

半無限体の一般化された熱弾性問題*

古川 俊雄*¹, 野田 直剛*², 芦田 文博*³Generalized Thermoelasticity for a Half-Space Including
Two Different Theories

Toshio FURUKAWA, Naotake NODA and Fumihiko ASHIDA

One-dimensional, generalized thermoelasticity is presented based on Lord and Shulman's theory and Green and Lindsay's theory. The former theory involves one relaxation time of the thermoelastic process, and the latter involves two relaxation times. These theories have been developed in an attempt to eliminate the paradox of an infinite velocity of thermoelastic propagation inherent in the classical theory. A formulation of generalized thermoelasticity which combines both theories is derived. The generalized thermoelastic problems for a half-space are analyzed by means of Laplace transform technique. An approximate analysis for short periods of time is carried out because the effects of relaxation times are short-lived. The numerical results of the effect of the relaxation time on temperature and stress distributions are shown. And we point out the mistakes of the previous papers by Dhaliwal et al.

Key Words: Elasticity, Thermal Stress, Generalized Thermoelasticity, Lord and Shulman's Theory, Green and Lindsay's Theory, Relaxation Time, Half-Space, Short-Time Solution

1. 結 言

古典線形熱弾性理論では、熱波速度が無限大であるため、熱的かく乱を受けた瞬間にその影響が無限遠方にも生じることになり、物理的経験に矛盾している。近年、緩和時間を考慮することにより、熱波速度を有限とした熱弾性理論の一般化が、Lord-Shulman⁽¹⁾とGreen-Lindsay⁽²⁾によって別の観点から行われた。現在まで両理論(L-S理論、G-L理論)に対して、基本的な考察、例えば、解の唯一性、存在定理などについて数多くの研究が報告されている。しかし、これらの理論を用いて理論解析を行い、熱波が温度や熱応力に具体的にどのように影響するかを検討した研究報告は少ないようである。

著者らはこれまでに、それぞれの一般化された理論に基づいて円柱穴を有する無限体の一次元問題の理論解析を行った⁽³⁾⁽⁴⁾。その結果、どちらの理論に対してもほとんど同一の解析を行えることがわかったので、次

に前報を発展させて有限領域を有する円柱の一次元問題を二つの理論に基づいて解析を行った⁽⁵⁾。

半無限体に対しては、L-S理論に基づくDhaliwalらの解析⁽⁶⁾があるが、その数値結果には疑問の余地がある。そこで本論文では半無限体に対して前報と同様の解析を行ったのでその結果について報告する。なお、ごく最近DhaliwalらがG-L理論に基づく解析結果⁽⁷⁾を報告しているが、その数値結果にも同様の問題点を含んでいる。

2. 解 析

一般化された熱弾性には現在、Lord-Shulmanの理論(L-S理論：緩和時間一つ)とGreen-Lindsayの理論(G-L理論：緩和時間二つ)の相異なる理論がある。等方等質の線形熱弾性体に対する基礎方程式系は、以下ようになる。

ひずみ-変位関係式：

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \dots\dots\dots (1)$$

運動方程式：

$$\sigma_{ij,j} = \rho u_{i,t} \dots\dots\dots (2)$$

応力-ひずみ-温度関係式：

(L-S理論)

* 平成元年8月25日 東北支部盛岡地方講演会において講演、原稿受付 平成2年1月5日。

*¹ 正員、福井大学工学部 (〒910 福井市文京3-9-1) (現、京都工芸繊維大学工学部)。

*² 正員、静岡大学工学部 (〒432 浜松市城北3-5-1)。

*³ 正員、津山工業高等専門学校 (〒708 津山市沼624-1)。

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda e_{kk} \delta_{ij} - \gamma T \delta_{ij} \quad \dots\dots\dots (3 \cdot a)$$

(G-L 理論)

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda e_{kk} \delta_{ij} - \gamma(T + t_1 T_{,t}) \delta_{ij} \quad \dots\dots (3 \cdot b)$$

熱伝導方程式:

(L-S 理論)

$$kT_{,ii} = \rho c(T + t_0^* T_{,t})_{,t} + \gamma \tilde{T}(e_{kk} + t_0 e_{kk,t})_{,t} \quad \dots\dots\dots (4 \cdot a)$$

(G-L 理論)

$$kT_{,ii} = \rho c(T + t_0 T_{,t})_{,t} + \gamma \tilde{T} e_{kk,t} \quad \dots\dots\dots (4 \cdot b)$$

ただし,

$$\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha \quad \dots\dots\dots (5)$$

であり, e_{ij}, u_i, σ_{ij} はそれぞれ, ひずみ成分, 変位成分および応力成分である。一方, ρ, λ と μ, α, k, c はそれぞれ, 密度, ラーメの定数, 熱膨張係数, 熱伝導率および定積比熱である。また, t は時間であり, t_0^*, t_0, t_1 は緩和時間, \tilde{T} は基準絶対温度である。さらに, コマはそれに続く変数による微分を表す。

緩和時間は次式の不等式に従う,

$$t_0^* \geq 0, t_1 \geq t_0 \geq 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

もし式(1)~(4)で, $t_0^* = t_0 = t_1 = 0$ とおくと, 古典線形熱弾性理論の基礎方程式系と一致する。

L-S 理論のとき, 緩和時間 t_0^* を G-L 理論の t_0 で代用し, t_1 を零とする。また, クロネッカのデルタ δ_{ik} を導入する(添字 k は緩和時間の数を表す) と,

(L-S 理論)

$$\delta_{ik} = 1, t_1 = 0 \quad \dots\dots\dots (7 \cdot a)$$

(G-L 理論)

$$\delta_{ik} = 0 \quad \dots\dots\dots (7 \cdot b)$$

となるので, 両理論で異なる二式(3), (4)はそれぞれ次式のように一つの式にまとめることができる。

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda e_{kk} \delta_{ij} - \gamma(T + t_1 T_{,t}) \delta_{ij} \quad \dots\dots (8)$$

$$kT_{,ii} = \rho c(T + t_0 T_{,t})_{,t} + \gamma \tilde{T}(e_{kk} + \delta_{ik} t_0 e_{kk,t})_{,t} \quad \dots\dots\dots (9)$$

式(7・a), (7・b)から次の関係が導かれる,

$$\delta_{ik} t_1 = 0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

半無限体の一次元問題を考え, 変位成分を

$$u_x = u(x, t), u_y = u_z = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

で表すと, 式(2), (8), (9)は次のようになる,

$$\rho u_{,tt} = (\lambda + 2\mu) u_{,xx} - \gamma(T + t_1 T_{,t})_{,x} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$kT_{,xx} = \rho c(T + t_0 T_{,t})_{,t} + \gamma \tilde{T}(u_{,x} + \delta_{ik} t_0 u_{,xt})_{,t} \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu \\ \lambda \end{bmatrix} u_{,x} - \gamma(T + t_1 T_{,t}) \quad \dots\dots (14)$$

次に, 無次元量

$$X = \frac{v}{x} x, \tau = \frac{v^2}{x} t, \theta = \frac{T}{T_0}, U = \frac{v}{x} u \quad \left\{ \right.$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_0 &= \frac{v^2}{x} t_0, \tau_1 = \frac{v^2}{x} t_1, \beta = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \\ \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \end{bmatrix} &= \frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \end{bmatrix}, b = \frac{\gamma \tilde{T}}{\mu}, g = \frac{\gamma}{\rho c} \end{aligned} \right\} \dots (15)$$

を導入する。ただし, v は縦波の伝ば速度, x は温度伝導率であり, 次式で与えられるものである。

$$v = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right)^{1/2}, x = \frac{k}{\rho c} \quad \dots\dots\dots (16)$$

式(15)を用いて式(12)~(14)を無次元化し, 初期条件

$$\tau = 0; u = u_{,x} = 0, \theta = \theta_{,x} = 0 \quad \dots\dots\dots (17)$$

の下でラプラス変換すると, 次式が得られる,

$$\beta p^2 U^* = \beta U_{,xx}^* - b(1 + \tau_1 p) \theta^* \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$\theta_{,xx}^* = p(1 + \tau_0 p) \theta^* + gp(1 + \delta_{ik} \tau_0 p) U_{,x}^* \quad \dots\dots (19)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx}^* \\ \sigma_{yy}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \beta - 2 \end{bmatrix} U_{,x}^* - b(1 + \tau_1 p) \theta^* \quad \dots\dots (20)$$

ただし, p は変換パラメータである。

式(10)の関係を用いると, 式(18), (19)から

$$U_{,xxx}^* - (B_0 p + B_1) p U_{,xx}^* + (1 + \tau_0 p) p^3 U^* = 0 \quad \dots\dots\dots (21)$$

が得られる。ただし,

$$B_0 = 1 + \tau_0 + \delta(\delta_{ik} \tau_0 + \tau_1), B_1 = 1 + \delta \quad \dots\dots\dots (22)$$

であり, $\delta = bg/\beta$ (連成係数) である。

式(18)の一般解は, 無限遠で変位零を考慮すると,

$$U^* = A_1 \exp(-k_1 X) + A_2 \exp(-k_2 X) \quad \dots (23)$$

となる。ただし, A_1, A_2 は未定定数, k_1, k_2 は次式の超越方程式の正根である。

$$k^4 - (B_0 p + B_1) p k^2 + (1 + \tau_0 p) p^3 = 0 \quad \dots\dots\dots (24)$$

これから, 温度, 応力を求めると次式のようにになる,

$$\theta^* = -\frac{\beta}{b(1 + \tau_1 p)} \left[(k_1^2 - p^2) \frac{A_1}{k_1} \exp(-k_1 X) + (k_2^2 - p^2) \frac{A_2}{k_2} \exp(-k_2 X) \right] \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$\sigma_{xx}^* = -\beta p^2 \left[\frac{A_1}{k_1} \exp(-k_1 X) + \frac{A_2}{k_2} \exp(-k_2 X) \right] \quad \dots\dots\dots (26)$$

ただし, Y 方向応力の式は省略した。

境界条件として, 境界面温度が時間 $\tau = 0$ の瞬間に一定温度に上昇し, 外力は作用しない場合を考えると,

$$X = 0; \theta = H(\tau), \sigma_{xx} = 0 \quad \dots\dots\dots (27)$$

となる。ただし $H(\tau)$ はヘビサイドの階段関数である。

式(27)を用いて未定定数 A_1, A_2 が求められる。これから短時間解を求めることにする。式(24)から次式を得ることができる。

$$k_i^2 = a_{i0}^2 p^2 \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} p^{-j} \right) \quad \dots\dots\dots (28)$$

$$k_i = a_{i0} p \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} a_{2ij} p^{-j} \right) \quad \dots\dots\dots (29)$$

ただし, a_{i0}, a_{1i}, a_{2i} ($i=1, 2; j=1, 2, \dots$) は定数である。最初の3項を示すと以下ようになる。

$$a_{i0} = \left\{ \frac{1}{2} [B_0 + (-1)^{i-1} C_0] \right\}^{1/2}$$

$$a_{1i1} = [B_1 + (-1)^{i-1} C_1] / 2a_{i0}^2$$

$$a_{1i2} = (-1)^{i-1} C_2 / 2a_{i0}^2$$

$$a_{1i3} = (-1)^{i-1} C_3 / 2a_{i0}^2$$

$$a_{2i1} = \frac{1}{2} a_{1i1}$$

$$a_{2i2} = -\frac{1}{8} (a_{1i1}^2 - 4a_{1i2})$$

$$a_{2i3} = \frac{1}{2} (a_{1i3} - a_{1i1} a_{2i2})$$

$$C_0 = (B_0^2 - 4\tau_0)^{1/2}$$

$$C_1 = (B_0 B_1 - 2) / C_0$$

$$C_2 = 2(B_0 B_1 - \tau_0 B_1^2 - 1) / C_0^3$$

$$C_3 = -C_1 C_2 / C_0$$

式(29)から次式が得られる。

$$\exp(-k_i X) = \exp(-a_{i0} X p) \times \exp(-a_{i0} a_{2i1} X) \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} b_{Xij} p^{-j} \right) \dots (30)$$

ただし, b_{Xij} ($j=1, 2, \dots$) は X の関数であり, 最初の3項を示すと以下ようになる。

$$b_{X11} = -a_{i0} a_{2i2} X$$

$$b_{X12} = -a_{i0} X (a_{2i3} - \frac{1}{2} a_{i0} a_{2i2}^2 X)$$

$$b_{X13} = a_{i0}^2 a_{2i2} X^2 (a_{2i3} - \frac{1}{6} a_{i0} a_{2i2}^2 X)$$

これらの式をもとにして, ラプラス像空間における変位, 温度ならびに応力を求めることができる。ラプラス逆変換を行い, 原空間における変位, 温度および応力を表すと次式のようなになる。

$$U = -\frac{b}{\beta} [g_{11}(\tau_{a1}) - g_{12}(\tau_{a2})] \dots (31)$$

$$\theta = g_{21}(\tau_{a1}) - g_{22}(\tau_{a2}) \dots (32)$$

$$\sigma_{XX} = b [g_{31}(\tau_{a1}) - g_{32}(\tau_{a2})] \dots (33 \cdot a)$$

$$\sigma_{YY} = \sigma_{XX} - \frac{2b}{\beta} [g_{41}(\tau_{a1}) - g_{42}(\tau_{a2})] \dots (33 \cdot b)$$

ただし,

$$\tau_{ai} = \tau - a_{i0} X \dots (34)$$

であり, 関数 $g_{ji}(\tau_{ai})$, ($i=1, 2; j=1, \dots, 4$) の具体形を級数展開項数を4項とした場合で示すと,

$$g_{1i}(\tau_{ai}) = \frac{a_{0i}}{C_0} X_{ei} H(\tau_{ai}) \left\{ \tau_1 + \tau_{ai} + \tau_{ai} \left(\tau_1 + \frac{1}{2} \tau_{ai} \right) (b_{X11} + d_1 + a_{2i1}) + \frac{1}{2} \tau_{ai}^2 \left(\tau_1 + \frac{1}{3} \tau_{ai} \right) [b_{X12} + (d_1 + a_{2i1}) b_{X11} + d_2 + a_{2i1} d_1 + a_{2i2}] + \frac{1}{6} \tau_{ai}^3 \left(\tau_1 + \frac{1}{4} \tau_{ai} \right) [b_{X13} + (d_1 + a_{2i1}) b_{X12} + (d_2 + a_{2i1} d_1 + a_{2i2}) b_{X11} + d_3 + a_{2i1} d_2 + a_{2i2} d_1 + a_{2i3}] \right\}$$

$$g_{2i}(\tau_{ai}) = \frac{1}{C_0} X_{ei} H(\tau_{ai}) \left\{ b_i + \tau_{ai} [b_i (b_{X11} + d_1) + a_{i0}^2 a_{1i1}] + \frac{1}{2} \tau_{ai}^2 [b_i b_{X12} + (b_i d_1 + a_{i0}^2 a_{1i1}) b_{X11} + b_i d_2 + a_{i0}^2 (a_{1i1} d_1 + a_{1i2})] + \frac{1}{6} \tau_{ai}^3 [b_i b_{X13} + (b_i d_1 + a_{i0}^2 a_{1i1}) b_{X12} + [b_i d_2 + a_{i0}^2 (a_{1i1} d_1 + a_{1i2})] b_{X11} + b_i d_3 + a_{i0}^2 (a_{1i1} d_2 + a_{1i2} d_1 + a_{i0} a_{1i3})] \right\}$$

$$g_{3i}(\tau_{ai}) = \frac{1}{C_0} X_{ei} H(\tau_{ai}) \left[\tau_1 \delta(\tau_{ai}) + 1 + (\tau_1 + \tau_{ai}) (b_{X11} + d_1) + \tau_{ai} \left(\tau_1 + \frac{1}{2} \tau_{ai} \right) \times (b_{X12} + d_1 b_{X11} + d_2) + \frac{1}{2} \tau_{ai}^2 \left(\tau_1 + \frac{1}{3} \tau_{ai} \right) (b_{X13} + d_1 b_{X12} + d_2 b_{X11} + d_3) \right]$$

$$g_{4i}(\tau_{ai}) = \frac{a_{0i}^2}{C_0} X_{ei} H(\tau_{ai}) \left[\tau_1 \delta(\tau_{ai}) + 1 + (\tau_1 + \tau_{ai}) (b_{X11} + d_1 + a_{1i1}) + \tau_{ai} \left(\tau_1 + \frac{1}{2} \tau_{ai} \right) (b_{X12} + (d_1 + a_{1i1}) b_{X11} + d_2 + a_{1i1} d_1 + a_{1i2}) + \frac{1}{2} \tau_{ai}^2 \left(\tau_1 + \frac{1}{3} \tau_{ai} \right) [b_{X13} + (d_1 + a_{1i1}) b_{X12} + (d_2 + a_{1i1} d_1 + a_{1i2}) b_{X11} + d_3 + a_{1i1} d_2 + a_{1i2} d_1 + a_{1i3}] \right]$$

$$X_{ei} = \exp(-a_{i0} a_{2i0} X), \quad b_i = a_{i0}^2 - 1, \quad d_1 = -C_1 / C_0$$

$$d_2 = (C_1^2 - C_0 C_2) / C_0^2, \quad d_3 = -C_1 (C_1^2 - 3C_0 C_2) / C_0^3$$

3. 数値計算結果および考察

数値計算には、以下のデータを用いた。

連成係数： $\delta=0.0168$ (銅)

無次元時間： $\tau=0.005, 0.01, 0.05$

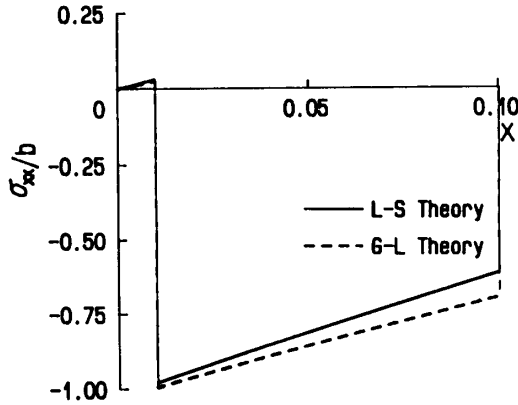


図 1 時間 $\tau=0.01$ の場合の X 方向応力分布に及ぼす二つの理論間の差異 (L-S 理論： $\tau_0=0.01$, G-L 理論： $\tau_0=\tau_1=0.01$)

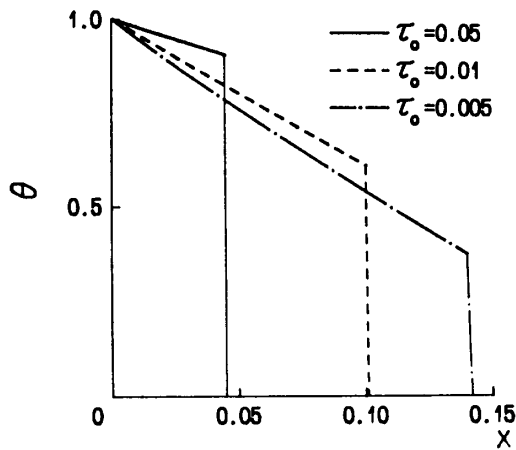


図 2 時間 $\tau=0.01$ の場合の温度分布に及ぼす緩和時間の影響 (L-S 理論： $\tau_0=0.005, 0.01, 0.05$)

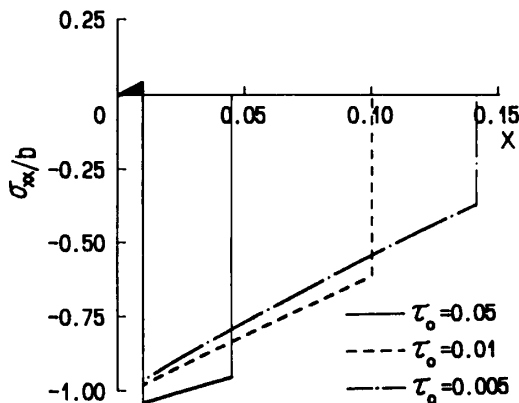


図 3 時間 $\tau=0.01$ の場合の X 方向応力分布に及ぼす緩和時間の影響 (L-S 理論： $\tau_0=0.005, 0.01, 0.05$)

(L-S 理論の場合)

無次元緩和時間： $\tau_0=0.005, 0.01, 0.05$

(G-L 理論の場合)

無次元緩和時間： $\tau_0=\tau_1=0.01$

また級数展開は第 4 項まで行った。

図 1 は無次元時間 $\tau=0.01$ の X 方向応力分布であり、実線は L-S 理論 ($\tau_0=0.01$)、破線は G-L 理論 ($\tau_0=\tau_1=0.01$) を表している。 X 方向応力は応力波と熱波の波頭位置でそれぞれ不連続となり、熱波の波頭より前方では初期状態と同じ零で物理的経験と合致する。応力波の波頭位置までは両理論間にほとんど差はないが、それから熱波の波頭位置までは G-L 理論は L-S 理論に比べて応力が大きくなるのがわかる。しかし前報⁽⁵⁾で示したほどの顕著な差は現れていない。これは境界条件の影響と考えられるが、今のところ定かではない。

なお温度分布は、G-L 理論で二つの緩和時間が等しいときは、L-S 理論の結果と等しくなる。

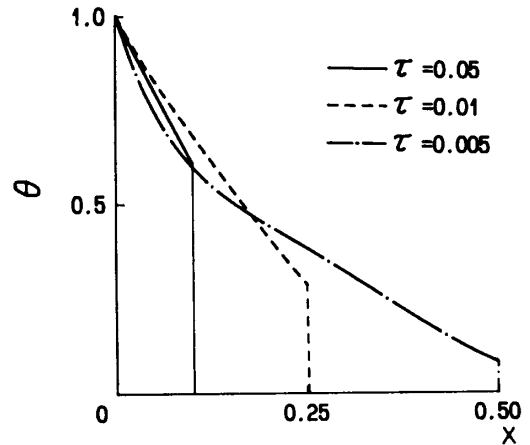


図 4 L-S 理論： $\tau_0=0.01$ の場合の温度分布の時間経過 (時間 $\tau=0.005, 0.01, 0.05$)

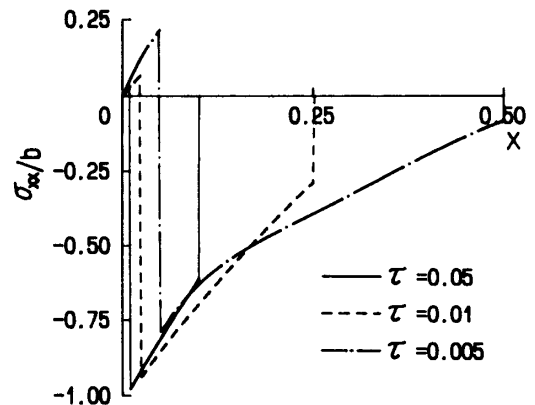


図 5 L-S 理論： $\tau_0=0.01$ の場合の X 方向応力分布の時間経過 (時間 $\tau=0.005, 0.01, 0.05$)

これから後は L-S 理論の結果について示す。

図 2, 3 はそれぞれ温度分布と X 方向応力分布に及ぼす緩和時間の影響を、時間 $t=0.01$ の場合について示したものである。緩和時間が小さいほど熱が内部に伝わりやすくなり、熱波の波頭位置における不連続量も小さくなる様子がわかる。Dhaliwal らの結果⁽⁶⁾では、温度分布は表面より少し内部で最大となり、加熱温度よりも高い箇所が生じているが、本計算結果ではそのようなことは生じず、内部にいくにつれて単調に減少しており、これまでの古典理論の結果と同様になっている。

図 4, 5 はそれぞれ緩和時間 $\tau_0=0.01$ の場合の温度分布と X 方向応力分布の時間経過を示したものである。この緩和時間に対応する熱波速度は約 10 であり、

それぞれの時間における熱波位置は、その時間を約 10 倍したところである。時間の経過とともに熱が内部に徐々に伝わり、内部の温度上昇の様子がわかる。

文 献

- (1) Lord, H. W. and Shulman, Y., *J. Mech. Phys. Solids*, **15** (1967), 299.
- (2) Green, A. E. and Lindsay, K. A., *J. Elastic.*, **2** (1972), 1.
- (3) 古川・ほか 2 名, 機論, **54-506**, A (1988), 1855.
- (4) 古川・ほか 2 名, 機論, **55-517**, A (1989), 1998.
- (5) 古川・ほか 2 名, 機論, **56-523**, A (1990), 631.
- (6) Sherief, H. H. and Dhaliwal, R. S., *J. Thermal Stresses*, **4** (1981), 421.
- (7) Dhaliwal, R. S. and Rokne, J. G., *J. Thermal Stresses*, **12** (1989), 259.