

内部き裂を有する傾斜機能平板の熱応力

Thermal Stress in a Functionally Graded Material Plate with a Griffith Crack

○学 福澤 充 (静岡大)

Mitsuru FUKUZAWA, Shizuoka University, Johoku 3-5-1, Hamamatsu

正 野田 直剛 (静岡大)

Naotake NODA, Shizuoka University

正 石原 正行 (静岡大)

Masayuki ISHIHARA, Shizuoka University

Key Words: functionally graded material, griffith crack, nonhomogeneous parameter, singular integral equation, thermal stresses

論文要旨

1. 緒言

熱応力緩和型傾斜機能材料(FGM)は超耐熱材料として、航空宇宙、原子力などの分野において注目を集めている。FGM 中にき裂がある場合、き裂まわりには応力集中が起こり破壊の原因となる事がある。そのため FGM のき裂問題を扱う事は重要であり、種々のき裂に対し解析が行なわれてきた。例えば、Jin と野田は一つの内部き裂を有する無限体¹⁾、半無限体²⁾、帯板³⁾の定常問題を、Wang は複数の内部き裂を有する無限体の定常問題⁴⁾を取り扱っている。

本論文では、両面の温度が位置の関数として規定された内部き裂をもつ FGM 平板の定常熱応力について解析を行う。き裂内部は断熱であるとし、物性値は板厚方向 y の指数関数と仮定した。温度、応力をフーリエ変換を用いて、特異積分方程式を解く問題に帰着させた。また、数値計算を行い、不均一パラメーターが温度、応力に及ぼす影響について調べた。

2. 解析モデル

図 1 に示すように長さ $2c$ のき裂を持つ無限平板を考える。き裂中心を直角座標 (x,y) の原点に取り、き裂位置は金属表面から a 、セラミクス表面から b の位置にあるとする。物性値は板厚方向 y のみに依存し、次式で表されるとする¹⁾。

$$E = E_0 e^{\beta y}, \quad \nu = \nu_0 (1 + \epsilon y) e^{\beta y}, \quad \alpha = \alpha_0 e^{\beta y}, \quad k = k_0 e^{\beta y} \quad (1)$$

ここで、 E はヤング率、 ν はポアソン比、 α は線膨張係数、 k は熱伝導率を表す。

温度条件としてセラミクス側に温度 $T_a f_0(x)$ を与え、金属表面は一定 T_b であり、き裂面は断熱とする。

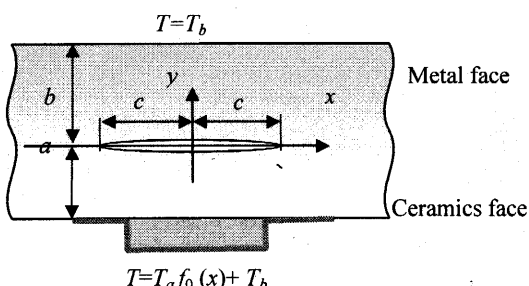


Fig.1 Analytical model

3. 温度解析

熱伝導率が式(1)で与えられる場合、定常熱伝導方程式は次式で表される。

$$\nabla^2 T + \delta \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

ここで

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (3)$$

熱的境界条件は次式で表せる。

$$\begin{aligned} T &= T_a f_0(x) + T_b, \quad y = -a, \quad |x| < \infty \\ T &= T_b, \quad y = b, \quad |x| < \infty \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= 0, \quad y = 0, \quad |x| < c \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} T(x, 0^+) &= T(x, 0^-), \quad |x| > c \\ \frac{\partial T(x, 0^+)}{\partial y} &= \frac{\partial T(x, 0^-)}{\partial y}, \quad |x| > c \end{aligned} \quad (5)$$

式(2), (4), (5)を $(T-T_b)/T_a$ と、き裂長さの半分の c を用いて無次元化し、支配方程式(2)にフーリエ変換、フーリエ逆変換を使い、式(4), (5)の境界条件を考慮すると温度は次式のように表せる。

$$\begin{aligned} T &= \int_{-\infty}^{\infty} D(\xi) (e^{-p_2 y} - e^{-2pb} e^{-p_1 y}) e^{-ix\xi} d\xi \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-p_2 y} - e^{-2pb} e^{-p_1 y}}{2\pi(e^{p_2 a} - e^{-2pb} e^{p_1 a})} \bar{f}_0(\xi) e^{-ix\xi} d\xi + T_b, \quad y > 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} T &= \int_{-\infty}^{\infty} D(\xi) \frac{p_2 - p_1 e^{-2pb}}{p_1 - p_2 e^{-2pa}} (e^{-p_1 y} - e^{-2pa} e^{-p_2 y}) e^{-ix\xi} d\xi \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-p_2 y} - e^{-2pb} e^{-p_1 y}}{2\pi(e^{p_2 a} - e^{-2pb} e^{p_1 a})} \bar{f}_0(\xi) e^{-ix\xi} d\xi + T_b, \quad y < 0 \end{aligned} \quad (7)$$

ここで

$$p = \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + \xi^2}, \quad p_1 = \frac{\delta}{2} - p, \quad p_2 = \frac{\delta}{2} + p \quad (8)$$

$$\bar{f}_0(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f_0(x) e^{ix\xi} dx \quad (9)$$

未知係数 $D(\xi)$ は境界条件式(4), (5)を考慮した特異積分方程式を解くことにより求められる。

3. 応力解析

エアリーの応力関数の基礎式は次式で表される¹⁾。

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 F - 2\beta \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 F) + \beta^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \\ + e^{(\beta+\gamma)y} \left(\nabla^2 T + 2\gamma \frac{\partial T}{\partial y} + \gamma^2 T \right) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

境界条件は

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} = \sigma_y = 0, \quad y = 0, |x| \leq 1 \\ \sigma_{xy} = \sigma_y = 0, \quad y = a, -b, |x| < \infty \\ \sigma_{\alpha\beta} \rightarrow 0, \quad x^2 + y^2 \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}(x, 0^+) = \sigma_{xy}(x, 0^-), \quad |x| < \infty \\ \sigma_y(x, 0^+) = \sigma_y(x, 0^-), \quad |x| < \infty \\ u(x, 0^+) = u(x, 0^-), \quad |x| < \infty \\ v(x, 0^+) = v(x, 0^-), \quad |x| < \infty \end{aligned} \quad (12)$$

式(10), (11), (12)を無次元化し, 熱応力を求めると次式となる.

(1) $0 < y < b$ の場合

$$\sigma_x = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -2s_1 B_2 + s_1^2 (B_1 + B_2 y) \right\} e^{2sy} + \left\{ -2s_2 B_4 + s_2^2 (B_3 + B_4 y) \right\} e^{-s_2 y - i x \xi} d\xi \quad (13)$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ (\beta + \gamma - p_1)^2 C_{11} e^{2py} + (\beta + \gamma - p_2)^2 C_{12} \right\} e^{(\beta + \gamma - p_2)y - i x \xi} d\xi$$

$$\sigma_y = \int_{-\infty}^{\infty} -\xi^2 \left\{ (B_1 + B_2 y) e^{2sy} + (B_3 + B_4 y) \right\} e^{-s_2 y - i x \xi} d\xi \quad (14)$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} -\xi^2 \left\{ C_{11} \exp(2py) + C_{12} \right\} e^{(\beta + \gamma - p_2)y - i x \xi} d\xi$$

$$\sigma_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} i\xi \left\{ B_2 - s_1 (B_1 + B_2 y) \right\} e^{2sy} + \left\{ B_4 - s_2 (B_3 + B_4 y) \right\} e^{-s_2 y - i x \xi} d\xi \quad (15)$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} i\xi \left\{ (\beta + \gamma - p_1) C_{11} e^{2py} + (\beta + \gamma - p_2) C_{12} \right\} e^{(\beta + \gamma - p_2)y - i x \xi} d\xi,$$

(2) $-a < y < 0$ の場合

$$\sigma_x = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -2s_1 B_2 + s_1^2 (A_1 + A_2 y) \right\} e^{2sy} + \left\{ -2s_2 A_4 + s_2^2 (A_3 + A_4 y) \right\} e^{-s_2 y - i x \xi} d\xi \quad (16)$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ (\beta + \gamma - p_1)^2 C_{21} e^{2py} + (\beta + \gamma - p_2)^2 C_{22} \right\} e^{(\beta + \gamma - p_2)y - i x \xi} d\xi$$

$$\sigma_y = \int_{-\infty}^{\infty} -\xi^2 \left\{ (A_1 + A_2 y) e^{2sy} + (A_3 + A_4 y) \right\} e^{-s_2 y - i x \xi} d\xi \quad (17)$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} -\xi^2 \left\{ C_{21} \exp(2py) + C_{22} \right\} e^{(\beta + \gamma - p_2)y - i x \xi} d\xi$$

$$\sigma_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} i\xi \left\{ A_2 - s_1 (A_1 + A_2 y) \right\} e^{2sy} + \left\{ A_4 - s_2 (A_3 + A_4 y) \right\} e^{-s_2 y - i x \xi} d\xi \quad (18)$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} i\xi \left\{ (\beta + \gamma - p_1) C_{21} e^{2py} + (\beta + \gamma - p_2) C_{22} \right\} e^{(\beta + \gamma - p_2)y - i x \xi} d\xi,$$

ここで

$$s_1 = -\frac{\beta}{2} - s, \quad s_2 = -\frac{\beta}{2} + s, \quad s = \sqrt{\xi^2 + \frac{\beta^2}{4}} \quad (19)$$

係数 $C_{ij}(\xi)$, ($i, j = 1, 2$) は式(10)の特解の係数である. 未知係数 $A_i(\xi), B_i(\xi)$, ($i = 1, 2, 3, 4$) は応力, 変位に関する境界条件式(11), (12)を考慮し, 積分方程式を解くことにより求められる.

4. 数値計算

セラミック側に与える温度を x 軸対称な幅 $2w$ のへヴィサイドのステップ関数として与える.

$$f_0(x) = H(w - |x|) \quad (20)$$

$(a, b) = (1.0, 2.0)$ で, セラミック側に温度を幅 $(w = 1.0)$ で与えたときのき裂面, ($y = 0, x > 0$)での無次元化温度変化量を示す.

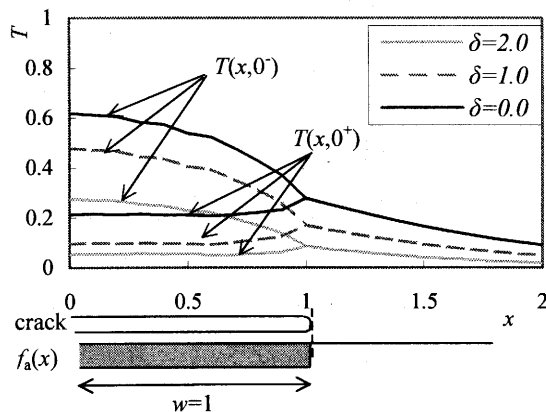


fig.2 The temperatures on the crack face and the crack extended line ($x > 0, y = 0$), $(a, b) = (1, 2), w = 1.0$

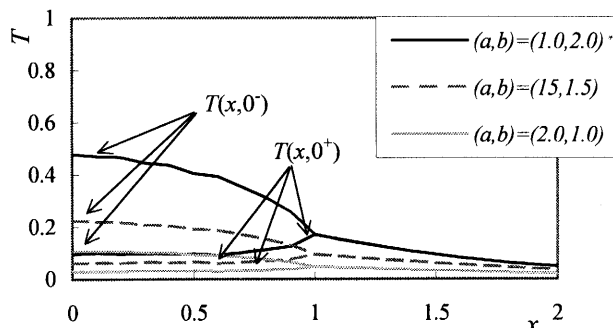


fig.3 The temperatures on the crack face and the crack extended line ($x > 0, y = 0$), $\delta = 1.0, w = 1.0$

図2より不均一パラメーター δ の増加によりき裂面での温度がさがること, き裂面での温度差を少なくすることが確認できる. また図3よりき裂が金属面に近づくほどき裂面での温度差は小さくなることわかる.

5. 結論

内部き裂を有する傾斜機能平板に x 軸対称のへヴィサイドのステップ関数を与えたとき温度に及ぼす非均一パラメータの影響を調べた. き裂が金属面に近くなるほど温度差は小さくなる. また, 不均一パラメータを大きくすることで温度を下げる事ができる.

6. 参考文献

- [1] Jin, Z.-H. and Noda, N., (1990), Int. J. Thermal Stress., Vol. 16, No. 28, pp. 181-196.
- [2] Noda, N., and Jin, Z.-H., (1994), Int. J. Solids, Structures, vol. 31, No. 2, pp. 203-218
- [3] Noda, N., and Jin, Z.-H., (1992), Int. J. Solids, Structures., Vol. 30, No. 8, pp. 1039-1056.
- [4] B. L. Wang., and J. C. Han, S. Y. Du., (2000), ASEM. J. Applid. mech. Vol. 67, No. 1, pp. 87-95.