

〔原著論文〕

多相交通流モデルの交通状態と渋滞転移

*静岡大学 工学部 長 井 亮 一†
 *静岡大学 工学部 長 谷 隆
 *静岡大学 工学部 山 田 晃 生

従来の2相最適速度モデルを拡張した多相最適速度モデルを提案する。本論文では実際に車に作用する力を考慮し、最適速度関数が多段階で変化する最適速度モデルを考え、その特性に関する知見を得るため数値解析を行った。多段階最適速度関数を用いた自動車交通流における交通状態と渋滞の相転移についてその特性を解析した。多段階最適速度関数から複数の頂点を持つ中立安定曲線と相分離線が得られ、従来の最適速度モデルの2相交通状態より複雑な多相交通状態が出現し、多段階相転移現象が現れることを明らかにした。

Phase Transitions and Characteristics of Multi-phase Traffic Model

Ryoichi NAGAI, Department of Mechanical Engineering, Shizuoka University

Takashi NAGATANI, Department of Mechanical Engineering, Shizuoka University

Akio YAMADA, Department of Mechanical Engineering, Shizuoka University

(Received 20 June, 2005; in revised form 5 October, 2005)

We investigate the jammed states and phase transitions of traffic in the optimal velocity model with the optimal velocity function of multi-stage. The dynamic state of real traffic is too complex to explain with the conventional optimal velocity model. We use the multi-stage velocity function to take into account the real force on a car, and study the traffic state by use of numerical simulations. The neutral stability line and coexisting curve have some local maxima in phase diagram. The traffic states change by the complex jamming transition. We find that the traffic states have different characteristics from the conventional optimal velocity model.

(KEY WORDS): Traffic Flow, Optimal Velocity Model, Jamming Transition, Multi-phase Flow

1 緒言

20世紀のはじめに始まったモータリゼーションは人々の生活をより便利なものへと変えたが、同時に交通事故や渋滞などの社会問題が顕著になってきた。なかでも交通渋滞は日常生活や経済に大きな損失をもたらし、近年では大気汚染や地球温暖化など環境への影響もクローズアップされて

いる。自動車交通流の交通量(流量)増加や安定化は非常に重要な課題である。

自動車交通流について、物理学の1分野として流体力学の立場から、これまで多くの研究が行われてきた¹⁻⁵⁾。交通流は互いに干渉する車の多体問題であり、中でも交通渋滞の発生は典型的な動的相転移現象である。これらの研究は微視的ならびに巨視的な立場から行われており、代表的なものとして追従モデル(最適速度モデル)、セルオートマトンモデル、流体力学モデル等が挙げられる。

*〒432-8561 静岡県浜松市城北 3-5-1

† E-mail: trnagai@ipc.shizuoka.ac.jp

最適速度関数は単調増加で、車間距離が無限に大きくなったとき最大速度に達する様な関数である必要がある。従来の研究では主に変曲点を1つ持つ1段階の最適速度関数が用いられてきた^{6,7)}。この最適速度関数は交通流の基本的な渋滞波現象を再現する。しかし実際の交通流においては、渋滞が発生するような密度領域では従来のような2相の最適速度関数で説明することが難しい複雑な交通状態が現れる。例えばボトルネックの上流では、流れが不安定領域に存在しながら安定状態を保つ同期交通¹⁻⁵⁾と呼ばれる交通流が発生する。同期交通現象は様々なモデルによって説明が試みられているが、未だに解明されていない。同期交通モデルを説明するものとして、近年 Kerner らにより3相流モデル³⁾が提案されている。

本論文はこれらの実際の交通流を説明する新しい最適速度モデルを提案する。このモデルは実際に車に作用する力を考慮して、最適速度関数について複数の変曲点を持った多段階の最適速度関数とする。最適速度が多段階で変化することを考慮した場合に渋滞現象がどのように変化するかについては、詳細な研究はなされていない。多相最適速度モデルにより同期交通などの実際の交通流におけるより複雑な渋滞現象を記述することができると期待される。本論文では多段階最適速度関数を用いた最適速度自動車交通流の特性を把握するため、数値シミュレーションを行うことにより、渋滞波の発生と、それによって得られる相転移現象や交通流量の変化について詳細に検討する。

2 最適速度モデルの理論解析

ここでは、本論文で用いる最適速度モデル⁹⁾とその理論解析について説明する。最適速度モデルとは、道路上を走行する車列について、車間距離を参照して1台1台の車の加速度が決められる運動方程式で記述されるモデルである。最適速度モデルは車 i について以下のように表される。

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = a \left\{ V(\Delta x_i) - \frac{dx_i}{dt} \right\} \quad (1)$$

ここで、 $V(\Delta x_i)$ は最適速度、 $x_i(t)$ は時間 t における

車 i の位置、 $\Delta x_i(t) (= x_{i+1}(t) - x_i(t))$ は時間 t における車 i の車間距離、 a は感度である。式(1)は車の運転者が前方の車との車間距離 $\Delta x_i(t)$ によって決定される最適速度 $V(\Delta x_i)$ に適用しようとするモデルを表す。このとき感度 a は交通状態が変化したときに車が最適速度 $V(\Delta x_i)$ に達するまでの遅れ時間 τ の逆数である。一般に最適速度は、車間距離 Δx_i が単調増加で、無限に大きくなったとき最大速度に達する様な関数である必要がある。まず、従来用いられてきた最適速度関数について示す。

$$V(\Delta x_i) = \frac{v_{\max}}{2} \left[\tanh \left\{ \frac{1}{2} (\Delta x_i - x_c) \right\} + \tanh \left(\frac{1}{2} x_c \right) \right] \quad (2)$$

このとき v_{\max} は車の最大速度であり、 x_c は安全距離である。式(2)による最適速度関数を図2に実線で示す。

交通流は、交通渋滞という動的転移現象を伴う流れである。図1に1段階の最適速度関数(式(2))を持つ最適速度モデルについて横軸を車の平均車間距離、車両感度を縦軸とした相図を示す。

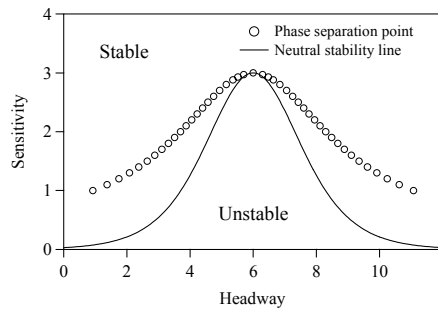


図1 中立安定曲線と相分離線

実線は平衡状態に小さな擾乱を加えたとき、その振幅の時間経過による安定性を解析することによって得られる中立安定曲線、白丸をつないでできる線は渋滞波の振幅から得られる相分離線である。相分離線の外側では交通流は一定の車間距離を持つ安定領域であり、中立安定曲線の内側は車間距離が2つの相に分かれる不安定領域である。相分離線と中立安定曲線の間は準安定領域であり、少しの擾乱で渋滞転移が起り、車間距離は2つの相に分かれる。平均車間距離を流体の体積、感度

を温度と見なし、車間距離が十分離れている自由流状態を気相、車間距離が短い渋滞状態を液相、渋滞波が発生している状態を気液2相流、そして中立安定曲線と相分離線の頂点を臨界温度とすると、交通流の相転移と気体、液体の相転移との相似性を見ることができる。

一般に、ドライバーはアクセル、ブレーキ、ギア等を操作することにより車をコントロールする。車の運動方程式は以下のように表される。

$$m \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \gamma \frac{dx_i}{dt} = F(\Delta x_i) \quad (3)$$

ここで m は車の質量、 γ は車の摩擦係数、 $F(\Delta x_i)$ は車に作用する力である。この式を変形すると以下のように表される。

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\gamma}{m} \left(\frac{F(\Delta x_i)}{\gamma} - \frac{dx_i}{dt} \right) \quad (4)$$

これを最適速度モデルに対応させると、感度 $a = \gamma/m$ 、最適速度関数 $V(\Delta x_i) = F(\Delta x_i)/\gamma$ となり、最適速度関数が車に作用する力を摩擦係数で割ったものに相当していることがわかる。加速時にはMT車やAT車はギアチェンジの影響により、また減速時にはエンジンブレーキ、フットブレーキを併用するため、 $F(\Delta x_i)/\gamma$ は Δx_i に対して複雑な関数となる。本研究では上記の一般的な車両力学を考慮し、これらの効果を取り入れた複数の変曲点を持つ最適速度関数に拡張する。本論文では以下の2つの多段最適速度関数について検討する。

$$V(\Delta x_i) = \frac{v_{\max}}{4} \{ \tanh(\Delta x_i - x_{c1}) + \tanh(x_{c1}) + \tanh(\Delta x_i - x_{c2}) + \tanh(x_{c2}) \} \quad (5)$$

$$V(\Delta x_i) = \frac{v_{\max}}{6} [\tanh\{2(\Delta x_i - x_{c1})\} + \tanh(2x_{c1}) + \tanh(\Delta x_i - x_{c2}) + \tanh(x_{c2}) + \tanh(\Delta x_i - x_{c3}) + \tanh(x_{c3})] \quad (6)$$

式(2)は従来の研究で用いられた1段階で速度が増加する最適速度関数であり、式(5)は関数の最大

勾配の大きさが式(2)とほぼ同じとした2段階で速度が増加する最適速度関数である。また式(6)は、各段階の最大勾配の大きさを変化させ、車間距離が短いとき最も急に速度が変化する3段階の最適速度関数である。式(2)、(5)、(6)の最適速度関数を図2に表す。

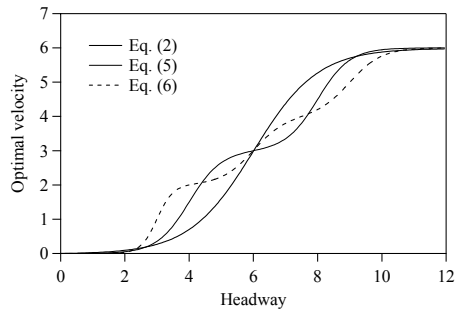


図2 最適速度関数

このとき最大速度は各最適速度関数について等しく $v_{\max} = 6.0$ であり、安全距離は式(2)において $x_c = 6.0$ 、式(5)において $x_{c1} = 4.0$ 、 $x_{c2} = 8.0$ 、式(6)において $x_{c1} = 3.0$ 、 $x_{c2} = 6.0$ 、 $x_{c3} = 9.0$ である。線形安定解析により、式(1)の安定条件は以下のように表すことができる^{1,9,10)}。

$$a > 2V'(\Delta x) \quad (7)$$

式(2),(5),(6)の最適速度関数から得られる中立安定曲線を、横軸を車間距離、縦軸を感度として図3に表す。式(5)の中立安定曲線は、式(2)の場合に比べてピークを2つ持ち、その高さは式(2)の場合とほぼ同じである。また、式(6)の中立安定曲線は極値を3つ持ち、その高さは各段階での勾配の最大値に比例して高くなる。

また、交通流において渋滞波が発生せず流れが一様であるという仮定の下に、最適速度関数より密度に対する交通流の理論流量を得ることができる¹⁾。交通流の密度を車間距離の逆数とし、交通流量 J を以下のように定義する。

$$J = V(\Delta x_{mean}) / \Delta x_{mean} \quad (8)$$

式(2),(5),(6)の最適速度関数から得られる理論流

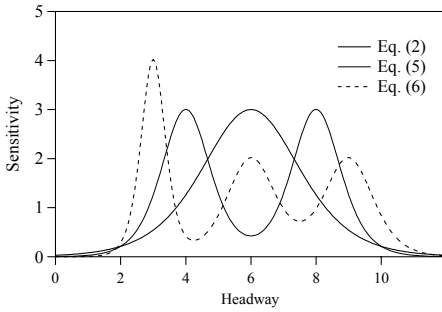


図3 中立安定曲線

量を、横軸を密度、縦軸を流量として図4に表す。式(5),(6)から得られる理論流量は、密度が低い領域では式(2)と一致し、密度の増加と共に式(2)よりも低い密度で流量が低下するが、さらに密度が高い領域では式(2)より大きな流量を得ていることがわかる。これは式(5),(6)の最適速度関数が、密度が高い(車間距離が短い)領域で式(2)よりも速度が大きいためである。

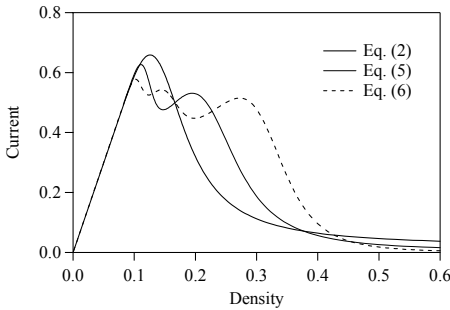


図4 式(6)から得られる理論流量

3 数値シミュレーション

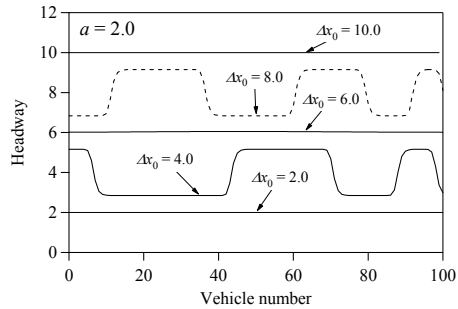
3.1 シミュレーション手法

ここでは、数値シミュレーション手法について説明する。初期条件を以下のように設定する。長さ $L=1000$ 程度の1車線道路を考え、等間隔に N 台の車を配置する。このときの各車間の距離は $\Delta x_0=L/N$ となる。車の速度は初期車間距離に対応した最適速度関数 $V(\Delta x_0)$ とする。さらに1台の車の初期速度をわずかに変化させることにより、交通流にわずかな擾乱を与える。また境界条件として道路の両端を周期境界とする。以上のような初期条件で並べられた各車について、式(2),(5),(6)に

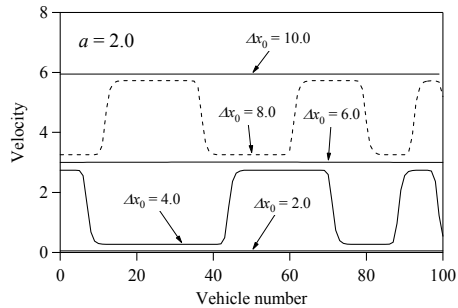
おける最適速度関数を用いて式(1)を4次のRunge・Kutta法により $\Delta t=1/128$ 刻みに解く。本研究においては感度 a と初期車間距離 Δx_0 を変化させてシミュレーションを行い、 $t=6000\sim 20000$ 程度まで計算を行い、このとき交通状態がどのように変化するか検討する。

3.2 2段階に変化する最適速度関数の検討

まず最適速度関数に式(5)を用いた場合について検討する。感度が図3の式(5)から得られる中立安定曲線のピークより高い $a > 3.0$ の場合、初期車間距離に関わらず交通流は一樣であり、車の速度は常に最適速度関数に沿う。 $a < 3.0$ では車間距離によっては交通流に渋滞波が発生する可能性がある。図5に感度 $a = 2.0$ の場合の各車に対する(a)車間距離 Δx_i と(b)速度 v_i を示す。このときの初期車間距離を、図3で得られる中立安定曲線の外側の $\Delta x_0=2.0, 6.0, 10.0$ 、内側の $\Delta x_0=4.0, 8.0$ とする。 $\Delta x_0=2.0, 6.0, 10.0$ を細線、 $\Delta x_0=4.0$ を実線、 $\Delta x_0=8.0$ を破線で表す。これらを見ると $\Delta x_0=2.0, 6.0, 10.0$ の場合は車間距離や速度が一定であるのに対し、



(a)



(b)

図5 最適速度関数(式(5))に対する $a=2.0$ の車間距離と速度

$\Delta x_0 = 4.0, 8.0$ の場合は2つの車間距離と速度に別れていることがわかる。これは実線の場合は交通流が不安定となって渋滞波が発生していることを示している。

次に図6に感度(a) $a = 1.2$, (b) $a = 1.0$ の場合の車間距離 Δx_i を示す。図5(a)と同様に $\Delta x_0 = 2.0, 6.0, 10.0$ の場合は車間距離が一定で、 $\Delta x_0 = 4.0, 8.0$ の場合は2つの車間距離に別れているが、図6(a)では分かれた車間距離のうち $\Delta x_0 = 4.0$ の大きい側と $\Delta x_0 = 8.0$ の小さい側の車間距離が重なっており、図6(b)では別れた $\Delta x_0 = 4.0$ と $\Delta x_0 = 8.0$ の車間距離が同じ値となっている。図5(a)や図6(a), (b)のように2つに別れたこれらの車間距離を図3で示した中立安定曲線と共に図7に示す。丸印が $\Delta x_0 = 8.0$ から得た車間距離であり、×印が $\Delta x_0 = 4.0$ から得た車間距離である。感度 $a > 3.0$ では交通流は Δx_0 に関わらず安定であるが、 $a < 3.0$ のとき、交通流は Δx_0 が中立安定曲線の内側において不安定となり、丸印や×印の車間距離に別れる。 $a = 1.3$ 以下から丸印と×印は交差し、 $a = 1.1$ より感度が下がると丸印と×印は一致する。これらの点で構成される相分

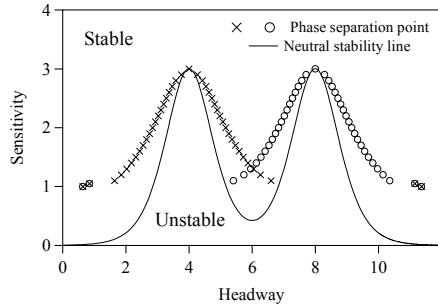


図7 最適速度関数(式(5))に対する相図

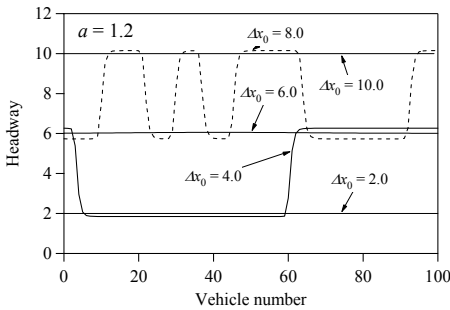
離線は、図1の場合に比べて異なる特徴を持つことが分かる。

ここではこれらの渋滞現象について詳細に検討する。図8にこれまでで示された $\Delta x_0 = 4.0$ と $\Delta x_0 = 8.0$ における渋滞波を、横軸を車間距離、縦軸を速度として最適速度関数とともに示す。このとき感度は(a) $a = 2.0$, (b) $a = 1.2$, (c) $a = 1.0$ である。車が有限の感度を持つことにより遅れて加減速を行うため、これらの図のようなりミットサイクルと呼ばれる環となる。車は反時計周りに最適速度関数上にある2つの車間距離の間を移動する。(a)では2つの環は離れ、(b)では一部が重なり、(c)では一致する様子が分かる。これらのリミットサイクルを流量曲線(基本図)に図4の理論流量曲線と共に示すと図9のようになる。このときそれぞれの感度は図8と同じである。ここでは車は理論流量曲線から離れて時計回りに瞬間的な流量 $v_i/\Delta x_i$ を変化させていることがわかる。

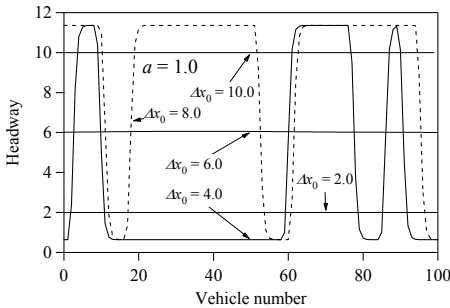
図10に単位時間に道路上の1点を通る車の台数から得られる平均流量を理論流量曲線と共に示す。このとき感度は(a) $a = 4.0$, (b) $a = 2.0$, (c) $a = 1.0$ である。図2の中立安定曲線の内側に相当する密度では平均流量が理論流量から離れることが知られている。図10を見ると(a)では密度にかかわらず安定であるので、平均流量と理論流量は一致し、(b), (c)では一致しない領域が2つ発生している。より感度の低い(c)ではそのずれはより大きいことがわかる。

3.3 3段階に変化する最適速度関数の検討

ここでは最適速度関数に式(6)を用いた場合について検討する。図11に感度(a) $a = 3.0$, (b) $a = 1.5$, (c) $a = 1.1$, (d) $a = 1.0$ の場合の各車に対する車間距

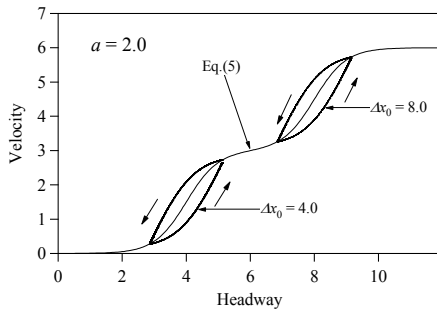


(a)

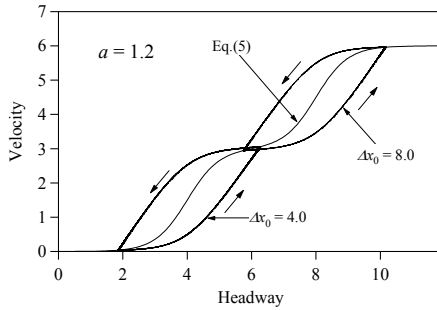


(b)

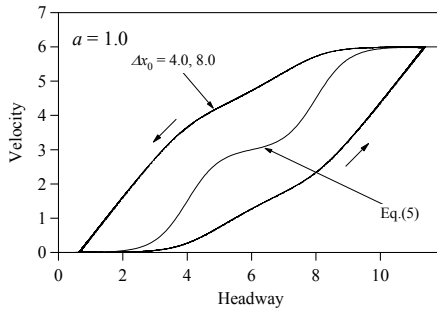
図6 最適速度関数(式(5))に対する $a = 1.2, 1.0$ の車間距離分布



(a)



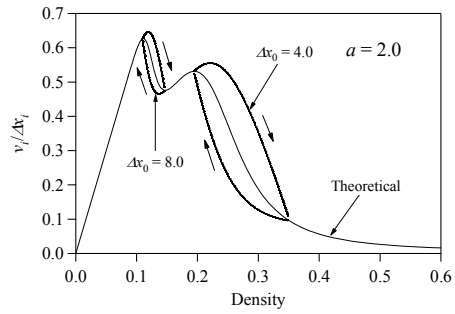
(b)



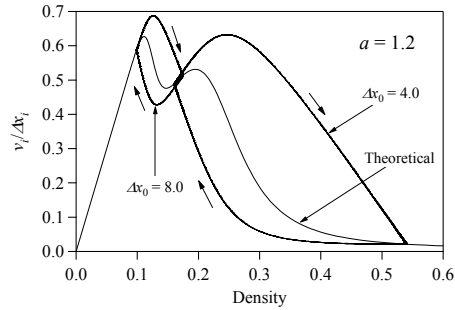
(c)

図8 最適速度関数(式(5))に対する車間距離に対する速度

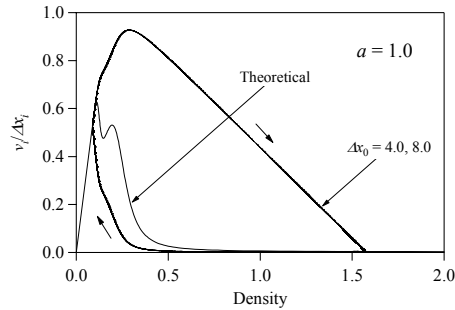
離 Δx_i を示す。このときの初期条件は、最適速度関数の安全距離と同じの車間距離 $\Delta x_0=3.0, 6.0, 9.0$ と、それらを等間隔で挟む $\Delta x_0=1.5, 4.5, 7.5, 10.5$ である。 $\Delta x_0=1.5, 4.5, 7.5, 10.5$ を細線、 $\Delta x_0=3.0$ を実線、 $\Delta x_0=6.0$ を破線、 $\Delta x_0=9.0$ を一点鎖線で表す。(a)の場合では $\Delta x_0=3.0$ の場合のみ渋滞波が発生し、それ以外は初期車間距離と同じ一定値を保っている様子が見られる。これは $a = 3.0$ において $\Delta x_0 = 3.0$ の場合のみ図3の中立安定曲線の内側にあるためである。(b-d)の場合においては、 $\Delta x_0=1.5, 4.5, 7.5, 10.5$ の場合は車間距離が一定であるのに対し、 $\Delta x_0=3.0,$



(a)



(b)

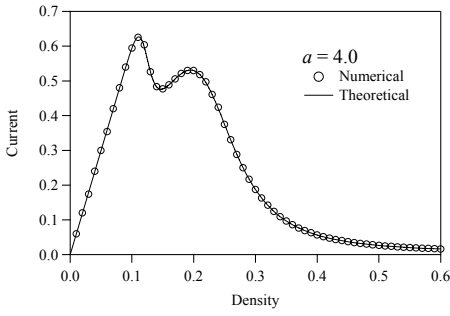


(c)

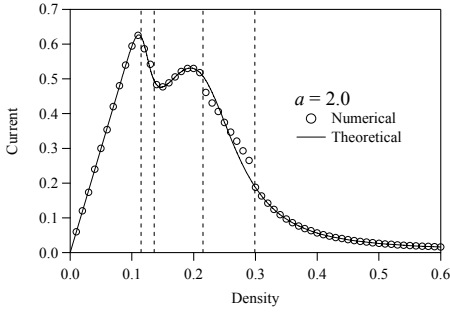
図9 最適速度関数(式(5))に対する瞬間的な流量

$6.0, 9.0$ の場合は渋滞が発生していることがわかる。これは $\Delta x_0=3.0, 6.0, 9.0$ の場合のみ中立安定曲線の内側にあるためである。また(c)では $\Delta x_0=3.0, 6.0, 9.0$ の車間距離部分的に重なっており、(d)では2つに分かれた車間距離が $\Delta x_0=3.0, 6.0, 9.0$ について同じ値となっている様子が見られる。

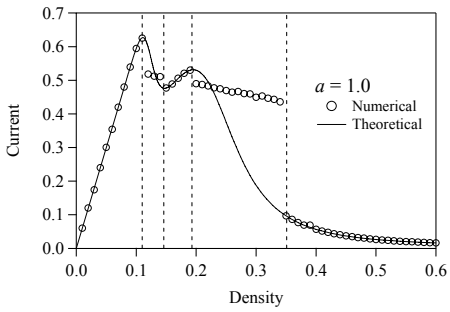
次に2つに別れたこれらの車間距離を図3で示した中立安定曲線と共に図12に示す。感度 $a > 4.0$ では交通流は Δx_0 に関わらず安定であるが、 $a < 4.0$ のとき、特に中立安定曲線の内側で不安定となり、丸印、×印および△印の車間距離に別れる。 $a = 1.2$ 以下から丸印、×印および△印は重なり、 $a = 1.1$



(a)



(b)

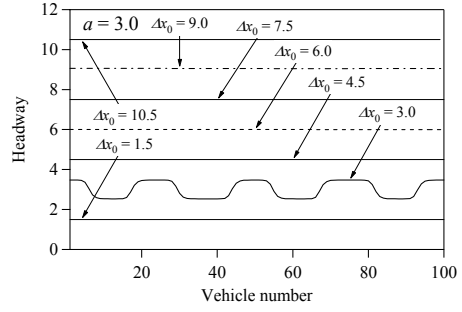


(c)

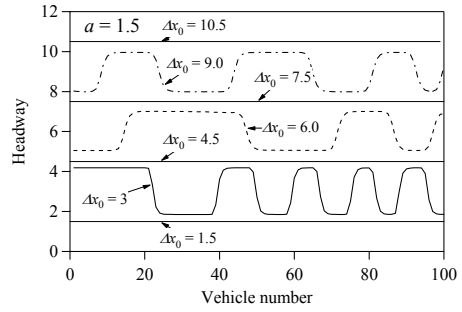
図 10 最適速度関数 (式(5)) に対する平均流量

より感度が下がると3つの印は一致する。これらの点で構成される相分離線は、図7と同様に図1の場合に比べて異なる特徴を持つことが分かる。

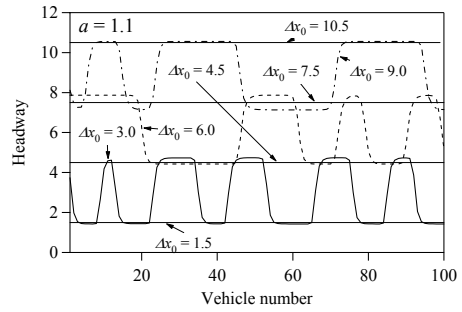
ここではこれらの渋滞現象についてより詳細に検討する。図13にこれまで示された $\Delta x_0 = 3.0, 6.0, 9.0$ における渋滞波を、横軸を車間距離、縦軸を速度として最適速度関数とともに示す。このとき感度は(a) $a = 3.0$, (b) $a = 1.5$, (c) $a = 1.1$, (d) $a = 1.0$ である。図8と同様に交通流はリミットサイクルとなり、車は反時計回りに最適速度関数上にある2つの車間距離の平衡状態の間を移動する。(a)では環は $\Delta x_0 = 3.0$ の場合でしか存在せず、(b)では3



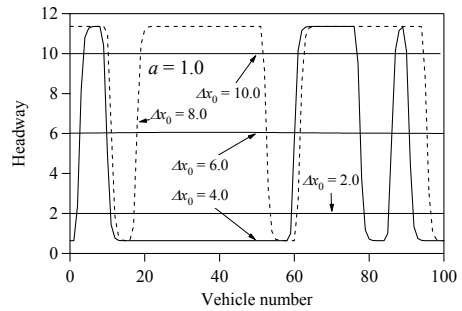
(a)



(b)



(c)



(d)

図 11 最適速度関数 (式(6)) に対する車間距離分布

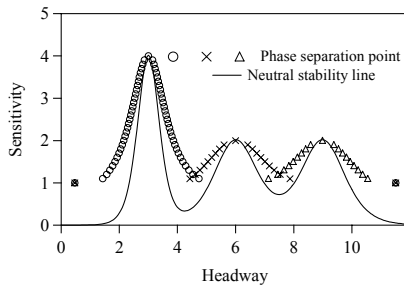


図 12 最適速度関数 (式(6)) に対する相図

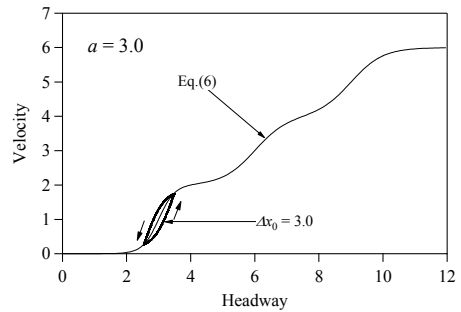
つの環となり、(c)ではそれらが重なり、(d)では一致する様子が分かる。これらのリットサイクルを流量曲線（基本図）に図 4 の理論流量曲線と共に示すと図 14 のようになる。このときの感度と初期車間距離は図 13 と同じである。ここでは車は理論流量曲線から離れて時計回りに瞬間的な流量 $v_i/\Delta x_i$ を変化させていることがわかる。

図 15 に単位時間に道路上の 1 点を通る車の台数から得られる平均流量を理論流量曲線と共に示す。このとき感度は(a) $a = 5.0$ 、(b) $a = 3.0$ 、(c) $a = 1.5$ 、(d) $a = 1.0$ である。(a)の場合すべての密度で平均流量と理論流量は一致し、(b)の場合は 1 箇所、(c),(d)の場合は 3 箇所において平均流量と理論流量が一致しない領域が発生している様子がわかる。感度がより低い場合、流量のずれはより大きい。

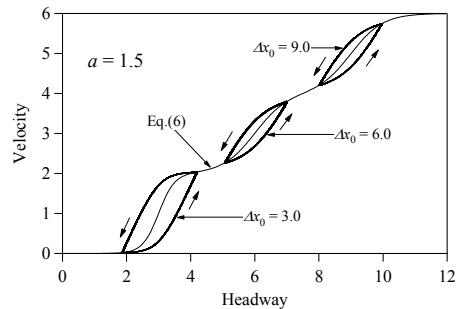
4 結言

実際に車に作用する力を考慮した複数の変曲点を持つ多段階最適速度モデルを提案した。その特性について理論的、数値的に検討した結果、以下のことを明らかにした。

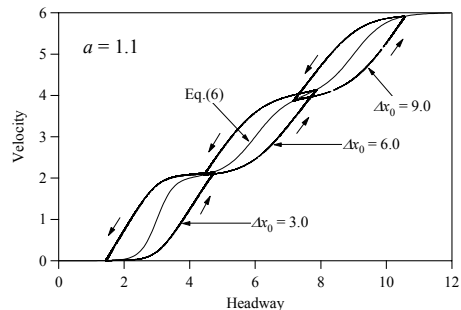
- 1) 最適速度関数を多段階に変化させることによって、中立安定曲線は複数の極大点を持ち、その高さは最適速度関数の勾配に比例する。多段階最適速度関数には、車間距離が短く速度が高い領域があり、理論流量は高密度領域で高くなる。
- 2) 相図においては中立安定曲線の形状によって複数の領域に分類することができる。これらの交通状態は感度と初期車間距離に依存する。
- 3) 上記の渋滞状態における車間距離から相分離線を求めると、中立安定曲線における複数の山の頂上から複数の相分離線が現れる。感度



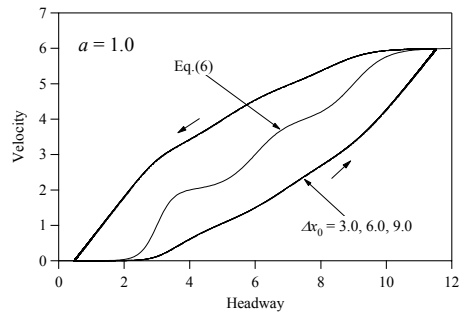
(a)



(b)

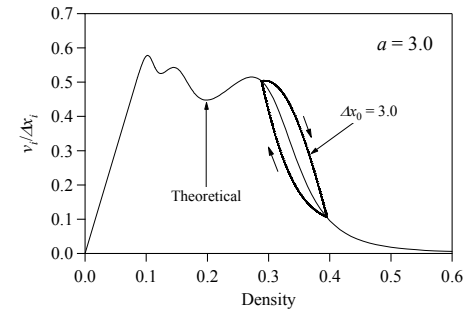


(c)

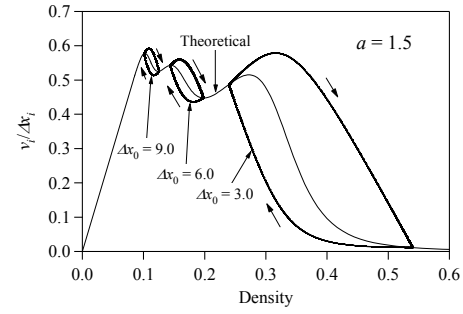


(d)

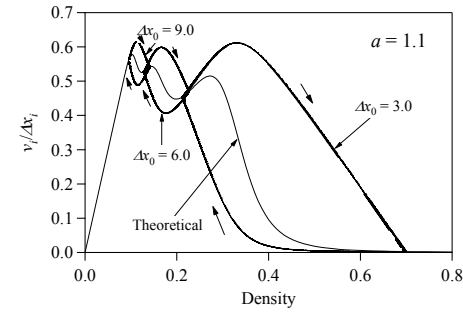
図 13 最適速度関数 (式(6)) に対する車間距離に対する速度



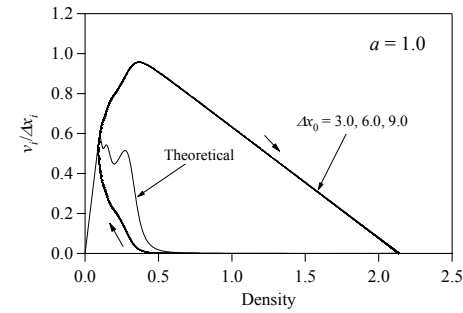
(a)



(b)

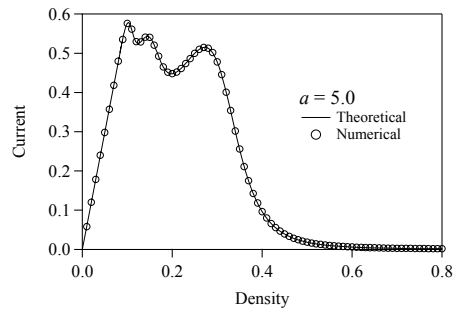


(c)

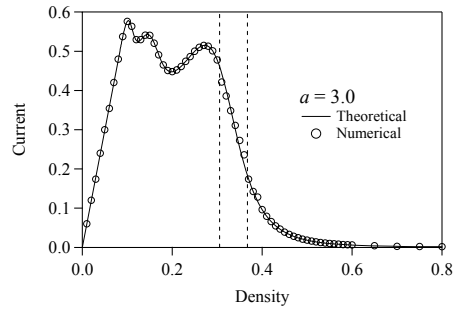


(d)

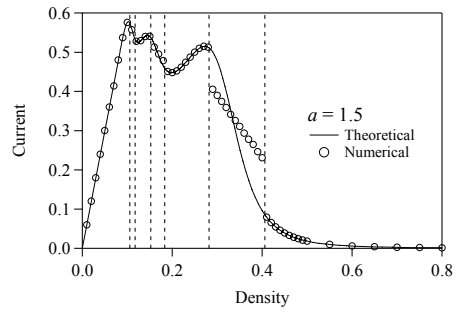
図 14 最適速度関数 (式(6)) に対する瞬間的な流量



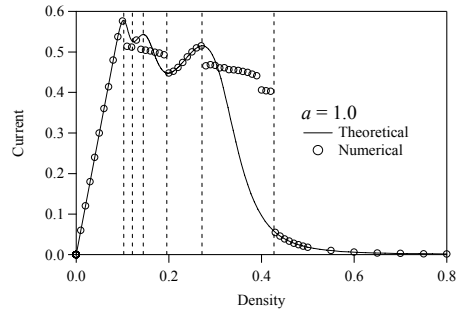
(a)



(b)



(c)



(d)

図 15 最適速度関数 (式(6)) に対する平均流量

の減少と共にそれらは交差し、ある感度以下ではそれらの相分離線は一致する。

- 4) 交通流において感度を一定とし、密度を増加させると、従来の最適速度関数と同様に流量は比例して増加し、あるところで減少する。さらに密度を増加させると渋滞状態と安定状態が交互に複数発生し、渋滞状態においてその流量は理論流量から離れ、最後は安定状態となる。
- 以上のことから多段階最適速度関数を用いた交通流モデルの特性を明らかにした。実際の交通流においては、渋滞が発生するような密度領域では従来のような単純な最適速度関数で説明することが難しい現象が発生することもあり、本論文で提案した多段階最適速度関数を用いることにより、それらの解明の一助とすることができると期待される。
- ### 引用文献
- 1) Nagatani, T.: The physics of traffic jam, Rep. Prog. Phys. 65 (2002) 1331-1386.
 - 2) Helbing, D.: Traffic and related self-driven many-particle systems, Rev. Mod. Phys. 73 (2001) 1067-1141.
 - 3) Kerner, B. S.: *The Physics of Traffic* (Springer 2004).
 - 4) Helbing, D., Herrmann, H. J., Schreckenberg, M., Wolf, D. E. (Eds.) *Traffic and Granular Flow '99*, Springer, Heidelberg, 2000.
 - 5) Chowdhury, D., Santen, L., Schadschneider, A.: Statistical physics of vehicular traffic and some related systems, Phys. Rep. 329 (2000) 199-329.
 - 6) 村松将邦, 長谷隆 : 交通流の安定化と非線形波動に関する研究, 日本機械学会論文集(B編), 第66巻, 651号, (2000) 2884-2890.
 - 7) 倉田省吾, 村松将邦, 長谷隆 : 隊列走行による交通流の安定化と促進, 日本機械学会論文集(B編), 第67巻, 660号, (2001) 2019-2026.
 - 8) Nagatani, T.: Multiple jamming transitions in traffic flow, Physica A, 290 (2001) 501-511.
 - 9) Bando, M., Hasebe, K., Nakayama, A., Shibata, A., Sugiyama, Y.: Dynamic model of traffic congestion and numerical simulation, Phys. Rev. E51 (1995) 1035-1042.
 - 10) Bando, M., Hasebe, K., Nakayama, A., Shibata, A., and Sugiyama, Y.: Structure Stability of Congestion in Traffic Dynamics, Japan J. Indust. Appl. Math. Vol.11, 1994, p.203-223
 - 11) Yukawa, S. & Kikuchi, M.: Coupled-map modeling of one-dimensional traffic flow, J. Phys. Soc. Japan, 64 (1994) 35-38.
 - 12) Sasoh, A. & Ohara, T.: Shock wave relation containing lane change source term for two-lane traffic flow, J. Phys. Soc. Japan, 71 (2002) 2339-2347.
 - 13) Nishinari, K., Fukui M., and Schadschneider A., A stochastic cellular automaton model for traffic flow with multiple metastable states, J. Phys. A, 71 (2002) 2339-2347.
 - 14) 佐宗章弘 : 交通流における圧縮性流体力学, ながれ, 第22巻 (2003) 117-122.
 - 15) 杉山雄規 : 交通流の物理, ながれ, 第22巻 (2003) 95-108.
 - 16) 長井亮一, 尾之内恒俊, 長谷隆 : 最適速度交通流モデルにおける矩形波の伝播挙動, ながれ, 第24巻, 4号 (2005) 530-550.