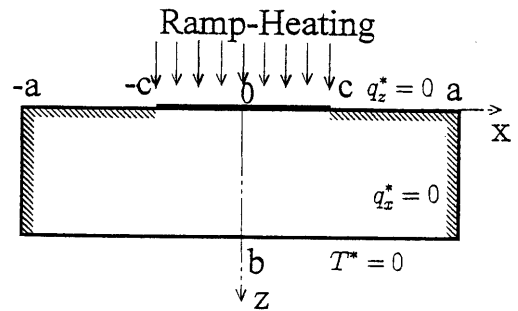


Fig.2 Finite plate subjected to local ramp-type heating on the surface of the plate

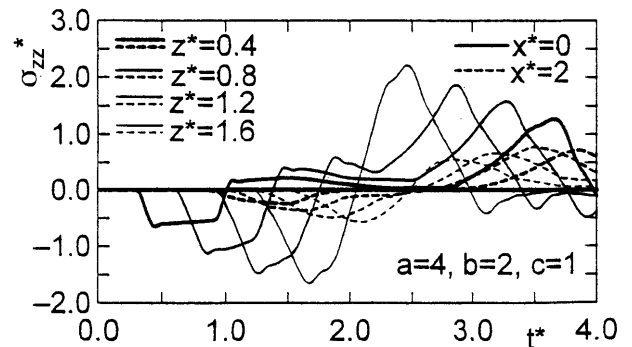


Fig.3 Time variations of σ_{zz}^*